Sopra una Formula di Machin

Ennio Badolati

Dipartimento di Scienze Economiche Gestionali e Sociali
Università del Molise

1 *"Ma qui da ultimo giova esibirvi quella formula proposta dal Machin, nelle Transazioni anglicane, an. 1738, ond'ei all'anomalia media raccoglieane la coequata, tanto nelle orbite di poca eccentricità, che nelle molto eccentriche."* Così Nicola Fergola ([1]), nel lumeggiare la storia dell'equazione di Keplero, riteneva di porre in risalto la soluzione proposta dal matematico inglese. Ed alle stesse conclusioni giungeva John Brinkley, nella sua magistrale storia dell'equazione di Keplero ([2]), sostenendo che: *"That a complete solution to Kepler's problem might be given, equally applicable to all orbits, Machin proposed his very ingenious method, which does not at all depend on the excentricity."*

La soluzione di Machin, che fu pubblicata nel 1738 ([3]), può riassumersi alla seguente maniera: data l'equazione di Keplero ([4])

$$M = E - e \sin E \qquad (0 < e < 1) \tag{1}$$

ponendo

$$E = a \arcsin s$$

(1) Si veda "Il problema di Keplero risoluto dal fu illustre geometra N. Fergola..." (a cura di V. Flaùti - Mem. Acc. Sc. Napoli, II, 1857 p.158) Per la soluzione di Fergola rinviamo a bibl. 2. Inoltre aggiungiamo che la locuzione "anomalia coequata" (introdotta da Keplero) sta per anomalia vera.

(2) Si veda bibl. 4 - p.109.

(3) "The solution of Kepler's problem" (Phil. Trans. XL, 1737-38 p.205)

(4) Per la validità del metodo la (1) va scritta con le anomalie misurate dal perielio.

si ha che la (1) diviene

$$M = a \arcsin s \ - \ e \sin(a \arcsin s)$$

Poichè valgono gli sviluppi in serie ([5])

$$(2') \qquad \arcsin s = s + \frac{1}{3!} s^3 + \frac{9}{5!} s^5 + \frac{225}{7!} s^7 + \ldots$$

$$(2'') \qquad \begin{aligned} \sin(a \arcsin s) = {} & a s - \frac{a(a^2-1)}{3!} s^3 + \frac{a(a^2-1)(a^2-9)}{5!} s^5 + \\ & - \frac{a(a^2-1)(a^2-9)(a^2-25)}{7!} s^7 + \ldots \end{aligned}$$

la (1) può scriversi

$$(3) \qquad \frac{M}{a} = (1-e)\, s + \frac{1+e(a^2-1)}{3!} s^3 + \frac{9-e(a^2-1)(a^2-9)}{5!} s^5 + \ldots$$

A questo punto l'autore osserva che se nella (3) si trascurano i termini di ordine > 5 e se il parametro a viene scelto in modo che

$$(4) \qquad 9 = e\,(a^2-1)\,(a^2-9)$$

allora la soluzione della (3) - e quindi della (1) - viene ricondotta, nell'ambito di un'approssimazione numerica, alla risoluzione di un'equazione cubica.

Per esplicitare quest'equazione scegliamo, seguendo Machin, tra le radici della (4) la seguente ([6])

$$(5) \qquad n = \sqrt{5 + \sqrt{16 + 9\,e^{-1}}}$$

che è certamente reale e positiva; avremo così l'equazione

(5) Per la (2") si veda , ad es., E.W.Hobson - A treatise on plane and advanced trigonometry. (VII ed. Cambridge 1928 - p.272 e sgg.) Occorre aggiungere che né Machin né Brinkley si preoccuparono della convergenza delle due serie.

(6) La (5) è dovuta al Brinkley; nel lavoro di Machin invece si trova il valore

$$n = \sqrt{5 + \sqrt{25 + 9pf^{-1}}}$$

dove $p = 1-e$ e $f = e$.

$$\frac{1 + e\,(n^2 - 1)}{6}\, s^3 + (1-e)\, s - \frac{M}{n} = 0$$

Ponendo ancora

$$c = \frac{1 + e\,(n^2 - 1)}{6} \qquad\qquad \eta = \frac{M}{2nc}$$

si avrà infine

$$(6) \qquad s^3 + \frac{1-e}{c}\, s - 2\eta = 0$$

A queste considerazioni occorre aggiungere che, come tacitamente ammesso da Machin, la (6), avendo il coefficiente del termine lineare positivo, ha una sola radice reale che pertanto può essere calcolata con la formula di Tartaglia - Cardano

$$(7) \quad s = \sqrt[3]{\eta + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\eta - \sqrt{\Delta}} \qquad\qquad \left(\Delta = \eta^2 + \frac{(1-e)^3}{27c^3}\right)$$

la quale, salvo qualche trasformazione algebrica, coincide con la formula di Machin.

2 La valutazione dell'errore nel procedimento di Machin presenta notevoli difficoltà e - detto per inciso - costituisce un inconveniente del metodo, per cui, rinunziando ad un'analisi approfondita di questo problema, del resto di discutibile utilità in un lavoro a carattere storico, ci limiteremo ad alcune considerazioni, simili a quelle sviluppate dall'autore, sull'ordine d'approssimazione.

Occorre premettere che per $0 < e < 1$ risulta $\sqrt{10} < n < +\infty$, ma in realtà, tolti i valori di n prossimi allo zero, risulta sensibilmente $n \cong \sqrt{10}$ (infatti per $0.1 < e < 1$ si ha $\sqrt{10} < n < 3.91$); ora possiamo osservare che il primo termine omesso nella (3) (con $a = n$) è

$$\frac{n^3}{560} s^7$$

e poichè

$$s = \sin\frac{E}{n} \cong \sin\frac{M}{n}$$

segue che l'approssimazione si ottiene a meno di infinitesimi dell'ordine di

$$\left(\frac{n^3}{560}\sin\frac{M}{n}\right)^7$$

In definitiva l'errore dipende da e e da M, ma per eccentricità non troppo piccole (7) (essendo $n \cong \sqrt{10}$) si può convenire che esso dipenda solo da M, ed in questo senso vanno intese le citazioni del Fergola e del Brinkley.

Per un giudizio finale, tuttavia, occorre tener presente che, da un punto di vista puramente numerico, la risoluzione di un'equazione cubica è un'operazione piuttosto lunga, per cui, valutando anche la precedente considerazione sull'errore, viene spontaneo ritenere la formula di Machin, pur se assai ingegnosa, come poco rispondente alle esigenze della pratica ed in questo senso dubitiamo alquanto che qualche astronomo l'abbia usata sistematicamente.(8)

Infine aggiungiamo che per migliorare l'approssimazione ottenuta dalla (7) l'autore propone la formula

$$\Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e\cos E}$$

da ripetere fino al raggiungimento della precisione voluta.(9)

3 Tra le memorie che furono pubblicate prima della soluzione di Machin vogliamo ricordare quella di Hermann (1726) in cui, oltre alla soluzione grafi-

(7) Naturalmente per piccoli valori di e il metodo conserva la sua validità, ma in tal caso il procedimento di Machin, pur consentendo una buona approssimazione, non è più conveniente.

(8) Positivo, invece, il giudizio del Montucla: "... nous citerons d'abord un savant écrit de M. Machin... où il donne... des séries extrêmement convergentes, d'où il dérive une solution très-simple et très expéditive." (Hist. des Math. - t.II, Parigi 1799, p.344)

(9) Nel testo la formula è presentata senza attribuzioni, ma essa è dovuta a Newton. Si veda J.C. Adams "On Newton's solution of Kepler's problem" (Mont. Not. R. Astr. Soc. - XLIII, 1882 - 83, p. 43).

ca basata sulla sinusoide, si può trovare il seguente metodo ([10]): data l'equazione

$$m = u + e \sin u$$

sviluppando in serie *sin u* si ricava

$$u(1 + e) - e \frac{u^3}{3!} + e \frac{u^5}{5!} - \ldots = m$$

da cui, arrestandosi al p - mo termine, si ha l'equazione algebrica

$$(1+e)u - e \frac{u^3}{3!} + \ldots + (-1)^p e \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} = m$$

Naturalmente il metodo riesce valido per piccoli valori di u.

Anche se il nome di Hermann non appare nello scritto di Machin, noi riteniamo molto probabile che questi si sia ispirato al metodo del matematico svizzero e ciò perché è difficile pensare che Machin non fosse a conoscenza dei Commentari di Pietroburgo, vista la fama della rivista fra gli studiosi del tempo.

4 Come già detto i dubbi sull'effettivo uso della formula di Machin da parte degli astronomi hanno un non trascurabile fondamento, ma sarebbe riduttivo valutare, nell'ambito storico, un argomento di matematica unicamente in base al consenso dei contemporanei. In effetti l'acume mostrato nel risolvere la (1) basterebbe da solo a giustificare la citazione, ma giova anche ricordare che le soluzioni ottenute sostituendo alle funzioni i loro sviluppi in serie hanno trovato numerose applicazioni e continuano ad essere usate dai matematici, per cui non resta che chiudere con un giudizio sostanzialmente positivo sul metodo di Machin.

(10) "Germinus modus directus... (De problemate Kepleriano) (Comm. Ac. Sc. Petropolitanae, I, 1726, p.142). Per la soluzione dell'equazione di Keplero con la sinusoide si veda bibl. 1.

BIBLIOGRAFIA

1) Badolati E. *Sintesi storica di talune soluzioni dell'equazione di Keplero.* (Atti Acc. Pontaniana Napoli - XXVI, 1977, p.225).

2) Badolati E. *L'equazione di Keplero e la scuola matematica napoletana.* (Rend. Acc. Sc. Napoli - XLVI, 1979, p.1).

3) Badolati E. *On the history of Kepler's equation.* (Vistas in astronomy, 28, 1985)

4) Brinkley J. *An examination of various solutions of Kepler's problem.* (Trans. R. Irish Ac. - IX, 1803, p.143)

5) Houzeau - Lancaster *Bibliographie generale de l'astronomie.* (due tomi) Bruxelles 1882 - 1887.

6) Radau R. *Bibliographie du problème de Keplèr.* (Bull. Astr. - XVII, 1900, p.37)