A TREATISE BY TOMMASO NARDUCCI (1679-1766) ON THE COMPARISON BETWEEN LEIBNITZ' DIFFERENTIAL CALCULUS AND NEWTON'S FLUXION CALCULUS

by

Gino Arrighi, Lucca.

Comparisons between and judgments of the two different approaches to infinitesimal calculus, Leibnitz' differential calculus and Newton's fluxion calculus, took place even in provinces devoid of universities, and became the object of various writings.

Tommaso (Tomaso as he wrote it) Narducci (1679-1766)[(1)] was for many years in contact with the Camaldese mathematician Guido Grandi, both as friend and fellow scholar. He dedicated his time to scientific studies in various fields and had a profound knowledge of Newton's scientific works, of which he was the author of the first integral translation into Italian, without going into the question of priority. His manuscripts, few of which were ever published, are to be found among the papers in the Archives of the Nobles in the State Archives in Lucca[(2)].

On p. 137 of file 48, indicated on the cover with the words "Narducci Tommaso. Opere. Tomo X.", we find the first part of a treatise beginning with the words: *"Il calcolo differenziale e integrale di Gottifredo Guglielmo Leibnitz paragonato col calcolo delle flussioni del Cav.re Isacco Newton / In grazia delli Studiosi della moderna Geometria / Da Tomaso Narducci Patrizio Lucchese"*. The pages of this treatise are numbered separately, beginning from no. 1 on p. 137 and ending with no. 165 on p. 304.

Given the length of the work, it is impossible to produce a sufficiently ample summary of it in a limited space; therefore, as a summary presentation I shall indicate the titles, the parts underlined and certain notes found in it; but first of all it is my intention to give the bibliography, or better, point out the works cited in it in the words used by Narducci himself.

Among the works cited, the most frequently mentioned one is "gli infinitamente piccoli del Marchese dello Spedale", which is obviously the Analyse des infiniment petits by Guillaume François Antoine de l'Hospital, marquis of Saint-Mesme, the first edition of which appeared in Paris in 1696. In second place at a distance we find "l'analisi dimostrata di Reynaud", which is the Analyse démontrée ou la Méthode de resoudre les problêmes des mathématiques by Charles Renard Reyneau, a priest of the Oratory, the first edition of which came out in Paris in 1708; this treatise must have enjoyed a certain fame if the following work, entitled La science du calcul des grandeurs en général is said to be "par l'auteur de l'Analyse demontrée". We then find the "Principi matematici del Newton", the "analisi del Newton", the "calcolo del Newton", and here I can say that the volume marked C. VI. g. 17 in the State Library of Lucca, containing the works Philosophiae naturalis principia mathematica and Analysis per quantitatum series fluxiones ac differentias etc. in the Amsterdam edition of 1723 has Narducci's coat of arms and ex libris printed on it, as well as the price paid for it. Finally, we have one mention of the "Quantità del moto dell'acque correnti", that is, La quantità del moto o sia la forza dell'acque correnti etc., a work by Narducci which came out in Lucca in 1733, and his "Sezioni coniche del Padre Abate D. Guido Grandi", that is, the Compendio delle sezioni coniche d'Apollonio con aggiunte etc., published in Florence in 1722.

Perhaps there is an unforeseen absence in this bibliography: the "questione de maximis et minimis" that appears in the title of one chapter of the work brings to mind the famous memorial that Leibnitz published in 1684 on the "Acta eruditorum" of Leipzig; but the subject is treated with specific references according to the "infinitamente piccoli" of the "Marchese dello Spedale": and in Lucca that memorial, in which Leibnitz said, among other things, "Ex cognito hoc velut Algorithmo ut ita dicam, calculi hujus, quem voco differentialem, etc."; could be read; in fact, the collection of the "Acta eruditorum" of Leipzig conserved in the State Library of Lucca came to be there because of orders concerning "conventi soppressi".

Having dealt with information of a bibliographical nature, I shall now go on to the list of titles mentioned before.

P. I - Parte I^{a} / Fondamento del calcolo differenziale secondo il Leibnizio ricavato dal Marchese dello Spedale degl'Infinitamente piccoli regola 2^{a} Parte I^{a}. La differenza di un prodotto formato da più quantità moltiplicate l'una per l'altra è equale alla somma de prodotti della differenza di ciascheduna di queste moltiplicata dalle altre.

P. 3 - Avvertimento / Si vedrà adesso che il Lemma 2° posto a p. 224 del Libbro I° de principij matematici di Monsieur Newton è lo stesso per appunto, che quello ricavato da noi dalle proposizioni 2^{a}, 3^{a}, e 4^{a}, della Sezione prima degl'infinitamente piccoli del Marchese dello Spedale.

Lemma. Il momento di una quantità generata è uguale a' momenti di ciaschedun lato generante moltiplicati continuamente nell'indice delle dignità, e ne' coefficienti de medesimi lati. L'autore intende per momenti gl'incrementi ò decrementi momentanei delle quantità fluenti ò variabili crescenti ò decrescenti con un perpetuo moto ò flusso che però li chiama ancora flussioni, e queste non finite mà sono principi nascenti delle quantità finite.

P.7 - Avvertimento / Questo fondamento è il medesimo come si è veduto per tutti due i calcoli cioché nota in fine del Lemma citato il cav.re Isacco Newton; Mà come che nell'algebra per lo più uno si serve de piccoli caratteri a, b, c, etc. e da questi si debba ancora esprimere i momenti però questi che chiama flussioni gl'esprime colla medesima Lettera punteggiata sopra così il momento ò flussione di a è a di a2 è 2aa, di ab è ab + ba; e così degl'altri onde tutto ciò che si è dimostrato di sopra conviene alle flussioni mutata l'espressione.

P. 8 - Trovare le tangenti delle curve per mezzo del calcolo differenziale.

P. 19 - Parte 2ª / Della questione de maximis et minimis.

P. 24 - Dividere una linea data AB in un punto E di maniera che il prodotto del quadrato di una delle parti, AE per l'altra EB sia il più grande di tutti i prodotti formati nell'istessa maniera.

P. 31 - Uso del calcolo differenziale e calcolo delle flussioni per trovare i punti di piegamento e di ritorno delle,

P. 32 - Problema / Prendere la differenza ò il momento di una quantità composta di differenze ò di flussioni.

P. 43 - Trovare l'evolute delle curve.

P. 77 - Formule per la rettificazione delle curve ritrovate prima secondo il calcolo Leibniziniano e dopo pel calcolo del Newton.

P. 82 - Trovare la lunghezza di un arco espresso dalla sua tangente.

P. 83 - Trovare la lunghezza di un arco espresso dal seno retto.

P. 84 - Trovare la lunghezza di un arco Parabolico.

P. 89 - Formule per trovare l'elemento dell'aria delle curve.

P. 95 - Schoglio / Secondo il calcolo Leibniziniano otterremo l'intento più facilmente.

P. 100 - Più lievemente per mezzo del Calcolo Leibniziniano averemo l'intento.

P. 101 - Per mezo del calcolo Leibniziniano averemo più brevemente l'area della curve trovate per mezzo della regola seconda.

P. 106 - Per mezo del calcolo Leibniziniano averemo più brevemente lo stesso che si è trovato di sopra.

P. 108 - Formula per trovare l'elemento delle superficie curve.

P. 112 - Formule per trovare l'elemento delle Superficie curve secondo il calcolo del Newton.

P. 116 - Formule per trovare gl'elementi de solidi quando l'ordinate girano intorno all'asse.

P. 120 - Le formule ò elementi de solidi per mezzo del calcolo delle flussioni.

P. 135 - Formule per trovare il centro di gravita.

P. 160 - De centri di percussione e di Oscillazione.

I must however add that this list is not sufficient to illustrate everything that Narducci deals with in this work, nor does it reveal the method followed; his intention was to carry out the task outlined in the title by taking into consideration a wide range of questions concerning curves and surfaces and giving their solutions with the two methods, Leibnitz' differential calculus and Newton's fluxion calculus. The general solution to each problem is followed by the practical application to numerous types of curves and surfaces.

In order to show, albeit rapidly, Narducci's procedure, I shall refer to the chapter beginning on p. 77, and more precisely to the circumference; in the Appendix, I shall give the beginning of the chapter containing the solution with Leibnitz' calculus and a passage in the middle of the chapter containing the solution according to Newton.

On concluding these notes, I wish to consider the final part of the same chapter:

"Avute le formule degl'elementi delle curve si dovrebbe per mezzo del calcolo integrale trovare le loro lunghezze; ma sono molte curve che hanno degl'elementi de quali non si sono potute trovare l'integrali, come l'elemento della lunghezza della periferia del circolo, dell'Elisse, e dell'Iperbole allora ci potremo servire del calcolo delle Serie infinite per trovare sempre più prossimamente al giusto tali integrali, che saranno perfetti solo all'ultimo termine delle serie suddette; e però esser impossibile trovare l'integrali finite di tali elementi.".

And then, in the same file , following Narducci's work and written by the same hand we find a work composed of as many as five notebooks entitled: "Trattato delle serie infinite e della loro somma finita e del loro uso nelle quadrature delli spatij e rettificazione delle curve".

APPENDIX

FORMULAS FOR THE RECTIFICATION OF CURVES FOUND FIRST ACCORDING TO LEIBNITZ' METHOD AND THEN ACCORDING TO NEWTON'S

If $\underline{u}$ is the curve or arc of a curve whose length is to be calculated, $d\underline{u}$ will be the expression of each infinitely small part of the same. Furthermore, supposing that in the curve, whose ordinates are parallel, and which are still perpendicular to the abscissas $\underline{x}$; and in the curves, whose $\underline{y}$ ordinates originate from the same point which, on taking the infinitely close ordinates of the small part $d\underline{u}$ of the curve, a small arc of a circle with radius $\underline{y}$ is drawn from the common centre and is called $d\underline{x}$ up to the infinitely close ordinate, it will be evident that each small triangle, of which $d\underline{u}$ is the hypotenuse and $d\underline{x}$ and dy the sides, will always be a right-angle triangle, and we have

$$d\underline{u}^2 = d\underline{x}^2 + d\underline{y}^2$$

and

$$d\underline{u} = \left(d\underline{x}^2 + d\underline{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

which will be the formula for the rectification of the curve.

Wishing to find said formula by means of Newton's calculus, since the arc of the curve is expressed by $\underline{u}$, its moment will be expressed by the fluxion $\underline{u}$, and similarly supposing the ordinates so parallel that those originating from a same point expressed by $\underline{y}$ and the abscissa by $\underline{x}$ the moment of the ordinate will be $\underline{y}$ and the abscissa $\underline{x}$; thus, for the reason given above we shall have

$$\dot{\underline{u}}^2 = \dot{\underline{x}}^2 + \dot{\underline{y}}^2$$

thus

$$\dot{\underline{u}} = \left(\dot{\underline{x}}^2 + \dot{\underline{y}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

To see the use of these formulas in the two calculations we first search for the element of the length of the arc of the circle whose equation in Cap. 351 Libbro 8° Tomo secondo of the demonstrated analysis of Reynaud's is

$$\underline{y}\,\underline{y} = 2\,\underline{r}\,\underline{x} - \underline{x}\,\underline{x}$$

(as is easily deduced from the property of the circle) and thus on differentiating we shall have

$$2\underline{y}d\underline{y} = 2\underline{r}d\underline{x} - 2\underline{x}d\underline{x}$$

that is, (dividing by 2)

$$\underline{y}d\underline{y} = \underline{r}d\underline{x} - \underline{x}d\underline{x}$$

therefore

$$d\underline{y} = \frac{\underline{r}d\underline{x} - \underline{x}d\underline{x}}{(2\underline{r}\underline{x} - \underline{x}\underline{x})^{\frac{1}{2}}}$$

and

$$d\underline{y}^2 = \frac{\underline{r}\underline{r}d\underline{x}^2 - 2\underline{r}\underline{x}d\underline{x}^2 + \underline{x}^2 d\underline{x}^2}{2\,\underline{r}\underline{x} - \underline{x}\underline{x}}$$

and putting these values into the general formula

$$d\underline{u} = \left(d\underline{x}^2 + d\underline{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

we have

$$d\underline{u} = \left(\frac{2\underline{r}\underline{x}d\underline{x}^2 - \underline{x}^2 d\underline{x}^2 + \underline{r}\underline{r}d\underline{x}^2 - 2\underline{r}\underline{x}d\underline{r}^2 + \underline{x}^2 d\underline{x}^2}{2\underline{r}\underline{x} - \underline{x}\underline{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

that is,

$$d\underline{u} = \left[\frac{\underline{r}\underline{r}d\underline{x}^2}{2\underline{r}\underline{x} - \underline{x}\underline{x}}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\underline{r}d\underline{x}}{2\underline{r}\underline{x} - \underline{x}\underline{x}}$$

which is the element of the length of the arc of a circle.

****

To find the element of the above-given curve by means of Newton's calculus, let the circle's equation be

$$yy = 2rx - xx$$

Its moment will be

$$2y\dot{y} = 2r\dot{x} - 2x\dot{x}$$

that is,

$$y\dot{y} = r\dot{x} - x\dot{x}$$

and

$$\dot{y} = \frac{r\dot{x} - x\dot{x}}{(2rx - xx)^{\frac{1}{2}}}$$

but

$$\dot{y}^2 = \frac{r^2\dot{x}^2 - 2rx\dot{x}^2 + x^2\dot{x}^2}{2rx - xx}$$

and putting said value into the formula

$$\dot{u} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$$

we have

$$\dot{u} = \left[\frac{2rx\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^2 - 2rx\dot{x}^2 + x^2\dot{x}^2 + r^2\dot{x}^2}{2rx - xx}\right]^{\frac{1}{2}}$$

that is,

$$\dot{u} = \frac{r\dot{x}}{(2rx - xx)^{\frac{1}{2}}}$$

N O T E S

(1) See: Gino Arrighi: Scienziati lucchesi del Settecento. Tommaso Narducci, (1679-1750). The mistaken date of death was was found in an old memorial. About Narducci, I can indicate other works of mine: Un problema geometrico in "De gnomone meridiano bononiensi" by E. Manfredi (Una lettera inedita di P. Guido Grandi) in "Archeion", Vol. XIII (1931), p. 320; Un periodico lucchese del '700. Le Memorie sopra la fisica e istoria naturale" (1743-1757) in "Physis", Vol. II (1960), p. 59; Attorno ad un passo del De gnomone di Eustachio Manfredi (Lettere di Guido Grandi e dell'autore a Tommaso Narducci) in "Physis", Vol. IV (1962), p. 125; Il problema geometrico della inserzione di medie nel carteggio di Guido Grandi con Tommaso Narducci in "Physis", Vol. IV (1962), p. 268; La prima traduzione italiana dei "Philosophiae naturalis principia mathematica" (Il Cod. de'Nobili 45 dell'Archivio di Stato in Lucca) in "Bollettino Unione Matematica Italiana" (4) 8 (1973), p. 174; Nuovo contributo al carteggio Guido Grandi - Tommaso Perelli. Storia di una polemica. Una memoria sconosciuta del matematico di Cremona. "Sopra le curve geometriche o meccaniche" in "Physis", Vol. XVIII (1976), p. 366; Sulla prima traduzione italiana (prima metà del Settecento) della "Filosofia naturale" di Newton in "Atti e Memorie della Accademia Petrarca di lettere, arti e scienze", nuova serie, Vol. XLV (1982), p. 267.

(2) Inventario Archivio di Stato in Lucca, Volume VI, Archivi gentilizi. In Lucca, Matteoni e Botti, 1961, p. 6.