

LOIS EXPONENTIELLES DE DISTANCE POUR LES SYSTÈMES DE SATELLITES

(EXPONENTIAL DISTANCE LAWS FOR SATELLITE SYSTEMS)

VLADIMIR PLETZER

Institut d'Astronomie et de Géophysique G. Lemaître, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium

and

Département de Physique, Université de Kinshasa, Zaire

(Received 21 August, 1985)

Résumé. Une formulation exponentielle de la loi empirique de Titus-Bode a été proposée par Basano et Hugues. Ces auteurs introduisent l'hypothèse de trois planètes manquantes ou 'trous'. Toutes les planètes obéissent à la relation $a_n = \alpha\beta^n$ qui donne les demi-grands axes a des planètes pour des valeurs entières de n .

Nous proposons une nouvelle méthode qui permet de retrouver la relation de Basano et Hugues pour le système solaire. Nous appliquons cette méthode aux systèmes de satellites de Jupiter, Saturne et Uranus en introduisant des 'trous' pour combler les lacunes dans les séquences de satellites. Nous en tirons trois relations exponentielles de distance, analogues à la relation de Basano et Hugues. Nous constatons que les coefficients β sont semblables pour les systèmes solaire, jovien et uranien alors que le coefficient β du système de Saturne vaut approximativement la racine carrée des trois autres β .

Nous expliquons cet espacement exponentiel grâce à un modèle simple d'une nébuleuse gazeuse initiale soumise à de petites perturbations qui engendrent des oscillations dans la distribution de densité. Les minima de la densité perturbée sont donnés par les zéros des fonctions de Bessel décrivant la propagation de la perturbation. Les positions des maxima correspondent aux sites d'accrétion.

Tous les 'trous' introduits dans les parties intérieures des systèmes de satellites sont comblés par les anneaux et petits satellites. Dans le système d'Uranus, il reste deux 'trous' vacants qui pourraient être occupés par des petits satellites non encore découverts.

Abstract. A revised Titius-Bode law for the Solar system was proposed by Basano and Hugues, by introducing three missing planets. This law can be written $a_n = \alpha\beta^n$ (with $\alpha = 0.2853$ AU and $\beta = 1.5226$), which gives the distances a_n of the n th planet for successive integers n .

We propose a new method to find this Basano-Hugues law for the Solar system. Based upon the comparison of the ratios of successive distances, this method can be applied to the satellite systems of the three giants planets Jupiter, Saturn and Uranus by introducing 'missing satellites' to fill the gaps in satellites sequences. We find three exponential distance relations, similar to that of Basano-Hugues. We note that the coefficients β for the Solar, Jovian and Uranian systems are almost equal while the Saturnian system's coefficient β is nearly the square root of that of the three others.

We explain that exponential spacing by a simple model of an initial gaseous nebula subject to small perturbations generating oscillations in the density distribution. The minima of the perturbed density are given by the zeros of Bessel functions describing the perturbation propagation. The maxima positions correspond to accretion sites.

All the empty places in the inside parts of satellite systems are occupied by rings and small satellites. In the Uranian system, there are two empty places which could be filled by new undiscovered small satellites.

1. Introduction

La loi empirique de Titius-Bode exprime la régularité des distances des planètes:

$$a_n - a_{\text{Mercure}} = 0,3 \times 2^{n-1}. \quad (1)$$

Elle donne en UA le demi-grand axe a_n de la n ième planète à partir du demi-grand axe de Mercure, n prenant des valeurs entières successives (Vénus 1; Terre 2; ...), sauf pour Mercure où $n = -\infty$. L'intérêt pour cette loi fut renforcé lorsqu'on découvrit la ceinture d'Astéroïdes et Uranus prévus pour $n = 4$ et 7; son intérêt retomba après les découvertes de Neptune et de Pluton, les distances n'étant pas données convenablement. Cette loi a pourtant deux propriétés importantes:

- elle est purement géométrique (elle ne fait intervenir que des distances) et elle est indépendante des caractéristiques physiques ou dynamiques des planètes;
- elle ne fait appel qu'à des nombres entiers successifs qui laissent supposer qu'un processus ondulatoire pendant la formation du système solaire en est responsable (Louise, 1981, 1982a, b).

L'importance cosmogonique de cette loi vient du fait qu'on retrouve une expression analogue à (1) pour la répartition des distances des satellites géants autour des planètes géantes (Nieto, 1970).

Malgré qu'un livre lui soit consacré (Nieto, 1972), certains auteurs ne voient à cette loi qu'un intérêt purement historique, un procédé mnémonique sans aucune cause physique sous-jacente, les distances entre planètes étant régies par le principe du 'voisinage pas trop rapproché' (Lecar, 1973). Nous pensons qu'il peut exister, même en première approximation, une raison physique justifiant la régularité des distances entre les planètes. Seulement, la forme (1) ne se prête pas à une explication cosmogonique, entr'autres parce qu'elle fait intervenir le demi-grand axe de Mercure comme constante de référence.

Basano et Hugues ont donné une nouvelle formulation exponentielle en introduisant l'hypothèse audacieuse de 'planète-trou' ou planète manquante. Toutes les planètes obéissent sans exception à la relation exponentielle

$$a_n = \alpha \beta^n \quad (2)$$

où $\alpha = 0,2853$ UA, $\beta = 1,5226$ et n est entier. Les planètes sont numérotées successivement: Mercure 1; Vénus 2; etc. ... En 'forçant' l'alignement des planètes dans un diagramme semi-logarithmique ($n, \ln(a_n)$), trois 'trous' ont été introduit en $n = 5, 6, 9$. Les coefficients α et β ont ensuite été trouvés par régression sur les distances des neuf planètes (Basano et Hugues, 1979).

Dans cet article, nous présentons dans le paragraphe 2 une méthode simple basée sur la comparaison des ordres de grandeur des rapports des distances successives permettant de classer les corps en orbite. Nous reprenons dans le paragraphe 3 l'hypothèse des 'trous' en l'adaptant aux systèmes de Jupiter, Saturne et Uranus. Trois relations de distance, semblables à (2), sont trouvées par régression. Dans la partie 4, nous présentons un modèle simple d'une nébuleuse gazeuse soumise à de

petites perturbations provoquant des oscillations de densité qui entraînent la formation d’anneaux gazeux aux positions des maxima de la densité perturbée. Ce modèle permet d’expliquer en première approximation, l’espacement exponentiel des corps successifs. Nous commentons dans la section 5 l’hypothèse des ‘trous’ et nous donnons une estimation des distances auxquelles de nouveaux satellites d’Uranus pourraient être découverts.

2. Méthode de classement et principe de régression

Nous cherchons une expression de la forme (2), où le coefficient β représente une moyenne des rapports des distances successives observées, rapport défini par:

$$r_i = a_i/a_{i-1} . \tag{3}$$

La première étape consiste à attribuer à chaque corps un numéro d’ordre n en comparant les ordres de grandeur des rapports de leurs distances successives et à introduire éventuellement un certain nombre de ‘trous’ pour garder un même ordre de grandeur des rapports. Un ordre de grandeur k est défini comme le nombre de fois qu’il faut multiplier un petit rapport r_p (ou une moyenne de r_p) par lui-même pour obtenir approximativement la valeur d’un grand rapport r_g . Entre deux corps pour lesquels on constate un grand rapport, nous introduisons un nombre de ‘trous’ égal

TABLEAU I
Système Solaire

	a_i	$r_i = a_i/a_{i-1}$	n_{BH}	$a_{n\ BH}$	n_{TB}	$a_{n\ TB}$
Mercure	0,387		1	0,434	$-\infty$	0,4
Vénus	0,723	1,868	2	0,661	1	0,7
Terre	1	1,383	3	1,007	2	1
Mars	1,524	1,524	4	1,533	3	1,6
Astéroïdes	(2,78)		5	2,335	4	2,8
Comètes*	(3,6)		6	3,555		
Jupiter	5,203	3,415	7	5,413	5	5,2
Saturne	9,555	1,837	8	8,241	6	10
Chiron	(13,7)	(1,434)	9	12,548		
Uranus	19,218	2,011 (1,403)	10	19,106	7	19,6
Neptune	30,11	1,567	11	29,090	8	38,8
Pluton	39,44	1,310	12	44,293	9	77,2

Comètes*: comètes à courtes périodes.

- a_i : demi-grands axes observés en UA.
- r_i : rapports des demi-grands axes successifs.
- n_{BH} : numéro d’ordre associé: ‘trous’ en $n = 5, 6$ (Astéroïdes) et 9 (Chiron).
- $a_{n\ BH}$: demi-grands axes calculés par (2): $a_n = 0,2853 \times (1,5226)^n$.
- n_{TB} : numérotation de Titius-Bode.
- $a_{n\ TB}$: demi-grands axes calculés par (1): $a_n - a_{Mercure} = 0,3 \times 2^{n-1}$.

à l'ordre de grandeur k de ce grand rapport tel que la racine $(k + 1)$ ième du grand rapport devienne du même ordre de grandeur que les petits rapports. On peut ainsi ordonner les corps et les 'trous' d'un système. La seconde étape consiste en une régression exponentielle linéarisée sur les distances des corps en fonction de leur numéro d'ordre. Deux limitations existent à cette méthode empirique:

- puisque une transformation linéaire des distances n'affecte ni le coefficient β de (2), ni le coefficient de corrélation linéaire d'une régression, nous devons donner un numéro d'ordre à chaque corps à partir de la surface du corps central;
- nous cherchons par régression une relation (2) ayant le meilleur coefficient de corrélation. Or plus on introduira de 'trous', plus β tendra vers l'unité et plus le coefficient de corrélation sera amélioré. Le juste compromis sera trouvé en comparant β après régression à la moyenne des petits rapports.

3. Lois de distance pour les quatre systèmes

3.1. SYSTÈME SOLAIRE

Cette méthode, appliquée au système solaire, doit donner des valeurs de α et β identiques à celles de Basano et Hugues. Les deux premières colonnes du tableau I donne les demi-grands axes observés des neuf planètes et les huit rapports définis par (3). Nous constatons que:

- les rapports des distances de Mercure, Vénus, la Terre et Mars et d'autre part d'Uranus, Neptune et Pluton sont du même ordre de grandeur: 1,310 ... 1,868;
- le rapport entre Saturne et Uranus est supérieur d'un ordre de grandeur: 2,011;
- le rapport entre Mars et Jupiter est supérieur de deux ordres de grandeur: 3,414.

Nous introduisons un 'trou' entre Saturne et Uranus et deux 'trous' entre Mars et Jupiter. La moyenne des rapports des distances vaut:

$$\langle r_{\text{sol}} \rangle = (a_{\text{Pluton}}/a_{\text{Mercure}})^{1/m} = (101,912)^{1/11} = 1,523$$

avec m le nombre de rapports plus le nombre de 'trous' introduits. Cette moyenne $\langle r \rangle$ est le coefficient β trouvé par Basano et Hugues. La troisième colonne donne le numéro d'ordre associé à chaque planète en tenant compte des 'trous'. Une régression exponentielle sur les demi-grands axes des neuf planètes conduit à:

$$\alpha_{\text{Sol}} = 0,2853 \text{ UA}; \quad \beta_{\text{Sol}} = 1,5226 \quad (4)$$

avec un coefficient de corrélation linéaire valant 0,9987 (voir la figure 1).

Le tableau I permet de comparer les demi-grands axes observés et calculés par la loi de Basano et Hugues (2) et par la loi de Titius-Bode (1). La relation exponentielle (2) à plusieurs avantages sur la relation de Titius-Bode (1):

- elle permet d'éviter la valeur artificielle $n = -\infty$ de Titius-Bode pour Mercure;
- elle donne une meilleure approximation des distances de Neptune et de Pluton;
- on constate que Chiron entre parfaitement dans le 'trou' $n = 9$, sa présence n'étant pas prévue par la relation (1) de Titius-Bode. La deuxième colonne du tableau I donne les rapports de distance de Chiron avec Saturne et Uranus;

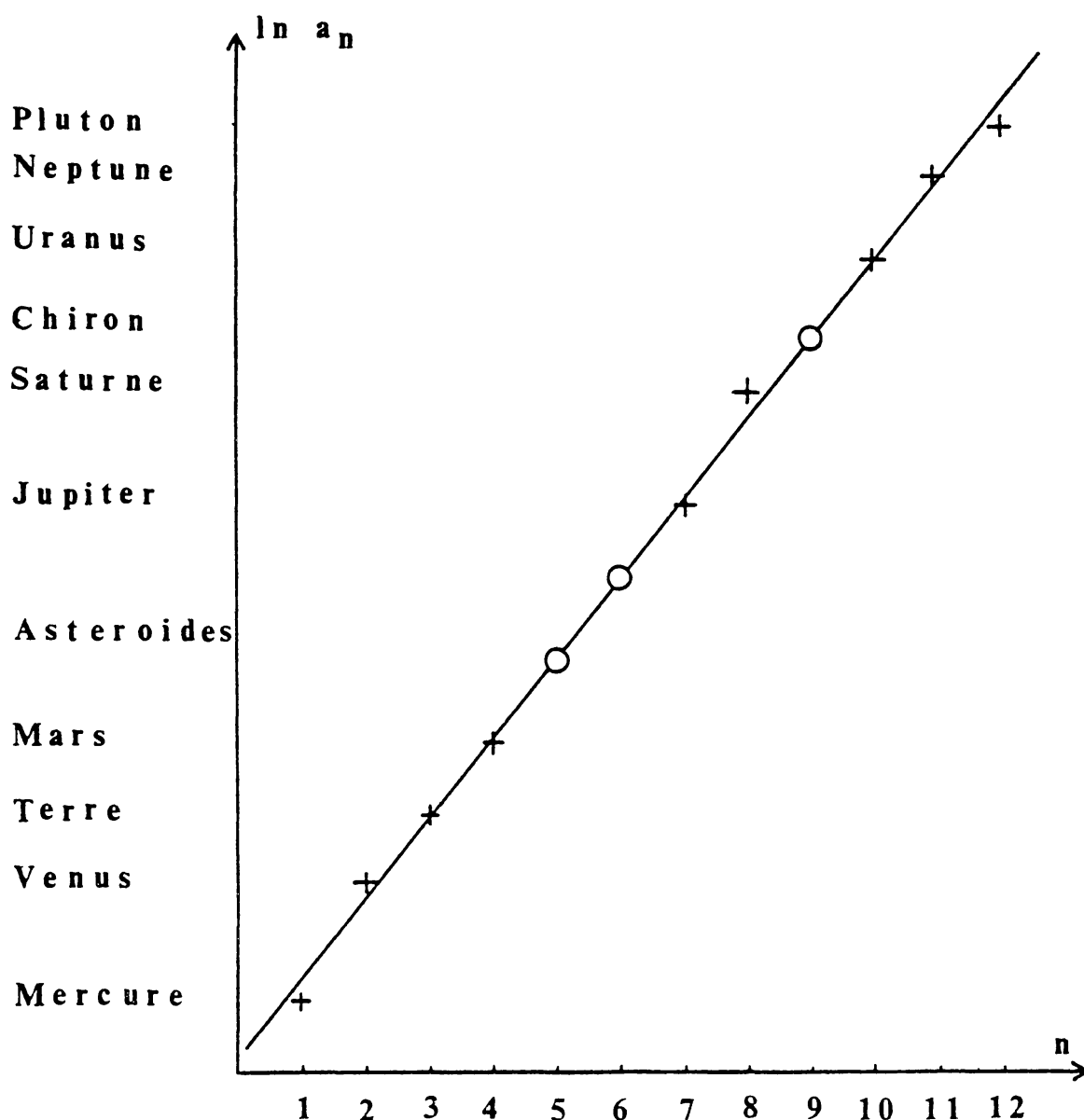


Fig. 1. Positions des planètes et des trois 'trous' pour le système solaire. Les distances sont données par la relation de Basano-Hugues (2) avec (4).

— on retrouve la ceinture principale d'Astéroïdes correspondant au 'trou' $n = 5$: les demi-grands axes observés varient de 2,362 UA pour 4-Vesta à 3,483 UA pour 107-Camilla (Plucher et Meeus, 1973). On peut associer au 'trou' $n = 6$ les astéroïdes de la famille de Hilda ($a_{153.Hilda} = 3,975$ UA) et le groupe de comètes à courte période dont le demi-grand axe moyen vaut 3,6 UA (Allen, 1973).

3.2. REMARQUES SUR LES PETITS SATELLITES ET ANNEAUX

Nous distinguons deux types de satellites: les corps connus avant 1979 (anneaux, satellites géants, satellites extérieurs, Amalthée, Miranda, ...) et d'autre part les petits satellites découverts par les sondes Voyager, souvent associés aux anneaux (bergers ou inclus l'anneau) ou coorbitaux d'un satellite déjà connu. Nous ne pouvons pas

repandre séparément tous les petits satellites dans une relation (2) se voulant générale. Nous les regroupons avec l'anneau ou le satellite de premier type qui leur est associé. Il importe que, pour les satellites géants et de premier type, l'accord entre les distances calculées et observées soit le meilleur.

Dans les parties extérieures des systèmes de Jupiter et de Saturne, les distances entre le dernier satellite géant et les premiers satellites lointains sont beaucoup plus grandes que les distances moyennes entre satellites géants. Nous serons amenés à introduire dans les parties extérieures de ces systèmes un nombre relativement grand de 'trous' qui resteront vacants.

Nous considérons pour les anneaux une distance caractéristique définie grâce au modèle simple 'boîte de camembert' (Brahic et Sicardy, 1981): anneau circulaire d'épaisseur constante et de densité uniforme. La distance caractéristique est le rayon du cercle qui partage l'anneau en deux anneaux de masses égales. Pour certains groupements anneau-anneau ou anneau-satellite, la distance caractéristique a légèrement été modifiée pour tenir compte du groupement.

3.3. SYSTÈME DE JUPITER

Nous considérons une distance moyenne pour les deux groupes de quatre satellites extérieurs: Lédia, Himalia, Lysithéa, et Elara (LHLE) et Ananke, Carmé, Pasiphae, et Sinope (ACPS). Les deux premières colonnes du tableau II donnent les demi-grands axes exprimés en rayons joviens et les rapports r_n . Nous constatons que:

- les rapports entre Io, Europe et Ganymède sont quasi-égaux: 1,59;
- le rapport entre Ganymède et Callisto est du même ordre de grandeur: 1,76;
- les rapports entre le rayon de Jupiter et Amalthée, entre Io et Amalthée et entre LHLE et ACPS sont supérieurs d'un ordre de grandeur: 2,54, 2,33, et 1,96;
- le rapport entre Callisto et LHLE est supérieur de trois ordres de grandeur: 6,12.

Nous introduisons un 'trou' entre Amalthée et Io et entre LHLE et ACPS, deux 'trous' entre la surface de Jupiter et Amalthée et trois 'trous' entre Callisto et LHLE. La moyenne des rapports des distances vaut (avec $m = 6$ rapports + 5 'trous')

$$\langle r_{\text{Jup}} \rangle = (a_{\text{ACPS}}/a_{\text{Amalthée}})^{1/m} = (124,114)^{1/11} = 1,550.$$

La troisième colonne reprend le numéro d'ordre associé à chaque satellite et les positions des 'trous'. Une régression exponentielle sur les distances des cinq satellites et des groupes LHLE et ACPS donne les valeurs

$$\alpha_{\text{Jup}} = 0,6584; \quad \beta_{\text{Jup}} = 1,5665 \quad (5)$$

avec un coefficient de corrélation de 0,9989. La figure 2 illustre ce résultat. La deuxième colonne du tableau II donne les rapports des distances des anneaux et des petits satellites. On constate que les deux 'trous' entre la surface de Jupiter et Amalthée sont comblés par l'anneau secondaire 1 et par l'anneau primaire et ses deux satellites associés, Métis et Adrastée. L'anneau secondaire 2 et le satellite Thèbe occupent la position du 'trou' entre Amalthée et Io. Les trois 'trous' entre Callisto et LHLE et le 'trou' entre LHLE et ACPS restent vides.

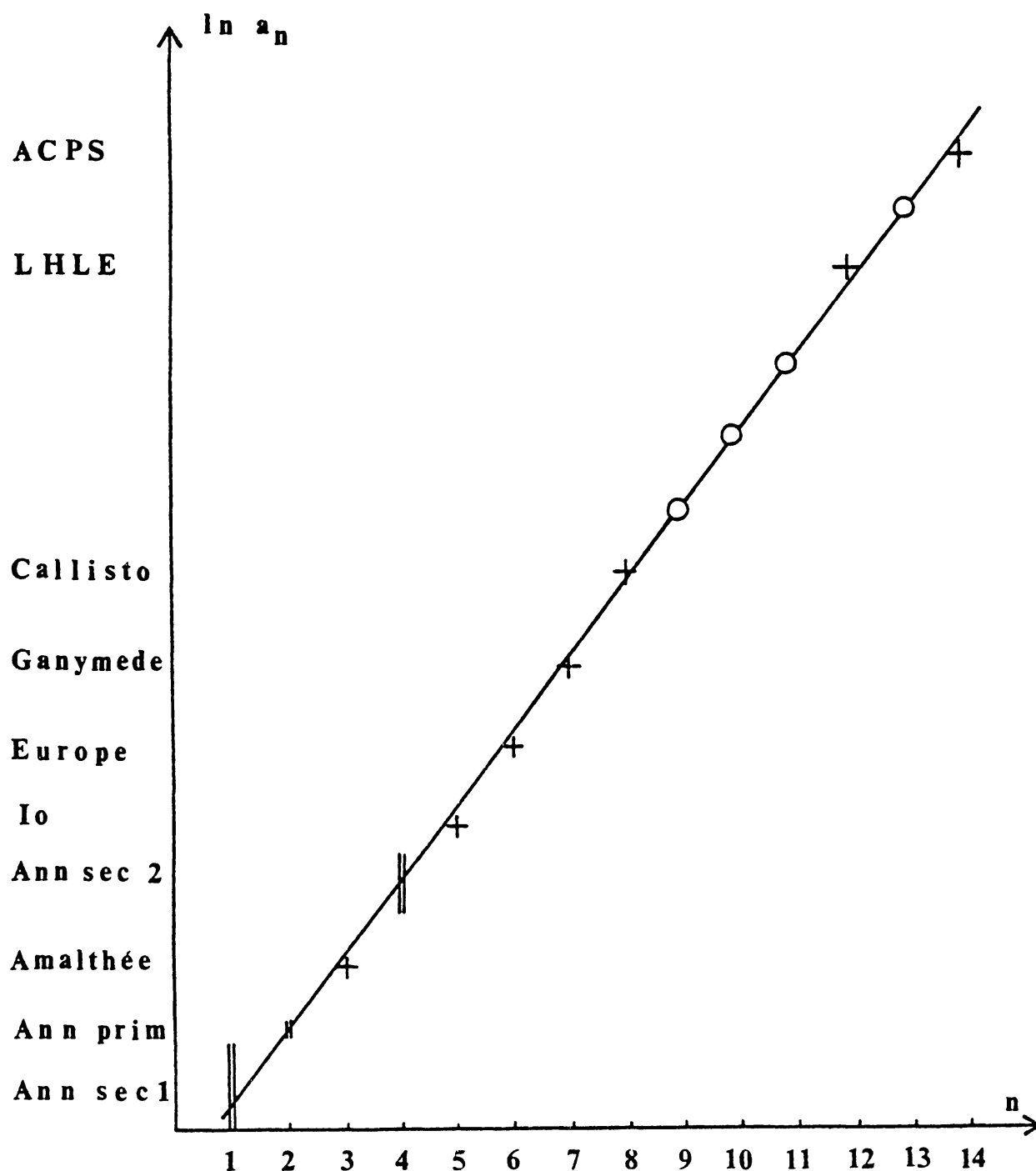


Fig. 2. Positions des satellites et des 'trous' pour le système de Jupiter. Les distances sont données par (2) avec (5).

3.4. SYSTÈME DE SATURNE

Le système de Saturne est plus particulier que ceux de Jupiter et d'Uranus en ce sens qu'il possède plus de petits et de gros satellites et plus d'anneaux que les autres systèmes. Il est donc plus délicat à classer et à ordonner.

TABLEAU II
Système de Jupiter

Système de Jupiter	a_i	$r_i = a_i/a_{i-1}$	n
Rayon de Jupiter	1		
Ann. Secondaire 1	1,415	(1,415)	1
Ann. Primaire + M + A	1,777	(1,256)	2
Amalthée	2,539	2,539(1,429)	3
Thèbe	3,105	(1,223)	4
Ann. Secondaire 2	4,342	(1,398)	
Io	5,905	2,326(1,360)	5
Europe	9,396	1,591	6
Ganymède	14,986	1,595	7
Callisto	26,331	1,757	8
LHLE	161,064	6,117	12
ACPS	315,126	1,956	14

M + A = Métis + Adrastée

- a_i : demi-grands axes observés en rayons équatoriaux de Jupiter ($71,4 \times 10^3$ km) (Beatty *et al.*, 1981; Synnott, 1984; Decayeux et Brunier, 1982).
- r_i : rapports des demi-grands axes successifs.
- n : numéro d'ordre associé: 'trous' en $n = 1, 2, 4$ (Anneaux et petits satellites), et en $n = 9, 10, 11, 13$ (vacants).

Dans le tableau III, nous regroupons l'anneau A et son berger S28 avec l'anneau F et ses bergers S26 et S27, en raison de leurs proximités. Nous négligeons les anneaux G (à cause de sa minceur) et E (à cause de son étendue et de sa finesse). Les autres petits satellites encore non identifiés sont regroupés avec l'anneau auquel ils sont associés. La deuxième colonne donne les rapports de distances des satellites entre Janus et Phoébé. Nous constatons que sur ces dix rapports:

- cinq rapports (entre Janus, Mimas, Encélade, Téthys et Dioné et entre Titan et Hypérion) sont très proches: 1,21 ... 1,28;
- le rapport entre Dioné et Rhéa est du même ordre de grandeur: 1,397;
- les rapports entre le rayon de Saturne et Janus, entre Rhéa et Titan et entre Hypérion et Japet sont supérieurs de trois ordres de grandeur: 2,51; 2,32 et 2,40;
- le rapport entre Japet et Phoébé est supérieur de cinq ordres de grandeur: 3,64.

Nous introduisons trois 'trous' entre Rhéa et Titan et entre Hypérion et Japet, quatre 'trous' entre la surface de Saturne et Janus et cinq 'trous' entre Japet et Phoébé. La moyenne des rapports des distances vaut ($m = 9$ rapports + 11 'trous'):

$$\langle r_{\text{Sat}} \rangle = (a_{\text{Phoébé}}/a_{\text{Janus}})^{1/m} = (85,545)^{1/20} = 1,249.$$

Parmi les quatre rapports de distances des anneaux, donnés dans la colonne 2, on note que trois rapports sont proches de $\langle r_{\text{Sat}} \rangle$: 1,20 ... 1,26. En fonction des numéros

TABLEAU III
Système de Saturne

Système de Saturne	a_i	$r_i = a_i/a_{i-1}$	n
Rayon de Saturne	1		
Anneau D	1,159	(1,159)	1
Anneau C	1,386	(1,196)	2
Anneau B	1,747	(1,261)	3
Anneau A + F + sat. berg.	2,191	(1,254)	4
Janus + S3	2,510	2,510(1,146)	5
Mimas	3,075	1,225	6
Encélade	3,945	1,283	7
Téthys	4,885	1,238	8
Dioné	6,256	1,281	9
Rhéa	8,737	1,397	10
 Titan	 20,254	 2,318	 14
Hypérion	24,548	1,212	15
 Japet	 59,022	 2,404	 19
Phoébé	214,719	3,638	25

sat. berg. = S28 + S26 + S27.

- a_i : demi-grands axes observés en rayons équatoriaux de Saturne
($60,3 \times 10^3$ km) (Stone et Miner, 1982).
- r_i : rapports des demi-grands axes successifs.
- n : numéro d'ordre associé: 'trous' en $n = 1$ à 4 (Anneaux et petits satellites), et en $n = 11, 12, 13, 16, 17, 18$ et 20 à 24 (vacants).

d'ordre associés, une régression sur les distances des dix satellites entraîne

$$\alpha_{\text{Sat}} = 0,8407; \quad \beta_{\text{Sat}} = 1,2507$$

(6)

avec un coefficient de corrélation de 0,9995 (Voir la figure 3).

D'autres classements où le nombre de 'trous' a été réduit, conduisent à des coefficients de corrélation trop faible ou des valeurs de β trop éloignées de la majorité des rapports (dans le tableau III, 8 rapports sur 14 sont compris entre 1,20 et 1,28; 2 rapports sont inférieurs à 1,19 et 4 rapports sont supérieurs à 1,3). Par exemple, en n'introduisant qu'un 'trou' entre Rhéa et Titan et entre Hypérion et Japet et deux 'trous' entre Japet et Phoébé, nous obtenons $\beta = 1,407$ et un coefficient de corrélation linéaire valant 0,9924.

3.5. SYSTÈME D'URANUS

Contrairement aux systèmes de Jupiter et de Saturne, les satellites connus d'Uranus sont moins nombreux et les anneaux forment une séquence plus régulière et moins étendue. Nous tiendrons compte de la distance moyenne des anneaux dans la régression. Du tableau IV, nous constatons que:

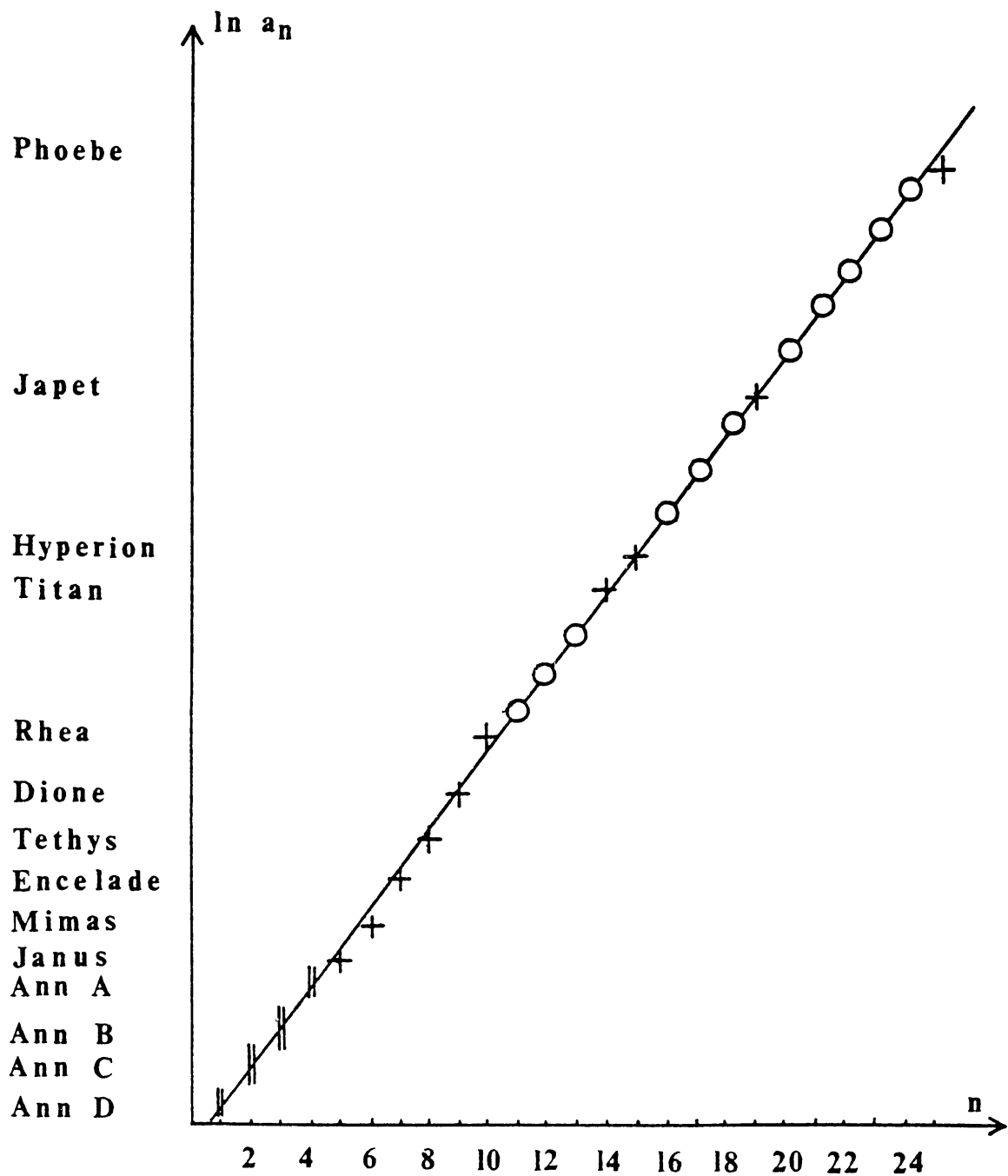


Fig. 3. Positions des satellites et des 'trous' pour le système de Saturne. Les distances sont données par (2) avec (6).

- les rapports entre les cinq satellites sont du même ordre de grandeur: 1,34 ... 1,64;
- le rapport entre le rayon d'Uranus et le demi-grand axe de Miranda est supérieur de trois ordres de grandeur: 5,12.

Nous introduisons trois 'trous' entre la surface d'Uranus et Miranda. Les anneaux combler le 'trou' $n = 2$ et les deux 'trous' $n = 1$ et 3 restent pour l'instant vides. La moyenne des rapports de la deuxième colonne vaut ($m = 5$ rapports + 1 'trou'):

TABLEAU IV
Système d'Uranus

Système d'Uranus	a_i	$r_i = a_i/a_{i-1}$	n
Rayon d'Uranus	1		
Anneaux	1,843	(1,843)	2
Miranda	5,118	5,118 (2,778)	4
Ariel	7,559	1,477	5
Umbriel	10,512	1,391	6
Titania	17,244	1,640	7
Obéron	23,071	1,338	8

a_i : demi-grands axes observés en rayons équatoriaux d'Uranus
($25,4 \times 10^3$ km) (Beatty *et al.*, 1981).
 r_i : rapports des demi-grands axes successifs.
 n : numéro d'ordre associé: 'trous' en $n = 2$ (Anneaux) et en $n = 1$ et 3 (vacants).

$\langle r_{\text{Uran}} \rangle = (a_{\text{Obéron}}/a_{\text{anneaux}})^{1/m} = (12,518)^{1/6} = 1,524.$

Une régression exponentielle sur les six distances en fonction de n conduit à

$\alpha_{\text{Uran}} = 0,8709; \quad \beta_{\text{Uran}} = 1,5216$ (7)

avec un coefficient de corrélation linéaire valant 0,9964 (voir figure 4).

3.6. DISCUSSION

Le tableau V permet de comparer les distances observées et calculées par une relation (2) avec les coefficients propres à chaque système. En comparant les coefficients β , on remarque la proximité de leur valeurs: 1,522 ... 1,566 pour les systèmes solaire, jovien et uranien alors que β_{Sat} vaut approximativement la racine carrée des trois autres: $1,25 = (1,56)^{1/2}$. Autrement dit, en sautant une orbite sur deux dans la partie intérieure du système de Saturne, on retrouve à peu près les rapports moyens de distances des systèmes solaire, jovien et uranien, comme le montre la disposition du tableau V. Nous constatons également que les corps les plus massifs sont sur l'orbite correspondant à la valeur $n = 7$ (Jupiter, Ganymède, et Titania) tandis que Titan est sur l'orbite correspondant à $n = 14$ pour le système de Saturne; cette constatation est sans explication pour l'instant.

Comme pour le système solaire où les trois 'trous' introduits ont été comblés par les Astéroïdes et Chiron, tous les 'trous' introduits près de la surface de Jupiter et de Saturne ont été comblés par les anneaux et les petits satellites, alors que les valeurs de α et β ont été calculées indépendamment de ceux-ci.

Une certaine prudence s'impose pourtant au vu des hypothèses employées: distances caractéristiques des annaux dépendant du modèle de densité, regroupement des petits satellites et anneaux autour d'une valeur moyenne, coefficients α et β fonctions du nombre de 'trous' introduits. De plus, s'il n'y a pas de 'trous' dans les

TABLEAU V
Comparaison entre les demi-grands axes observés et calculés par la relation (2) pour les quatre systèmes

Système Solaire			Système Jupiter			Système Uranus			Système Saturne		
a_n (UA)			a_n (R_J)			a_n (R_U)			a_n (R_S)		
n	Observé	Calculé	Observé	Calculé		Observé	Calculé		Observé	Calculé	
1	Mercure	0,387	0,434		Ann. sec. 1	1,415	1,031		Ann. D	1,159	1,051
									Ann. C	1,386	1,315
2	Vénus	0,723	0,661		Ann. prim.	1,777	1,616		Ann. B	1,747	1,645
									Ann.		
									A + F	2,191	2,057
									Janus + S3		
3	Terre	1	1,007		Amalthée	2,539	2,531			2,510	2,573
									Mimas	3,075	3,218
4	Mars	1,524	1,533		Ann. sec. 2	4,342	3,965		Encelade	3,945	4,025
									Téthys	4,885	5,033
5	Astéroïdes	2,335	2,335		Io	5,905	6,211		Dioné	6,256	6,295
									Rhée	8,737	7,874
6		3,555	3,555		Europe	9,396	9,729			9,847	9,847
										12,316	12,316
										15,404	15,404
7	Jupiter	5,203	5,413		Ganymède	14,240	15,241		Titan	20,254	19,266
									Hypérion	24,548	24,096
8	Saturne	9,555	8,241		Callisto	26,331	23,874			30,136	30,136
										37,692	37,692
9	Chiron	13,7	12,548						Japet	59,022	47,141
										58,959	58,959
10	Uranus	19,218	19,106							73,740	73,740
										92,227	92,227
11	Neptune	30,11	29,090							115,348	115,348
										144,266	144,266
12	Pluton	39,44	44,293		LHLE	161,064	143,765			180,433	180,433
									Phoébé	214,719	225,668
13			67,440				225,207			282,243	282,243
14					ACPS	315,126	352,787				

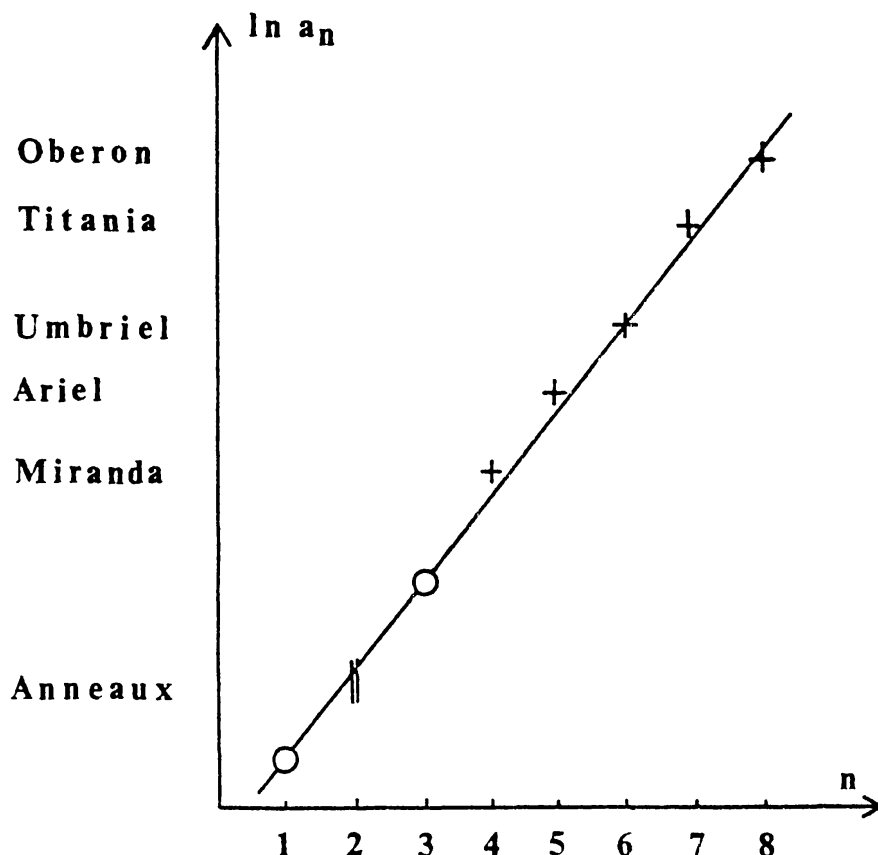


Fig. 4. Positions des satellites et des 'trous' pour le système d'Uranus. Les distances sont données par (2) avec (7).

parties géantes des systèmes de Jupiter et Uranus, il y a un 'trou' entre Saturne et Uranus, comblé par un petit corps, et il reste plusieurs 'trous' de part et d'autre de la paire Titan-Hypérion.

Néanmoins, l'idée d'un espacement approximativement exponentiel entre les corps dans les parties intérieures et géantes des quatre systèmes peut être acceptée.

4. Hypothèse d'origine de l'espacement exponentiel

Bien que des phénomènes dynamiques (résonances, marées) ont contribué à transformer la distribution des distances dans les quatre systèmes, l'origine de cet espacement serait à chercher dans le mécanisme de formation des systèmes à partir des nébuleuses gazeuses initiales. Reprenant l'idée d'une nébuleuse soumise à une petite perturbation périodique (Berlage, 1948), on considère que la distribution de densité subit des oscillations autour d'une valeur d'équilibre. Les maxima de la partie perturbée de la densité correspondent à la position de formation d'anneaux gazeux autour du proto-Soleil et des proto-planètes.

Considérons le modèle simplifié d'un fin disque gazeux en rotation autour d'une sphère centrale, modèle décrit par les équations de Navier-Stokes, de continuité, de Poisson et d'état du gaz supposé parfait (on néglige la viscosité):

$$(\partial \mathbf{v} / \partial t) + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \text{grad } V + \varrho^{-1} \text{grad } p = 0, \quad (8)$$

$$(\partial \varrho / \partial t) + \text{div} (\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad (9)$$

$$\Delta V = 4\pi G \varrho, \quad (10)$$

$$p = c^2 \varrho / \gamma, \quad (11)$$

où $\mathbf{v}$ et p sont la vitesse vectorielle et la pression du gaz de densité ϱ , soumis à des transformations polytropiques d'indice γ constant, c étant la vitesse du son dans le gaz et V le potentiel gravitationnel de la masse sphérique centrale (on néglige la masse du disque). Le problème est plan et axisymétrique. Dans un référentiel polaire cylindrique, la vitesse à l'équilibre s'écrit $\mathbf{v}_0 = (0, v_0(r), 0)$. Supposons le modèle écarté de l'équilibre par une petite perturbation ne dépendant que du temps et de la distance radiale r et n'affectant pas la vitesse du son. On considère la vitesse perturbée $\mathbf{v}_1 = (v_1(x, t), 0, 0)$ et les distributions suivantes en fonction d'une distance adimensionnelle $x = r/r_c$:

$$\varrho_0 = \varrho_c x^d; \quad c_0^2 = c_c^2 x^s; \quad V_0 = -V_c x^{-1} \quad (12)$$

où les indices c dénotent des caractéristiques de référence. Les exposants d et s sont à adapter suivant le modèle physique de la nébuleuse. Après linéarisation et simplification des équations (8) à (11) par les équations à l'équilibre, on résout le système d'équations en fonction de la densité perturbée ϱ_1 en introduisant les distributions (12) et en négligeant la dérivée spatiale du potentiel gravitationnel perturbé (les calculs détaillés seront publiés ultérieurement) et avec $\varrho' = \partial \varrho / \partial x$:

$$\varrho_1'' + \varrho_1' x^{-1}(s-d+1) + \varrho_1 x^{-2}(4\pi G \gamma \varrho_c r_c^2 c_c^{-2} x^{d+2-s} + \omega^2 \gamma r_c^2 c_c^{-2} x^{2-s} - ds) = 0 \quad (13)$$

où on a séparé les parties spatiale et temporelle de la densité perturbée:

$$\varrho_1(x, t) = \varrho_1(x) \exp(j\omega t) \quad (14)$$

avec $j^2 = -1$. L'équation (13) est la partie spatiale d'une équation de propagation d'onde avec un terme de masse. La forme des solutions de (13) dépend des valeurs des exposants d et s .

En se basant sur l'abondance actuelle des éléments chimiques observés dans les planètes et météorites, d_{Sol} peut être compris entre -1 et -2 (Herczeg, 1968; Weidenschilling, 1977). Les observations des sondes Voyager des satellites de Jupiter et Saturne ont permis de dresser une table des densités initiales en introduisant les masses augmentées en composition solaire (Prentice, 1981), correspondant à $d_{\text{Sol}} = -3,5$; $d_{\text{Jup}} = -3$; et $d_{\text{Sat}} = -2,8$. La distribution de la vitesse du son dans les nébuleuses initiales est plus difficile à modéliser puisqu'elle dépend des conditions de température et de pression régnant à la formation des systèmes. Par l'approximation du gaz parfait, c^2 dépend linéairement de la température. Une température chimique moyenne de formation a été calculée pour chaque planète (Anders, 1972; Lewis, 1974), correspondant à une dépendance radiale d'exposant $-0,75$. Horedt (1979)

considère une distribution d'exposant compris entre $-(3/7)$ et -1 . L'exposant s peut donc être compris entre $-(1/2)$ et -1 .

Considérons plus généralement le cas où d et s sont liés par la relation $d = s - 2$. Les solutions de (13) s'écrivent:

$$\varrho_1 = Kx^{-1} Z_\nu(z) \quad (15)$$

K est une constante et Z_ν sont les fonctions de Bessel de première espèce d'indice

$$\nu = 2(2-s)^{-1} [(s-1)^2 - 4\pi G \gamma \varrho_c r_c^2 c_c^{-2}]^{1/2}$$

et d'argument

$$z = 2(2-s)^{-1} \gamma r_c^2 c_c^{-2} \omega x^{(2-s)/2}.$$

Pour des caractéristiques de référence tel que l'indice $\nu = jy$ soit un imaginaire pur, on peut récrire les fonctions de Bessel (Jahnke-Emde-Lösch, 1966) tel que la partie réelle de (15) s'écrive:

$$\varrho_1 = Kx^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^{2k} F_1(k) [\cos(y \ln(z/2)) + F_2(k) \sin(y \ln(z/2))] \quad (16)$$

où $F_1(k)$ et $F_2(k)$ sont des fonctions de y et k . Les zéros de (16) sont solutions de:

$$\operatorname{tg}[y \ln(z/2)] = - \left[\sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^{2k} F_1(k) \right] / \left[\sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^{2k} F_1(k) F_2(k) \right]. \quad (17)$$

On trouve une solution analytique approchée de la forme $\operatorname{tg}[y \ln(z/2)] = \operatorname{tg} \phi$ où ϕ est une constante pour $(z/2) \ll 1$ (resp. $\gg 1$), c-à-d pour

$$\omega x^{(2-s)/2} \ll (\text{resp. } \gg) (2-s) c_c^2 \gamma^{-1} r_c^{-2} \quad (18)$$

avec $\phi = \pi/2 + \phi_0$ (resp. ϕ_M) où $\phi_0 = \operatorname{arctg}(F_2(0))$ et $\phi_M = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(F_2(k))$.

Dans ces cas, les zéros de (16) sont donnés par:

$$r = A(\omega) \exp(Bn) \quad (19)$$

où $B = \pi[4\pi G \gamma \varrho_c r_c^2 c_c^{-2} - (s-1)^2]^{-1/2}$; $A(\omega) = r_c[(2-s)/\omega a]^{2/(2-s)} \exp(B\phi/\pi)$ et n est un entier. Le rapport entre deux zéros ou deux maxima successifs vaut:

$$r_{i+1}/r_i = \exp(B) \quad (20)$$

rapport indépendant de la pulsation ω . On vérifie également que les minima de la vitesse perturbée correspondent aux maxima de la densité perturbée.

Pour $s = -1$ et $\gamma = 1,5$, les conditions (18) deviennent $\omega x^{1.5} \ll (\text{resp. } \gg) 2c_c^2 r_c^{-2}$. En choisissant pour r_c les rayons du proto-Soleil ($\approx 2 \times 10^{10}$ m; Brahic, 1982) et des proto-planètes ($\approx 1,1$ fois le rayon actuel), en calculant c_c grâce à l'approximation

du gaz parfait et en prenant 250 et 25 comme ordres de grandeur de $x_{\max}$ pour les disques du proto-Soleil et des proto-planètes, on trouve une estimation pour les périodes P des perturbations: $P_{\text{pr-Sol}} * 104$ ans (resp. $\circ 2 \times 10^6$ ans) et $P_{\text{pr-plan}} * 2 \times 104$ ans (resp. $\circ 102$ ans). En dehors des conditions (18), les solutions de (17) sont à calculer numériquement. Une étude rapide permet de voir qu'en première approximation, elles ne s'éloignent pas trop de la forme (19).

Ce modèle simple permet d'expliquer l'espacement quasi-exponentiel entre les corps dans les parties intérieures et géantes des systèmes par un phénomène d'oscillation périodique dans la nébuleuse gazeuse qui entraîne la formation d'anneaux gazeux aux positions des maxima de la densité perturbée. Dans son mouvement, le gaz entraîne les 'poussières' et germes d'accrétion desquels naissent les planètes et satellites (voir également Nowotny, 1979). L'évolution dynamique par résonance et marées, qui modifie ce rapport des distances, peut se situer après (Burns, 1982) ou pendant (Lin et Papaloizou, 1979) ce processus. Cette évolution dynamique est plus importante pour les systèmes de satellites que pour le système planétaire.

5. Remarques sur l'hypothèse des 'trous'

L'hypothèse des corps manquants ou 'trous' peut paraître artificielle mais on remarque qu'à la place des 'trous' des parties intérieures et géantes des systèmes solaire, jovien et saturnien, on trouve les Astéroïdes, les anneaux ou les petits satellites. Ces corps sont vraisemblablement formés par le même processus que le reste des systèmes à l'exclusion de certains petits corps: Chiron et peut-être Hypérion. Il est exclus d'imaginer que Chiron ait la même importance cosmogonique que les quatre planètes géantes, son orbite actuelle étant instable à l'échelle de l'âge du système solaire. Nous constatons simplement sa présence actuelle à la place du 'trou' entre Saturne et Uranus.

Dans le cas des 'trous' devant Titan, on peut y voir une conséquence directe des phénomènes de marées entre Saturne et Titan, qui éloignent progressivement Titan de Saturne. On retiendra également l'hypothèse considérant Titan comme un corps étranger, non-cogénétique du système de Saturne, qui serait venu déloger Japet d'une orbite régulière au-delà de Rhéa (Prentice, 1984).

Quant aux 'trous' des parties extérieures des systèmes de Jupiter et de Saturne, on les explique par l'hypothèse communément admise que les corps les plus lointains des systèmes n'ont pas participé directement à la formation des systèmes. Ils seraient venus par après s'accrocher aux systèmes soit après évasion: Pluton, sans doute ex-satellite de Neptune (Lyttleton, 1936; Harrington et Van Flandern, 1979), soit par capture comme le laissent supposer les formes non-sphériques des corps et les éléments de leur orbite: excentrique et inclinée (groupe LHLE et peut-être Japet) ou rétrograde (groupe ACPS et Phoébé). Les places de ces corps n'auraient aucune relation cogénétique directe avec le reste des systèmes. Il n'est donc pas étonnant de trouver des vides énormes entr'eux. Dans le système d'Uranus, un des trois 'trous' est

comblé par les anneaux. Il reste donc deux places libres. Si de nouveaux corps devaient être découverts autour d'Uranus par la sonde Voyager, on peut espérer les trouver approximativement aux distances données par la relation (2) avec les valeurs (7), soit à $3,365 \times 10^4$ km et à $7,793 \times 10^4$ km de la surface d'Uranus. Par analogie avec les systèmes de Jupiter et de Saturne (tableau V), on peut supposer qu'il y ait encore un ou plusieurs anneaux très ténus près de la surface de la planète et un ou plusieurs petits satellites (de quelques dizaines de km de diamètre) entre les neuf anneaux et Miranda. Cette hypothèse a déjà été émise sur base d'une résonnance possible avec les anneaux β et δ (Steigmann, 1979). On peut également supposer l'existence d'un ou plusieurs petits satellites lointains irréguliers, dont l'orbite serait excentrique, inclinée et directe ou rétrograde, dans une zone s'étendant entre $3,4 \times 10^6$ km et $5,2 \times 10^6$ km de la planète.

6. Conclusion

Nous avons montré qu'en considérant l'hypothèse de 'trous', on peut classer les quatre grands systèmes du Système Solaire par une méthode empirique simple. En fonction du numéro d'ordre, la méthode de régression sur les distances des planètes principales et des satellites connus avant les expéditions Voyager nous a fait redécouvrir la relation de Basano-Hugues pour le système solaire et trois relations semblables pour les systèmes de satellites. Ces relations permettent de retrouver la ceinture d'Astéroïdes, les anneaux et les petits satellites des planètes géantes, indépendamment de ceux-ci. On constate la similitude des β et la position des corps les plus massifs en $n = 7$ pour les systèmes solaire, jovien et uranien et d'autre part la relation de racine carrée de β du système de Saturne et la position de Titan en $n = 14$.

Un modèle simple de la nébuleuse initiale soumise à de petites perturbations conduit à expliquer formellement l'espacement quasi-exponentiel observé entre les distances des corps successifs.

D'autre part, tous les 'trous' introduits dans les parties intérieures et géantes des systèmes solaire, jovien et saturnien sont occupés, sauf devant Titan. On déduit également l'existence possible d'un ou plusieurs petits satellites ou anneaux très fins à la place des deux 'trous' laissés vacants dans le système d'Uranus.

Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur Paquet, de l'Observatoire Royal de Belgique, pour ses encouragements constants ainsi que le Professeur Godart, de l'Institut d'Astronomie et de Géophysique G. Lemaître de Louvain-la-Neuve, et Monsieur Quartier, du Département de Physique de l'Université de Kinshasa, Zaïre, pour les discussions enrichissantes que j'ai eues avec eux.

Ce travail a été réalisé au Département de Physique de l'Université de Kinshasa et terminé à l'Institut d'Astronomie et de Géophysique de l'Université Catholique de Louvain, pendant une période de recyclage CTU de l'AGCD.

References

- Allen, C. W.: 1973, *Astrophysical Quantities*, The Athlone Press, Univ. of London.
- Anders, E.: 1972, in H. Reeves (ed.), *L'Origine du Système Solaire*, CNRS Paris, p. 179.
- Basano, K. and Hugues, D. W.: 1979, *Nuovo Cimento* **2C**, No. 5, 505.
- Beatty, L., O'Leary, B., and Chaikin, A.: 1981, *The New Solar System*, Cambridge Univ. Press and Sky Publ. Corp.
- Berlage, H. P., Jr.: 1948, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap (Amsterdam)* **38**, 857.
- Brahic, A. (ed.): 1982, in *Formation of Planetary Systems*, CNES, Cepadues, Toulouse, p. 15.
- Brahic, A. and Sicardy, B.: 1981, *Nature* **289**, 447.
- Burns, J. A.: in A. Brahic (ed.), *Formation of Planetary Systems*, CNES, Cepadues, Toulouse, p. 403.
- Decayeux, A. and Brunier, S.: 1982, *Les Planètes*, Bordas, Paris.
- Harrington, R. S. and Van Flandern, T. C.: 1979, *Icarus* **39**, 131.
- Herczeg, T.: 1968, *Vistas Astron.* **11**, 175.
- Horedt, G. P.: 1979, *The Moon and the Planets* **21**, 63.
- Lecar, M.: 1973, *Nature* **242**, 318.
- Lewis, J. S.: 1974, *Science* **186**, 440.
- Lin, D. N. C. and Papaloizou, J.: 1979, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **186**, 799.
- Louise, R.: 1981, *The Moon and the Planets* **25**, 389.
- Louise, R.: 1982a, *The Moon and the Planets* **26**, 93.
- Louise, R.: 1982b, *The Moon and the Planets* **26**, 389.
- Lyttleton, R. A.: 1936, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **97**, 108.
- Nieto, M. M.: 1970, *Astron. Astrophys.* **8**, 105.
- Nieto, M. M.: 1972, *The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory*, Pergamon Press, Oxford.
- Nieto, M. M.: 1975, *Icarus* **25**, 171.
- Nowotny, E.: 1979, *The Moon and the Planets* **21**, 257.
- Plucher, F. and Meeus, J.: 1973, *Tables of Minor Planets*, Library of Congress, Catalog. Card Number 73-80379, U.S.A.
- Prentice, A. J. R.: 1981, *Voyager and the Origin of the Solar System*, JPL Publ. 81-79, NASA, JPL, Caltech., Pasadena.
- Prentice, A. J. R.: 1984, *Earth, Moon and Planets* **30**, 209.
- Steigmann, G. A.: 1979, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **186**, 19P.
- Stone, E. C. and Miner, E. D.: 1982, *Science* **215**, 499.
- Synnott, S. P.: 1984, *Icarus* **58**, 178.
- Weidenschilling, S. J.: 1977, *Astrophys. Space Sci.* **51**, 153.