Astron. Astrophys. 231, 561–570 (1990)

ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS

Méthode itérative de construction d'une théorie générale planétaire

P. Bretagnon

Service de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes, Unité Associée au CNRS, 77 Avenue Denfert-Rochereau, F-75014 Paris, France

Reçu le 25 juillet, accepté le 16 octobre 1989

Iterative method in the construction of a general planetary theory

Abstract. The study of the evolution of the planetary orbits and of the stability of the solar system has been the subject of numerous works since Lagrange and Laplace. Up to the years 70, this study was only possible for long time spans by the construction of analytical theories.

Since these last years, thanks to the velocity of computers, this study can be made by numerical integration over very important time spans: 5 million years for the numerical integration by Kinoshita and Nakai (1984), 214 million years for that of Applegate et al. (1986), 100 million years for that of Milani et al. (1987). As of now, these integrations deal with the system of outer planets, since the integration of all the solar system require computer time 100 to 200 times higher.

The difficulty of the analytical methods lies in the quickly growing complexity of the formulas according to the order of planetary masses. The present general analytical solutions have all been developed up to the second order with respect to masses, which limits the validity to 1 million years, particularly for Jupiter and Saturn, for which planets the third order perturbations of the masses are very important.

We have thus developed an iterative method of construction of general planetary theories, which should enable to develop the perturbations to all the orders with respect to the masses, the limitations for precision only appearing in the truncature of the Fourier series in the analytical construction of the second members of the Lagrange equations.

We give the form of the equations we intend to solve in the expressions (3), (4) and (5) then we say how, from the Lagrange-Laplace solution, we develop the iterative method. The method of integration is explained for formulas (13) to (30). The integration of the long period terms is given by the resolution of system (22) and system (29).

We finally end through an application to the Jupiter-Saturn couple giving a first determination of the fundamental frequencies connected to these two planets.

Key words: celestial mechanics and astrometry – planetary theory

1. Introduction

L'évolution des orbites planétaires étudiées depuis Lagrange et Laplace a donné lieu à de nombreux travaux surtout depuis quelques décennies avec les publications de Brouwer et van Woerkom (1950), Anolik et al. (1969), Bretagnon (1974), Duriez (1979), Bretagnon (1984a) et Laskar (1988).

Les théories planétaires à variations séculaires telles que VSOP 82 (Bretagnon, 1982), TOP 82 (Simon, 1983) atteignent une très grande précision. Toutefois, par construction, dans ces théories les variations périodiques des périhélies et des nœuds sont développées en polynômes du temps ce qui limite la validité de ces solutions à quelques milliers d'années.

Au contraire, les théories générales conservent analytiquement, outre les longitudes moyennes de l'ensemble des planètes, les arguments du périhélie et du nœud de chaque planète. L'intervalle de validité des solutions n'est plus alors limité que par la précision de détermination des fréquences à longues périodes des périhélies et des nœuds. Ces solutions comportent un nombre de termes beaucoup plus grand que les théories à variations séculaires. Ce sont en effet des séries de Fourier dont les arguments sont, si on considère les 8 planètes principales, des combinaisons linéaires de 24 composantes. La prolifération des termes dans les théories générales limite évidemment la précision de ces solutions.

Une autre approche pour l'étude des variations des orbites planétaires à longues périodes est l'intégration numérique. Après des intégrations sur des intervalles de l'ordre du million d'années, telle l'intégration de Cohen et al. (1973), le développement de la rapidité des ordinateurs a permis récemment des intégrations numériques sur des temps importants: intégration des 5 planètes extérieures sur 5 millions d'années (Kinoshita et Nakai, 1984), sur 214 millions d'années (Applegate et al., 1986), sur 100 millions d'années (Milani et al., 1987).

Après avoir défini nos notations dans la deuxième partie, nous allons, dans la troisième partie, comparer les méthodes numériques et les méthodes analytiques. La quatrième partie décrit le système et les forces que nous considérons. La cinquième partie donne la solution du système de Lagrange-Laplace. La méthode de la construction complète, à chaque itération, des seconds membres des équations de Lagrange est développée dans la sixième partie ainsi que l'intégration des équations. Enfin, nous donnons dans la septième partie les premiers résultats de l'application de notre méthode au couple Jupiter-Saturne.

2. Notations

Pour décrire les six éléments orbitaux des planètes, nous utilisons les notations suivantes:

a: le demi-grand axe
λ: la longitude moyenne

$k = e \cos \varpi$

$h = e \sin \varpi$

$q = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega$

$p = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega$.

où e est l'excentricité de l'orbite, ϖ la longitude du périhélie, i l'inclinaison et Ω la longitude du nœud.

Les théories générales développent les solutions du mouvement des planètes en séries de Fourier dont les arguments Φ sont représentés par une combinaison linéaire de 24 composantes, si on considère 8 planètes:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{8} r_j \lambda_j + \sum_{j=1}^{8} l_j \psi_j + \sum_{j=1}^{8} m_j \theta_j , \qquad (1)$$

λ_j, ψ_j, θ_j représentent respectivement la longitude moyenne, l'argument de la solution de Lagrange en excentricité, l'argument de la solution de Lagrange en inclinaison pour la planète j. r_j, l_j, m_j sont des entiers relatifs.

On introduit les fréquences g_j et s_j et les phases β_j et δ_j par:

$$\begin{aligned} \psi_j &= g_j t + \beta_j \\ \theta_j &= s_j t + \delta_j . \end{aligned} \qquad (2)$$

Dans la construction des équations de Lagrange, nous sommes amenés à utiliser la troisième loi de Kepler:

$$n^2 a^3 = f(1+m)$$

où n est le moyen mouvement, m la masse de la planète en unité de masse solaire; f est le carré de la constante de la gravitation:

$$\sqrt{f} = 0{,}017\,202\,098\,95 .$$

Nous définissons également:

$\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}'$ les vecteurs de position de la planète considérée et de la planète perturbatrice.

r, r' les rayons vecteurs de ces 2 planètes.

Δ leur distance.

La longitude vraie w des planètes est donnée par:

$$w = v + \varpi$$

où v est l'anomalie vraie.

On introduit le rayon gravitationnel μ du Soleil dans les perturbations relativistes:

$$\mu = \frac{GM}{c^2} = f\left(\frac{\mathrm{UA}}{c \times 86\,400}\right)^2 = 98{,}706\,286\ 10^{-10}$$

où c est la vitesse de la lumière et UA la longueur de l'unité astronomique:

$c = 299\,792{,}458\ \mathrm{km\,s^{-1}}$

$\mathrm{UA} = 149\,597\,870\ \mathrm{km}$.

Dans les perturbations dues à la Lune, on utilise la quantité β:

$$\beta = \frac{m_\mathrm{L}}{m_\mathrm{T}} = 0{,}012\,300\,02$$

où m_L et m_T sont les masses de la Lune et de la Terre respectivement.

Enfin, on emploiera la notation:

$\langle X \rangle$

pour désigner la partie de X ne dépendant pas explicitement du temps.

3. Comparaison des méthodes numériques et des méthodes analytiques

Les intégrations numériques et les solutions analytiques présentent, les unes et les autres, des avantages et des inconvénients que nous allons décrire.

3.1. Les intégrations numériques

Dans les intégrations numériques, l'intégration directe des équations du mouvement s'effectue à une très grande précision. Seule la longitude, sous l'effet des erreurs d'arrondi, se dégrade de manière sensible après plusieurs dizaines de millions d'années. Toutefois cet effet ne se répercute que faiblement sur les éléments définissant l'orbite. A ce sujet, il est bon de noter que les incertitudes sur les moyens mouvements actuels sont de l'ordre de quelques $0\overset{''}{.}001$/an ce qui entraîne une dérive dans les longitudes atteignant 30° au bout de 100 millions d'années.

La rapide amélioration des performances des ordinateurs a permis des intégrations numériques sur de grands intervalles de temps. En effet, le pas d'intégration est choisi en fonction des accélérations du corps le plus rapide: Mercure impose un pas 50 fois plus petit que Jupiter. De plus, ajouter les 4 planètes inférieures entraîne une multiplication du volume des calculs par un facteur compris entre 2 et 4 selon la méthode utilisée (voir Applegate et al., 1986). Finalement, passer du système des planètes extérieures au système planétaire complet demande un temps d'ordinateur 100 à 200 fois plus grand. Par ailleurs, les solutions numériques atteignent une très grande précision mais on rencontre une difficulté à retrouver la forme analytique de chaque terme périodique.

Malgré cela, ce sont ces intégrations numériques qui, actuellement, donnent la meilleure détermination des fréquences liées aux planètes extérieures.

3.2. Les solutions analytiques

Ces solutions étaient les seules possibles jusqu'à une époque récente. Les premiers résultats ont été obtenus avec les solutions de Lagrange-Laplace qui ne conservent que les termes d'ordre 1 par rapport aux masses et de degré 1 par rapport aux variables non singulières k, h et q, p.

Parmi les travaux qui ont suivi, notons ceux de Hill (1889, 1897) qui concernent le problème plan Soleil-Jupiter-Saturne. A partir des solutions à variations séculaires de Le Verrier, Hill a construit une fonction perturbatrice moyennée tenant compte de termes développés jusqu'au deuxième ordre des masses et du sixième degré en excentricité provenant en particulier de la grande inégalité entre Jupiter et Saturne: $2\lambda_5 - 5\lambda_6$. Certains termes de cette fonction perturbatrice moyennée ont été déterminés par Hill de manière empirique. Par dérivation dans les équations de Lagrange, puis par intégration, il obtient pour le système $k-h$ une solution au deuxième ordre des masses et du cinquième degré en excentricité.

Brouwer et van Woerkom (1950) ont repris le travail de Hill et y ont superposé une solution de Lagrange-Laplace (ordre 1 des masses et degré 1 en excentricité) pour le système $k-h$ des 8 planètes. Pour les inclinaisons, leur solution est une solution classique de Lagrange-Laplace (ordre 1, degré 1).

La solution d'Anolik et al. (1969) considère l'ensemble des huit planètes. Elle prend en compte tous les termes d'ordre 1 par rapport aux masses et de degrés 1 et 3 en excentricités-inclinaisons. Ils n'ont donc pas introduit l'effet des termes à courtes périodes sur les longues périodes au deuxième ordre des masses.

La solution de Bretagnon (1974) est une théorie à longues périodes de l'ensemble des huit planètes développée jusqu'au deuxième ordre des masses et au degré 3 des excentricités-inclinaisons. La comparaison faite par Applegate et al. (1986) entre leur solution pour les planètes extérieures et cette dernière solution montre qu'elle améliore, par rapport aux solutions analytiques précédentes, la détermination de presque toutes les fréquences fondamentales. Toutefois la valeur de g_6 est erronée de 14%. Ceci provient essentiellement de l'absence des termes de degré 5 en excentricités-inclinaisons. Comme on le verra plus loin, l'absence des termes du troisième ordre par rapport aux masses contribue également à l'erreur pour plus de 1%.

Duriez (1979) a construit une théorie générale en développant sa solution à un ordre plus élevé des masses que les solutions précédentes. Il a limité son étude aux quatre grosses planètes en raison des moyens informatiques dont il disposait. Pour le système qu'il a considéré, il a construit une solution développée jusqu'à l'ordre 2 des masses et au degré 7 des excentricités-inclinaisons. Il a de plus apporté des compléments d'ordre 3 par rapport aux masses ce qui lui a permis d'obtenir la meilleure détermination analytique des fréquences fondamentales liées aux grosses planètes. Il estime leur précision meilleure que 0″,1/an, ce qui est largement confirmé par les intégrations numériques d'Applegate et al. (1986) et de Milani et al. (1987). Outre les termes à longues périodes, sa solution donne les développements analytiques des termes à courtes périodes c'est-à-dire contenant explicitement les longitudes moyennes des planètes. Enfin, son étude clarifie complètement le problème des variations séculaires des demi-grands axes et du théorème de Poisson.

Jusqu'à présent toutes les théories générales considéraient un ensemble de N points matériels dans le cadre de la mécanique newtonienne. Le système de Jupiter et de ses satellites, celui de Saturne, le système Terre-Lune étaient donc considérés comme ponctuels. Bretagnon (1984a) introduit les effets dus à la relativité qui modifient les fréquences fondamentales de manière importante, surtout celles liées aux planètes inférieures. La fréquence g_1, par exemple, est modifiée de 8% passant de 5″,199/an à 5″,614/an. Considérer le système Terre-Lune réel entraîne des modifications des fréquences du système en excentricités dont la plus importante est 0″,030/an sur $g_2 = 7″,456$/an. L'effet des satellites de Jupiter a été calculé dans Bretagnon (1984b). Il crée une avance du périhélie de Jupiter qui atteint 1° au bout de 100 millions d'années. Titan crée une avance du périhélie de Saturne de 0,14° au bout de la même période.

Laskar (1988) a repris et étendu le travail de Duriez aux huit planètes. Il limite strictement les développements au deuxième ordre des masses et met en évidence que l'absence de troisième ordre introduit une erreur de 1% dans la fréquence g_6 ce qui réduit l'intervalle de validité d'une telle solution à un million d'années pour le système des grosses planètes.

Cet effet important des perturbations d'ordre élevé par rapport aux masses dans le cas des grosses planètes est montré également dans Bretagnon (1987). Dans le cadre des théories à variations séculaires, on montre que le terme séculaire des variables k et h de Saturne est modifié de 1% au troisième ordre et encore de 0,15% aux ordres 4 et suivants.

L'amélioration des théories générales existantes nécessite donc le calcul des perturbations d'ordre élevé des masses. C'est pourquoi nous nous proposons de construire une théorie générale de l'ensemble des planètes en procédant par itération et d'obtenir ainsi une solution qui n'est plus, en principe, limitée en ordre par rapport aux masses. Cette méthode, qui entraîne des calculs très lourds, est en effet tout à fait envisageable, les progrès des ordinateurs permettant maintenant de manipuler des séries de Fourier très volumineuses.

4. Équations du mouvement des planètes

Nous considérons l'ensemble des huit planètes de Mercure à Neptune. Nous ne tiendrons compte de Pluton que pour déterminer son influence sur les fréquences fondamentales du système de Lagrange-Laplace. Nous calculons les seconds membres des équations de Lagrange en tenant compte de tous les termes correspondant aux forces newtoniennes, la limitation du nombre de termes n'obéissant qu'à un critère numérique de précision. Nous introduisons également les termes relativistes de Schwarzschild, en coordonnées isotropiques, issus du champ de gravitation du Soleil. Enfin nous considérons le système Terre-Lune comme deux points matériels distincts pour le calcul des forces perturbatrices mais c'est bien évidemment le mouvement du barycentre Terre-Lune que nous cherchons à déterminer.

Les perturbations newtoniennes sont définies pour un couple de planètes par la fonction perturbatrice R:

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\boldsymbol{V}\boldsymbol{V'}}{r'^3}\right) \tag{3}$$

où $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V'}$ représentent les vecteurs de position de la planète considérée P et de la planète perturbatrice P' respectivement; r' représente le rayon vecteur de la planète P', m' sa masse; Δ est la distance des deux planètes et f la constante de la gravitation.

Les équations de Lagrange sont construites à l'aide du formulaire fermé exprimé en fonction des longitudes vraies et développé par Chapront et al. (1975). La forme utilisée ici est celle décrite dans Bretagnon (1981).

Nous les avons complétées par des corrections relativistes et par les perturbations dues à la Lune.

Les corrections relativistes sont exprimées en coordonnées isotropiques. Elles ont été calculées à partir de Brumberg (1972) et ont la forme:

$$\frac{\mathrm{d}\delta a_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = \mu\,\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{na^2}{r^2}\,(k\sin w - h\cos w)\left(10\,\frac{a}{r} - 3\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\delta\lambda_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = {} & \mu\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{na}{r^2}\left[-10\,(1-e^2)\,\frac{a^2}{r^2} - (1-e^2)\,\frac{a}{r} + 18\,\frac{a}{r} - 7\right] \\ & + \mu\,\frac{na}{r^2}\left[8\,(1-e^2)\,\frac{a}{r} - 20 + 6\,\frac{r}{a}\right]\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\delta k_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = {} & \mu\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{na}{r^2}\,[10k\sin w\cos w - 5h\cos^2 w + 5h\sin^2 w \\ & + 3\,(1+e^2)\sin w + 4\,(k^2-h^2)\sin w - 8hk\cos w - 3h]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\delta h_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = {} & -\mu\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{na}{r^2}\,[5k\cos^2 w - 5k\sin^2 w + 10h\sin w\cos w \\ & + 3\,(1+e^2)\cos w - 4\,(k^2-h^2)\cos w - 8hk\sin w - 3k]\end{aligned}$$

où μ est le rayon gravitationnel du Soleil et où $e^2 = k^2 + h^2$.

Les perturbations dues à la Lune sont données par les expressions simplifiées calculées dans Bretagnon (1984b). Elles n'interviennent que dans les équations des variables k et h de la Terre:

$$\frac{\mathrm{d}\delta k_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{4} n_{\mathrm{T}} \left(\frac{a_{\mathrm{L}}}{a_{\mathrm{T}}}\right)^2 \frac{\beta}{1+\beta} \frac{1}{1+\beta} h$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta h_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{4} n_{\mathrm{T}} \left(\frac{a_{\mathrm{L}}}{a_{\mathrm{T}}}\right)^2 \frac{\beta}{1+\beta} \frac{1}{1+\beta} k \tag{5}$$

où a_{L} et a_{T} sont les demi-grands axes de la Lune et du barycentre Terre-Lune respectivement; n_{T} est le moyen mouvement de la Terre.

5. Solution de Lagrange-Laplace

Dans la solution de Lagrange-Laplace, le demi-grand axe est constant, la longitude moyenne est une fonction linéaire du temps. Les quatre autres éléments k, h, q, p sont obtenus par intégration des équations de Lagrange dans lesquelles on n'a retenu que les termes indépendants des longitudes moyennes et de degré 1 en excentricité et en inclinaison.

De la formule (3) donnant la fonction perturbatrice de la planète P par la planète P', on ne garde donc que les termes ne dépendant pas explicitement du temps:

$$\langle R\rangle = fm' \left\langle\frac{1}{\Delta}\right\rangle = n^2 a^3 \frac{m'}{1+m} \left\langle\frac{1}{\Delta}\right\rangle$$

$$\langle R\rangle = n^2 \alpha a^2 \frac{m'}{1+m} \left\langle\frac{a'}{\Delta}\right\rangle \tag{6}$$

où $\alpha = \frac{a}{a'}$ est le rapport des demi-grands axes.

De même pour la planète P' perturbée par la planète P:

$$\langle R'\rangle = n'^2 a'^2 \frac{m}{1+m'} \left\langle\frac{a'}{\Delta}\right\rangle. \tag{7}$$

Pour obtenir des termes de degré 1 dans les équations de Lagrange, nous devons limiter le développement de $\left\langle\frac{a'}{\Delta}\right\rangle$ aux termes de degré 2. Ce développement, limité au degré 2, est donné dans Brouwer et Clemence (1961):

$$\left\langle\frac{a'}{\Delta}\right\rangle = \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)} - \frac{1}{4} \alpha b_{3/2}^{(2)} (kk'+hh') + \frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(1)} (k^2+h^2+k'^2+h'^2-4q^2 - 4p^2 - 4q'^2 - 4p'^2 + 8qq' + 8pp'). \tag{8}$$

Les coefficients de Laplace $b_s^{(j)}$ sont donnés par:

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)} = \frac{s(s+1)\ldots(s+j-1)}{1.2\ldots j} \alpha^j F(s, s+j, j+1, \alpha^2)$$

où F est la fonction hypergéométrique:

$$F(a,b,c,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a,j)(b,j)}{(c,j)(1,j)} x^j$$

avec:

$$(l,j) = l(l+1)\ldots(l+j-1).$$

Limitées à la partie autonome de degré 1, les équations de Lagrange se réduisent à:

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial h} \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4na^2}\frac{\partial R}{\partial p}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k} \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4na^2}\frac{\partial R}{\partial q}. \tag{9}$$

En utilisant les relations (6), (7) et (8), les équations (9) deviennent:

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -\xi\left[-\frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(2)} h' + \frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(1)} h\right] - 3\mu\frac{n}{a} h$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \xi\left[-\frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(2)} k' + \frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(1)} k\right] + 3\mu\frac{n}{a} k$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\xi\left[\frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(1)} p' - \frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(1)} p\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \xi\left[\frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(1)} q' - \frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(1)} q\right] \tag{10}$$

avec $\xi = \frac{n\alpha m'}{1+m}$ pour une planète intérieure perturbée par une planète extérieure et $\xi = \frac{n'm}{1+m'}$ dans le cas contraire. Les équations (10) pour la planète extérieure sont symétriques. La deuxième partie des équations en k et h correspond aux effets relativistes. C'est la résolution des équations (10) dans lesquelles on considère les perturbations de chaque planète par les huit autres et complétées, pour les variables k et h de la Terre par les équations (5), qui nous donne la solution de Lagrange-Laplace.

Limités au degré 1, les systèmes en excentricité et en inclinaison sont indépendants comme le montrent les équations (10). Ces systèmes se mettent donc sous la forme:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = -E\times\boldsymbol{H} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = -J\times\boldsymbol{P}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = E\times\boldsymbol{K} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = J\times\boldsymbol{Q} \tag{11}$$

où $\boldsymbol{K}$ désigne le vecteur de composantes $(k_1, k_2, \ldots, k_9)$ et de même pour les vecteurs $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}$. E et J sont les matrices d'ordre 9 des systèmes linéaires en excentricité et en inclinaison respectivement.

La détermination des valeurs propres de la matrice E nous donne les 9 fréquences fondamentales $g_j, j=1$ à 9 du système en excentricité; les valeurs propres de la matrice J nous donnent les 9 fréquences fondamentales $s_j, j=1$ à 9 du système en inclinaison. Il est bien connu que les fréquences g_j sont toutes positives, que le système en inclinaison a une valeur propre nulle et que les huit autres sont négatives. On choisira $s_5=0$.

Nous donnons les valeurs propres dans les tableaux 1 et 2. La solution complète donne les valeurs propres du système des 9 planètes en tenant compte de la Lune et des effets relativistes. Les masses utilisées sont celles recommandées par l'UAI en 1976; pour Pluton nous avons utilisé la valeur:

$$\frac{m_{\text{Soleil}}}{m_{\text{Pluton}}} = 1{,}3\ 10^8.$$

Les trois lignes suivantes du tableau 1 donnent des contributions particulières. La deuxième ligne donne la contribution de la relativité, la troisième ligne la contribution de la Lune, la quatrième ligne la contribution de Pluton. Dans le système en inclinaison, la relativité et la Lune n'interviennent pas au niveau

Tableau 1. Solution de Lagrange-Laplace du système en excentricité

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Solution complète	5,859090	7,459556	17,398552	18,052003	3,711292	22,284414	2,701372	0,633134	0,823306
Relativité	0,396006	0,079212	0,044636	0,029766	0,000508	0,000235	0,000058	0,000008	0,000004
Lune	0,001617	0,034405	0,023151	0,017982	0,000010	0	0	0	0
Pluton	0	0	0	0	0,000002	0,000002	0,000019	−0,000155	
JSUN					0,011590	0,005157	0,000978	−0,000113	
JS					0,241136	0,323980			
DE 200	−0,000014	−0,000043	− 0,000072	− 0,000087	0,000324	0,000328	−0,000297	0,000939	0,000260

Tableau 2. Solution de Lagrange-Laplace du système en inclinaison

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Solution complète	−5,200748	−6,570095	−18,745560	−17,635849	0	−25,738267	−2,903761	−0,677390	−0,823444
Pluton	0	0	0	0	0	− 0,000002	−0,000019	0,000295	
JSUN					0	− 0,008242	0,000250	0,000388	
JS					0	− 0,308434			
DE 200	0,000018	0,000035	0,000054	0,000103	0	0,000151	−0,000439	−0,000982	−0,000258

du système de Lagrange-Laplace. Les deux lignes correspondantes ne figurent donc pas dans le tableau 2. Les deux lignes suivantes des tableaux 1 et 2 correspondent à des systèmes planétaires restreints. La ligne notée JSUN donne la différence entre la solution complète et les fréquences du système formé du Soleil et des quatre planètes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune; de même la ligne notée JS pour les planètes Jupiter et Saturne. Enfin, la ligne notée DE 200 donne la différence sur les fréquences entre le système de Lagrange-Laplace calculé à l'aide des masses de l'UAI et celui calculé à l'aide des masses de l'intégration numérique DE 200 (Standish, 1982). Cette dernière ligne montre que l'incertitude sur les masses limite l'intervalle de validité des solutions des grosses planètes à quelques centaines de millions d'années.

Cette étude des fréquences en fonction du système planétaire considéré rejoint celle de Nobili et al. (1989). En particulier, l'effet des planètes inférieures obtenu par la soustraction des lignes JSUN et Pluton des tableaux 1 et 2 est pratiquement le même que celui mis en évidence à la ligne 5 − 1 de la table 1 de Nobili et al.

Nous avons déterminé les vecteurs propres $(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \ldots, \lambda_{9j})$ associés à chaque valeur propre g_j et $(\mu_{1j}, \mu_{2j}, \ldots, \mu_{9j})$ associés à chaque valeur propre s_j. Les solutions de Lagrange-Laplace s'écrivent alors pour chaque planète i:

$$
\begin{aligned}
k_i &= \sum_{j=1}^{9} \lambda_{ij} M_j \cos\psi_j \qquad & q_i &= \sum_{j=1}^{9} \mu_{ij} N_j \cos\theta_j \\
h_i &= \sum_{j=1}^{9} \lambda_{ij} M_j \sin\psi_j \qquad & p_i &= \sum_{j=1}^{9} \mu_{ij} N_i \sin\theta_j
\end{aligned}
\tag{12}
$$

où les ψ_j et les θ_j sont définis par la formule (2).

Les constantes d'intégration M_j, β_j et N_j, δ_j sont déterminées de façon que les solutions de Lagrange-Laplace coïncident, à $t = 0$ (J 2000.0), avec les éléments moyens de la solution à variations séculaires VSOP 82 (Bretagnon, 1982).

6. Construction et intégration des équations

Nous allons maintenant développer notre méthode itérative de construction et d'intégration des équations en nous plaçant toujours dans le cas d'un système de huit planètes.

6.1. Construction des seconds membres des équations de Lagrange

Afin d'atteindre des perturbations d'ordre élevé par rapport aux masses, nous construisons les seconds membres des équations de Lagrange en procédant par itération. Chaque itération est construite, à partir de la solution de l'itération précédente, à l'aide du formulaire fermé développé par Chapront et al. (1975) pour la partie newtonienne des équations et des équations (4) et (5) pour tenir compte des effets relativistes et de la Lune.

Dans la construction d'une théorie à variations séculaires, on part d'orbites képlériennes à éléments fixes: a, k, h, q, p sont donc des constantes. La longitude moyenne est une fonction linéaire du temps: $\lambda = \varepsilon_0 + nt$. Cette méthode crée dans les variables k, h, q, p des termes séculaires au premier ordre des masses puis des termes dépendant du temps à des degrés supérieurs ainsi que des termes de Poisson lors du calcul des perturbations du deuxième ordre par rapport aux masses puis des ordres supérieurs.

Ces termes séculaires proviennent du développement par rapport au temps des longues périodes de la solution de Lagrange-Laplace.

Pour éviter l'apparition de ces termes séculaires, nous avons pris pour solution de départ la solution de Lagrange-Laplace pour les variables k, h, q, p et $a = a_0$ pour le demi-grand axe, $\lambda = \varepsilon_0 + nt$ pour la longitude moyenne. Les constantes d'intégration de la solution de Lagrange-Laplace ont été déterminées de façon que cette solution coïncide en J 2000.0 avec les éléments moyens k_0, h_0, q_0 et p_0 de la solution VSOP 82 (Bretagnon, 1982).

Considérant le mouvement de huit planètes autour du Soleil, nous calculons donc, à l'aide du résultat de l'itération précédente, les 48 seconds membres complets des équations de Lagrange, la seule limitation étant une limitation numérique de précision.

Les équations en a et λ sont intégrées terme à terme directement par rapport au temps. Les 16 équations du système $k-h$ sont intégrées globalement, de même pour les 16 équations du système $q-p$.

La méthode d'intégration est décrite pour le système $k-h$ et s'apparente à la méthode de Krilov-Bogolioubov (Bogolioubov, Mitropolski, 1962), celle du système $q-p$ ne présente pas de différences fondamentales.

6.2. *Intégration des équations en k, h, q, p*

Considérons la solution de l'itération n et regroupons ses termes en 3 catégories: la première formée des termes de la solution de Lagrange-Laplace, la deuxième composée de termes de même forme mais de degré supérieur ou égal à 3 en excentricité-inclinaison, la troisième contenant tous les autres termes. Pour la $i^{\text{ème}}$ planète, cette solution a alors la forme:

$$\begin{aligned} k_i^n &= \sum_{k=1}^{8} \lambda_{ik} M_k \cos\psi_k + \sum_{k=1}^{8} M_{i,\psi_k}^n \cos\psi_k + \sum_{\Phi} \varepsilon_\Phi M_{i,\Phi}^n \cos\Phi \\ h_i^n &= \sum_{k=1}^{8} \lambda_{ik} M_k \sin\psi_k + \sum_{k=1}^{8} M_{i,\psi_k}^n \sin\psi_k + \sum_{\Phi} M_{i,\Phi}^n \sin\Phi \end{aligned} \tag{13}$$

avec

$$\frac{d\psi_k}{dt} = g_k^n \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_k}{dt} = s_k^n .$$

Dans ces équations la somme $\sum_\Phi$ est étendue à tous les arguments autres que ceux de la solution de Lagrange-Laplace. L'argument Φ est défini par la formule (1):

$$\Phi = \sum_{j=1}^{8} r_j \lambda_j + \sum_{j=1}^{8} l_j \psi_j + \sum_{j=1}^{8} m_j \theta_j$$

ε_Φ est défini par:

$$\varepsilon_\Phi = \text{signe}\left(\sum_{j=1}^{8} r_j + \sum_{j=1}^{8} l_j + \sum_{j=1}^{8} m_j\right). \tag{14}$$

La solution de l'itération n comprend également des expressions analogues à (13) pour les variables q_i et p_i et les expressions des variables a_i et λ_i.

Substituons cette solution dans les seconds membres complets des équations de Lagrange. Nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{dk_i}{dt} &= -\sum_{k=1}^{8} x_{i,\psi_k}^{n+1} \sin\psi_k - \sum_{\Phi} \varepsilon_\Phi x_{i,\Phi}^{n+1} \sin\Phi \\ \frac{dh_i}{dt} &= \sum_{k=1}^{8} x_{i,\psi_k}^{n+1} \cos\psi_k + \sum_{\Phi} x_{i,\Phi}^{n+1} \cos\Phi \end{aligned} \tag{15}$$

la sommation $\sum_\Phi$ ayant le même sens que précédemment.

On fait apparaître la partie de degré 1 qui donne la solution de Lagrange-Laplace sous la forme (11). Les équations (15) peuvent alors s'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{dk_i}{dt} &= -\sum_{k=1}^{8} E_{ik} h_k^n \\ &\quad - \sum_{k=1}^{8} \left(x_{i,\psi_k}^{n+1} - \sum_{l=1}^{8} E_{il} \lambda_{lk} M_k - \sum_{l=1}^{8} E_{il} M_{l,\psi_k}^n \right) \sin\psi_k \\ &\quad - \sum_{\Phi} \left(x_{i,\Phi}^{n+1} - \varepsilon_\Phi \sum_{l=1}^{8} E_{il} M_{l,\Phi}^n \right) \varepsilon_\Phi \sin\Phi \\ \frac{dh_i}{dt} &= \sum_{k=1}^{8} E_{ik} k_k^n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{8} \left(x_{i,\psi_k}^{n+1} - \sum_{l=1}^{8} E_{il} \lambda_{lk} M_k - \sum_{l=1}^{8} E_{il} M_{l,\psi_k}^n \right) \cos\psi_k \\ &\quad + \sum_{\Phi} \left(x_{i,\Phi}^{n+1} - \varepsilon_\Phi \sum_{l=1}^{8} E_{il} M_{l,\Phi}^n \right) \cos\Phi . \end{aligned} \tag{16}$$

La méthode consiste maintenant à chercher une solution, à l'itération $n+1$, de la forme:

$$\begin{aligned} k_i^{n+1} &= \sum_{k=1}^{8} \lambda_{ik} M_k \cos\psi_k + \sum_{k=1}^{8} M_{i,\psi_k}'^{n+1} \cos\psi_k + \sum_{\Phi} M_{i,\Phi}'^{n+1} \cos\Phi \\ h_i^{n+1} &= \sum_{k=1}^{8} \lambda_{ik} M_k \sin\psi_k + \sum_{k=1}^{8} M_{i,\psi_k}^{n+1} \sin\psi_k + \sum_{\Phi} M_{i,\Phi}^{n+1} \sin\Phi \end{aligned} \tag{17}$$

avec:

$$\frac{d\psi_k}{dt} = g_k^{n+1}; \qquad \frac{d\theta_k}{dt} = s_k^{n+1} . \tag{18}$$

Dans la solution (17) la sommation $\sum_\Phi$ est la même que celle trouvée dans les seconds membres des équations (15).

Par dérivation de (17) et compte tenu de (18), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{dk_i^{n+1}}{dt} &= -\sum_{k=1}^{8} \lambda_{ik} M_k g_k^{n+1} \sin\psi_k - \sum_{k=1}^{8} M_{i,\psi_k}'^{n+1} g_k^{n+1} \sin\psi_k \\ &\quad - \sum_{\Phi} M_{i,\Phi}'^{n+1} \frac{d\Phi}{dt} \sin\Phi \\ \frac{dh_i^{n+1}}{dt} &= \sum_{k=1}^{8} \lambda_{ik} M_k g_k^{n+1} \cos\psi_k + \sum_{k=1}^{8} M_{i,\psi_k}^{n+1} g_k^{n+1} \cos\psi_k \\ &\quad + \sum_{\Phi} M_{i,\Phi}^{n+1} \frac{d\Phi}{dt} \cos\Phi . \end{aligned} \tag{19}$$

Par ailleurs, on substitue la solution (17) dans les seconds membres des équations (16):

$$\begin{aligned} \frac{dk_i^{n+1}}{dt} &= -\sum_{m=1}^{8} E_{im} \left[\sum_{k=1}^{8} \lambda_{mk} M_k \sin\psi_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{8} M_{m,\psi_k}^{n+1} \sin\psi_k + \sum_{\Phi} M_{m,\Phi}^{n+1} \sin\Phi \right] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{8} \left(x_{i,\psi_k}^{n+1} - \sum_{l=1}^{8} E_{il} \lambda_{lk} M_k - \sum_{l=1}^{8} E_{il} M_{l,\psi_k}^n \right) \sin\psi_k \\ &\quad - \sum_{\Phi} \left(x_{i,\Phi}^{n+1} - \varepsilon_\Phi \sum_{l=1}^{8} E_{il} M_{l,\Phi}^n \right) \varepsilon_\Phi \sin\Phi \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_i^{n+1}}{\mathrm{d}t} = \sum_{m=1}^{8} E_{im} \left[\sum_{k=1}^{8} \lambda_{mk} M_k \cos\psi_k + \sum_{k=1}^{8} M'^{n+1}_{m,\psi_k} \cos\psi_k + \sum_{\Phi} M'^{n+1}_{m,\Phi} \cos\Phi \right] + \sum_{k=1}^{8} \left(x^{n+1}_{i,\psi_k} - \sum_{l=1}^{8} E_{il} \lambda_{lk} M_k - \sum_{l=1}^{8} E_{il} M^n_{l,\psi_k} \right) \cos\psi_k + \sum_{\Phi} \left(x^{n+1}_{i,\Phi} - \varepsilon_\Phi \sum_{l=1}^{8} E_{il} M^n_{l,\Phi} \right) \cos\Phi .$$

Dans les équations (19), M^{n+1}_{i,ψ_k}, M'^{n+1}_{i,ψ_k}, $M^{n+1}_{i,\Phi}$ et $M'^{n+1}_{i,\Phi}$ étant petits devant $\lambda_{ik} M_k$, nous remplaçons g_k^{n+1} par g_k^n dans les produits tels que $M^{n+1}_{i,\psi_k}\, g_k^{n+1}$ et nous calculons $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ à l'aide des fréquences obtenues à l'itération n.

Identifions terme à terme les équations (19) et (20).

1) Identification des termes en ψ_k:

A partir des équations $\frac{\mathrm{d}k_i^{n+1}}{\mathrm{d}t}$ de (19) et (20), on obtient:

$$\lambda_{ik} M_k\, g_k^{n+1} + M'^{n+1}_{i,\psi_k}\, g_k^n = \sum_{m=1}^{8} E_{im} \lambda_{mk} M_k + \sum_{m=1}^{8} E_{im} M^{n+1}_{m,\psi_k} + \left(x^{n+1}_{i,\psi_k} - \sum_{l=1}^{8} E_{il} \lambda_{lk} M_k - \sum_{l=1}^{8} E_{il} M^n_{l,\psi_k} \right).$$

A partir des équations $\frac{\mathrm{d}h_i^{n+1}}{\mathrm{d}t}$ de (19) et (20), on obtient:

$$\lambda_{ik} M_k\, g_k^{n+1} + M^{n+1}_{i,\psi_k}\, g_k^n = \sum_{m=1}^{8} E_{im} \lambda_{mk} M_k + \sum_{m=1}^{8} E_{im} M'^{n+1}_{m,\psi_k} + \left(x^{n+1}_{i,\psi_k} - \sum_{l=1}^{8} E_{il} \lambda_{lk} M_k - \sum_{l=1}^{8} E_{il} M^n_{l,\psi_k} \right).$$

Les deux équations se simplifient:

$$\lambda_{ik} M_k\, g_k^{n+1} + M'^{n+1}_{i,\psi_k}\, g_k^n = x^{n+1}_{i,\psi_k} + \sum_{m=1}^{8} E_{im} M^{n+1}_{m,\psi_k} - \sum_{m=1}^{8} E_{im} M^n_{m,\psi_k}$$

$$\lambda_{ik} M_k\, g_k^{n+1} + M^{n+1}_{i,\psi_k}\, g_k^n = x^{n+1}_{i,\psi_k} + \sum_{m=1}^{8} E_{im} M'^{n+1}_{m,\psi_k} - \sum_{m=1}^{8} E_{im} M^n_{m,\psi_k} . \qquad (21)$$

Par différence des 2 équations (21) on obtient:

$$(M^{n+1}_{i,\psi_k} - M'^{n+1}_{i,\psi_k})\, g_k^n = \sum_{m=1}^{8} E_{im} (M'^{n+1}_{m,\psi_k} - M^{n+1}_{m,\psi_k})$$

pour $i = 1, 2, \ldots, 8$ et quel que soit l'argument ψ_k.

Cet ensemble de 8 équations peut s'écrire:

$$((E) + (I)\, g_k^n) \cdot (\boldsymbol{M'} - \boldsymbol{M}) = 0$$

où (E) est la matrice du système linéaire en excentricité, (I) la matrice unité d'ordre 8 et $(\boldsymbol{M'} - \boldsymbol{M})$ le vecteur colonne d'éléments $M'^{n+1}_{m,\psi_k} - M^{n+1}_{m,\psi_k}$. Le déterminant de $((E) + (I)\, g_k^n)$ est différent de zéro car $-g_k^n$ ne peut être égal à l'une des valeurs propres g_k^0 de la matrice (E). Les valeurs propres g_k^0 et les fréquences g_k^n sont toutes, en effet, positives. Le vecteur $(\boldsymbol{M'} - \boldsymbol{M})$ est donc nul, c'est-à-dire:

$$M'^{n+1}_{m,\psi_k} = M^{n+1}_{m,\psi_k}$$

quels que soient m et ψ_k. Les équations (21) sont donc identiques 2 à 2 et se réduisent à un système de 8 équations à 9 inconnues: g_k^{n+1} et M^{n+1}_{m,ψ_k}, $m = 1, 2, \ldots, 8$.

Ce système s'écrit:

$$((E) - (I)\, g_k^n) \cdot \boldsymbol{M}^{n+1}_{\psi_k} - M_k\, g_k^{n+1} \boldsymbol{\Lambda}_k = -\boldsymbol{x}^{n+1}_{\psi_k} + (E) \cdot \boldsymbol{M}^n_{\psi_k} \qquad (22)$$

les vecteurs colonnes étant définis par:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^r_{\psi_k} &= (M^r_{i,\psi_k};\ i = 1, 2, \ldots, 8) \\ \boldsymbol{\Lambda}_k &= (\lambda_{ik};\quad i = 1, 2, \ldots, 8) \\ \boldsymbol{x}^{n+1}_{\psi_k} &= (x^{n+1}_{i,\psi_k};\ i = 1, 2, \ldots, 8) . \end{aligned} \qquad (23)$$

On pose alors arbitrairement $M^{n+1}_{k,\psi_k} = 0$ ce qui permet de résoudre le système (22) et d'obtenir g_k^{n+1} et M^{n+1}_{i,ψ_k}, $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Remarque sur le choix arbitraire de M^{n+1}_{k,ψ_k}.

Lors du calcul de la première itération, $\boldsymbol{M}^0_{\psi_k}$ est nul et l'expression (22) s'écrit:

$$((E) - (I)\, g_k^0) \cdot \boldsymbol{M}^1_{\psi_k} - M_k\, g_k^1\, \boldsymbol{\Lambda}_k = -\boldsymbol{x}^1_{\psi_k} .$$

Le déterminant de $((E) - (I)\, g_k^0)$ est nul par définition des valeurs propres g_k^0. Si donc on choisit M^1_{k,ψ_k} arbitraire non nul, le vecteur $\boldsymbol{M}^1_{\psi_k}$ (notation 23) sera modifié de:

$$\frac{1}{\lambda_{kk}} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_k \cdot M^1_{k,\psi_k} .$$

Dans la solution, le facteur $\boldsymbol{\Lambda}_k \cdot M_k + \boldsymbol{M}^1_{\psi_k}$ de $\cos\psi_k$ ou de $\sin\psi_k$ deviendra:

$$\boldsymbol{\Lambda}_k \left(\tilde{M}_k + \frac{1}{\lambda_{kk}} M^1_{k,\psi_k} \right) + \boldsymbol{M}^1_{\psi_k}$$

où $\tilde{M}_k$ sera la nouvelle constante d'intégration.

L'ajustement aux conditions initiales imposera donc:

$$\tilde{M}_k + \frac{1}{\lambda_{kk}} M^1_{k,\psi_k} = M_k .$$

Lors de la première itération le choix de M^1_{k,ψ_k} est donc indifférent, ce qui justifie de prendre $M^1_{k,\psi_k} = 0$. Lors des itérations suivantes le déterminant de $((E) - (I)\, g_k^n)$ n'est plus nul et prendre $M^{n+1}_{k,\psi_k} = 0$ est un arbitraire de la méthode.

Plaçons-nous maintenant dans le cas de la convergence formelle. On a alors:

$$M^{n+1}_{i,\psi_k} \to M_{i,\psi_k} .$$

Les équations (22) deviennent:

$$g_k^n M_{i,\psi_k} + \lambda_{ik} M_k\, g_k^{n+1} = x^{n+1}_{i,\psi_k} . \qquad (24)$$

Supposons M_{k,ψ_k} arbitraire non nul. La $k^{\text{ième}}$ équation de (24) donne alors:

$$g_k^{n+1} = \frac{1}{\lambda_{kk} M_k} (x^{n+1}_{k,\psi_k} - g_k^n\, M_{k,\psi_k}) . \qquad (25)$$

A l'aide de (25), on tire de la $i^{\text{ème}}$ équation (24) $(i \neq k)$:

$$M_{i,\psi_k} = \frac{\lambda_{kk}\, x^{n+1}_{i,\psi_k} - \lambda_{ik}\, x^{n+1}_{k,\psi_k}}{\lambda_{kk}\, g_k^n} + \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{kk}} M_{k,\psi_k} .$$

On voit donc que, comme dans la première itération, la contribution de M_{k,ψ_k} à la solution complète est un vecteur colinéaire à Λ_k et est absorbée dans la constante d'intégration. La convergence formelle justifie donc de choisir à chaque itération:

$$M^{n+1}_{k,\psi_k}=0\,.$$

Notons enfin que si $g^{n+1}_k=g^n_k$ l'équation (24) peut s'écrire:

$$\lambda_{ik}M_k+M_{i,\psi_k}=\frac{x^{n+1}_{i,\psi_k}}{g^{n+1}_k} \tag{26}$$

ce qui signifie que l'amplitude $\lambda_{ik}M_k+M_{i,\psi_k}$ de l'argument ψ_k est obtenue par simple intégration de x^{n+1}_{i,ψ_k} par rapport au temps.

2) Identification des termes en Φ:

A partir des équations $\frac{\mathrm{d}k^{n+1}_i}{\mathrm{d}t}$ de (19) et (20) on obtient:

$$M'^{n+1}_{i,\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\sum_{m=1}^{8}E_{im}M^{n+1}_{m,\Phi}+\varepsilon_\Phi x^{n+1}_{i,\Phi}-\sum_{l=1}^{8}E_{il}M^n_{l,\Phi}\,. \tag{27a}$$

A partir des équations $\frac{\mathrm{d}h^{n+1}_i}{\mathrm{d}t}$ de (19) et (20) on obtient:

$$M^{n+1}_{i,\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\sum_{m=1}^{8}E_{im}M'^{n+1}_{m,\Phi}+x'^{n+1}_{i,\Phi}-\varepsilon_\Phi\sum_{l=1}^{8}E_{il}M'^n_{l,\Phi}\,. \tag{27b}$$

Par différence des 2 équations (27), la deuxième étant multipliée par ε_Φ, on obtient:

$$\left(\sum_{m=1}^{8}E_{im}+\varepsilon_\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right)(\varepsilon_\Phi M'^{n+1}_{m,\Phi}-M^{n+1}_{m,\Phi})=0\,.$$

Cet ensemble de 8 équations peut s'écrire:

$$\left((E)+(I)\,\varepsilon_\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right)(\varepsilon_\Phi \boldsymbol{M}'^{n+1}_\Phi-\boldsymbol{M}^{n+1}_\Phi)=0\,.$$

Le déterminant de $\left((E)+(I)\,\varepsilon_\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right)$ est différent de 0 si $-\varepsilon_\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ est différent d'une valeur propre g^0_i de la matrice (E).

Dans ce cas:

$$M'^{n+1}_{m,\Phi}=\varepsilon_\Phi\,M^{n+1}_{m,\Phi}\,. \tag{28}$$

Si le déterminant est nul, cette relation n'est plus forcément vraie et il faut considérer l'ensemble des 16 équations (27a) et (27b) à 16 inconnues $M^{n+1}_{m,\Phi}$ et $M'^{n+1}_{m,\Phi}$. Dans l'application au couple Jupiter-Saturne nous n'avons pas rencontré de cas de déterminant nul. Nous supposerons ici la relation (28) vérifiée. Les équations (27) sont alors identiques 2 à 2 et se réduisent à un système de 8 équations à 8 inconnues: $M^{n+1}_{m,\Phi}$, $m=1,2,\ldots,8$. Ce système s'écrit:

$$\sum_{m=1}^{8}E_{im}M^{n+1}_{m,\Phi}-\varepsilon_\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}M^{n+1}_{i,\Phi}=-\varepsilon_\Phi x_{i,\Phi}+\sum_{m=1}^{8}E_{im}M^n_{m,\Phi}\,. \tag{29}$$

Ce système a une solution si $\varepsilon_\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ n'est pas égal à l'une des valeurs propres g^0_i de la matrice (E). Dans le cas contraire on a une résonance stricte, ce qui ne s'est pas produit dans l'étude Jupiter-Saturne. Notons que si l'on obtient la convergence formelle des solutions, $M^{n+1}_{m,\Phi}\to M^n_{m,\Phi}$ et le système (29) se réduit à:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}M^{n+1}_{i,\Phi}=x_{i,\Phi} \tag{30}$$

ce qui signifie que les $M_{i,\Phi}$ sont obtenus par simple intégration de $x_{i,\Phi}$ par rapport au temps.

6.3. *Détermination des constantes d'intégration*

A la fin de chaque itération, les 16 constantes d'intégration (M_i,β_i), $i=1,2,\ldots,8$ sont déterminées de façon que l'ensemble de la partie à longue période de la solution coïncide à $t=0$ avec les 16 constantes, k_0, h_0 pour les huit planètes, de la solution VSOP82.

Rappelons que la résolution du système en inclinaison s'intègre de la même façon que celui en excentricité. Les symétries des équations font que la fréquence s_5 reste nulle dans la solution complète.

7. Application au couple Jupiter-Saturne

A partir des méthodes d'intégration développées plus haut, nous avons cherché à construire une théorie générale du couple Jupiter-Saturne de différentes manières.

Nous avons vu par les équations (25) et (26) que, s'il y a convergence formelle, l'amplitude du terme en ψ_k de la planète k était donnée par:

$$\lambda_{kk}M_k=\frac{x^{n+1}_{k,\psi_k}}{g^{n+1}_k}$$

et que l'amplitude du terme en ψ_k de la planete $i\neq k$ était donnée par:

$$\lambda_{ik}M_k+M^{n+1}_{i,\psi_k}=\frac{x^{n+1}_{i,\psi_k}}{g^{n+1}_k}\,.$$

Autrement dit, si la solution converge, les amplitudes peuvent être obtenues par intégration directe par rapport au temps pour les arguments de base de la solution de Lagrange-Laplace.

On voit qu'il en est de même pour les autres arguments par l'équation (30) que l'on peut écrire:

$$M^{n+1}_{i,\Phi}=\frac{x_{i,\Phi}}{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}\,.$$

En fait, la solution de Lagrange-Laplace n'est pas une assez bonne approximation de la solution et le processus itératif utilisant l'intégration directe par rapport au temps ne converge pas.

Nous avons ensuite choisi de construire les solutions en intégrant les arguments de la solution de Lagrange par la résolution des équations (22) et en intégrant les autres arguments directement par rapport au temps. Cette méthode a semblé donner des résultats satisfaisants. Nous avons trouvé pour la partie à longue période des variables k et q de Saturne, par exemple:

$$\begin{aligned}10^5\times k_S=\;&208{,}693\,\cos(\psi_5-2\psi_6)-17{,}531\,\cos(2\psi_5-\psi_6)\\&+10{,}802\,\cos(2\psi_5-3\psi_6)-2{,}323\,\cos(\psi_6-2\theta_6)\\&+0{,}542\,\cos(3\psi_5-4\psi_6)+0{,}481\,\cos(3\psi_6-2\theta_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10^5\times q_S=\;&3{,}572\,\cos(2\psi_6-\theta_6)-2{,}032\,\cos(\psi_5+\psi_6-\theta_6)\\&+1{,}558\,\cos(2\psi_5-\theta_6)+0{,}475\,\cos(\psi_5-3\psi_6+\theta_6)\\&-0{,}924\,\cos(\psi_5-\psi_6+\theta_6)\\&+0{,}062\,\cos(2\psi_5-4\psi_6+\theta_6)\,.\end{aligned}$$

Ces amplitudes ont bien convergé et leur incertitude ne dépasse pas quelques 10^{-6} mais, en augmentant la précision au cours des itérations suivantes, des arguments non convergents sont apparus. On trouve, par exemple, dans les seconds membres des équations de Lagrange pour les variables q et p de Jupiter et Saturne l'argument $\Phi = \psi_5 - \psi_6 - \theta_6$ de période 626000 ans:

$$\frac{dq_J}{dt} = -6{,}704\ 10^{-10} \sin \Phi \qquad \frac{dq_S}{dt} = 15{,}992\ 10^{-10} \sin \Phi$$

$$\frac{dp_J}{dt} = -6{,}704\ 10^{-10} \cos \Phi \qquad \frac{dp_S}{dt} = 15{,}992\ 10^{-10} \cos \Phi .$$

L'intégration directe par rapport au temps donne:

$$\begin{aligned} \Delta q_J &= 6{,}679\ 10^{-5} \cos \Phi \qquad & \Delta q_S &= -15{,}933\ 10^{-5} \cos \Phi \\ \Delta p_J &= -6{,}679\ 10^{-5} \sin \Phi \qquad & \Delta p_S &= 15{,}933\ 10^{-5} \sin \Phi . \end{aligned} \tag{31}$$

En repartant de cette solution pour cet argument, il n'y a pas convergence.

Finalement, nous avons intégré les arguments à longue période par résolution du système (29) en ne conservant l'intégration directe terme à terme par rapport au temps que pour les termes à courte période, c'est-à-dire dépendant explicitement des longitudes moyennes.

L'intégration de l'argument $\Phi = \psi_5 - \psi_6 - \theta_6$, par résolution du système (29), donne au cours des itérations les amplitudes suivantes:

Itération	Δq_J ($\times 10^{-5}$)	Δq_S ($\times 10^{-5}$)
n	$-0{,}423$	1,581
$n+1$	$-0{,}417$	1,502
$n+2$	$-0{,}253$	1,658
$n+3$	$-0{,}287$	1,636
$n+4$	$-0{,}279$	1,648
$n+5$	$-0{,}283$	1,646

On constate sur cet exemple que le résultat est très éloigné de ce que donne l'intégration directe (31). On constate également que, pour cet argument, la méthode converge mais converge très lentement. Finalement, une fois le bon mode d'intégration choisi, la seule difficulté, pour cet argument, vient de la précision du résultat due à la faible valeur de l'amplitude avant intégration: $1{,}63\ 10^{-10}$ pour Saturne alors que les seconds membres des équations ont été calculés, lors des dernières itérations, à $0{,}04\ 10^{-10}$. Par contre, le petit diviseur de cet argument n'a pas posé de problème. En effet, lors des premières itérations effectuées à une faible précision, cet argument n'est pas apparu. Sa première détermination a été obtenue alors que les fréquences étaient déjà voisines des valeurs finales. Il n'en sera bien sûr pas de même lorsqu'on abordera le problème des quatre planètes extérieures ou de l'ensemble du système solaire. Les diviseurs seront alors des combinaisons linéaires de 8 ou de 16 fréquences à longue période et non plus des seules fréquences g_5, g_6, s_5 et s_6. La probabilité de trouver des très petits diviseurs pouvant même changer de signe au cours des itérations sera alors grande.

Pour revenir au couple Jupiter-Saturne, les résultats provisoires que nous avons montrent, malgré les difficultés de convergence rencontrées, une stabilité assez grande d'itération en itération dans la détermination des fréquences. Nous trouvons dans l'étude du couple Jupiter-Saturne:

$$\begin{aligned} g_5 &= (4{,}0275 \pm 0{,}0010)''/\text{an} \\ g_6 &= (27{,}9940 \pm 0{,}0040)''/\text{an} \\ s_6 &= (-26{,}0362 \pm 0{,}0004)''/\text{an} \end{aligned}$$

On peut déterminer les fréquences correspondant au système planétaire complet à l'aide de la ligne notée JS dans les tableaux 1 et 2. Par ailleurs, Duriez (1979) a montré que les contributions aux fréquences fondamentales des termes de degré 3, 5, 7 en excentricité-inclinaison étaient moins importantes dans l'étude des quatre grosses planètes que dans l'étude du couple Jupiter-Saturne. Nous en déduisons une estimation des fréquences g_5, g_6 et s_6 pour le système complet:

$$\begin{aligned} g_5 &= (4{,}2400 \pm 0{,}0100)''/\text{an} \\ g_6 &= (28{,}2490 \pm 0{,}0170)''/\text{an} \\ s_6 &= (-26{,}3445 \pm 0{,}0005)''/\text{an} \end{aligned}$$

A cette précision, ces résultats sont en accord avec ceux d'Applegate et al. (1986) et de Nobili et al. (1989) pour g_5 et g_6. Notre valeur de s_6 est très voisine de celle de Nobili ($s_6 = -26{,}34496$) mais légèrement différente de celle d'Applegate ($s_6 = -26{,}3324$).

8. Conclusion

Afin de construire une théorie générale planétaire tenant compte des perturbations jusqu'à un ordre élevé des masses, nous avons établi une méthode itérative de construction des solutions. Nous avons testé cette méthode en l'appliquant au couple Jupiter-Saturne ce qui, après différentes tentatives, nous a permis de choisir une méthode d'intégration assurant la convergence dans le cas étudié. Les termes à longue période sont intégrés globalement par une méthode du type Krylov-Bogolioubov; les termes à courte période ne présentent pas de difficultés de convergence et sont intégrés directement par rapport au temps.

L'étude préliminaire du couple Jupiter-Saturne a été effectuée à une faible précision. Les termes à longue période voient leur amplitude grossie d'un facteur de l'ordre de 10^4 ou 10^5 lors de l'intégration ce qui exige une très haute précision dans le calcul des seconds membres des équations de Lagrange. Ceci produit des séries de Fourier très volumineuses. Nous allons donc, à partir des résultats actuels, effectuer plusieurs itérations pour le couple Jupiter-Saturne en augmentant considérablement la taille des séries représentant les solutions. Nous envisagerons par la suite l'extension de la méthode aux quatre planètes extérieures puis au système planétaire complet.

Remerciements. Je remercie vivement Monsieur J. L. Simon avec qui j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions. Je remercie également le lecteur (A. Milani) pour ses commentaires et ses suggestions, en particulier celles concernant la section 7. Les calculs ont été effectués sur les ordinateurs du *Centre Inter-Régional de Calcul Electronique* du CNRS (F-91405 Orsay).

Bibliographie

Anolik, M.V., Krassinsky, G.A., Pius, L.J.: 1969, *Trudy Inst. Theor. Astron. Leningrad* **14**, 3–47
Applegate, J.H., Douglas, M.R., Gursel, Y., Sussman, G.J., Wisdom, J.: 1986, *Astron. J.* **92(1)**, 176
Bogolioubov, N., Mitropolski, I.: 1962, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*, Gauthier-Villars, Paris
Bretagnon, P.: 1974, *Astron. Astrophys.* **30**, 141
Bretagnon, P.: 1981, *Astron. Astrophys.* **101**, 342

Bretagnon, P.: 1982, *Astron. Astrophys.* **114**, 278
Bretagnon, P.: 1984a, *in Milankovitch and Climate*, *Part I*, eds. A.L. Berger et al., Reidel, Dordrecht, p. 41
Bretagnon, P.: 1984b, *Celes. Mech.* **34**, 193
Bretagnon, P.: 1987, 10th *ERAM of the IAU*, ed. M. Sidlichovsky, Vol. **3**, 89
Brouwer, D., van Woerkom, A.J.J.: 1950, *APAE* **XIII**, 2
Brouwer, D., Clemence, G.M.: 1961, *Celestial Mechanics*, Academic Press, New York
Brumberg, V.A.: 1972, *Mécanique céleste relativiste*, Nauka, Moscou
Chapront, J., Bretagnon, P., Mehl, M.: 1975, *Celes. Mech.* **11**, 379
Cohen, C.J., Hubbard, E.C., Oesterwinter, C.: 1973, *APAE* **XXII**, 1
Duriez, L.: 1979, *Approche d'une Théorie Générale Planétaire en variables elliptiques héliocentriques*, Thèse, Lille
Hill, G.W.: 1889, *Astron. J.* **9**, 89
Hill, G.W.: 1897, *Astron. J.* **17**, 81
Kinoshita, H., Nakai, H.: 1984, *Celes. Mech.* **34**, 203
Laskar, J.: 1988, *Astron. Astrophys.* **198**, 341
Milani, A., Nobili, A.M., Carpino, M.: 1987, *Astron. Astrophys.* **172**, 265
Nobili, A.M., Milani, A., Carpino, M.: 1989, *Astron. Astrophys.* **210**, 313
Simon, J.L.: 1983, *Astron. Astrophys.* **120**, 197
Standish, E.M.: 1982, *Astron. Astrophys.* **114**, 297