

Astronomisches Rechen-Institut in Heidelberg
Mitteilungen Serie A Nr. 14

Die numerische Integration des n -Körper-Problemes für Sternhaufen I

Von

SEBASTIAN VON HOERNER

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 10. Mai 1960)

A method is proposed to approach the theory of stellar dynamics by integrating the equations of motion of a random cluster with few stars. The variable time-step is always governed by the closest pair of stars, and a special definition of the relaxation time is given. The accuracy of the calculation is adjusted to keep the relative energy error smaller than 5×10^{-4} per relaxation time. A satisfactory degree of reliability of the results is reached by taking the average over a number of examples and of relaxation times.

Only the first phase of development has been calculated. The relaxation time for $n = 4, 8, 12, 16$ agrees very closely with CHANDRASEKHAR's formula. For $n = 8, 12, 16$, after 2 to 3 relaxation times, an internal structure is approached which shows no appreciable change within the next 10 relaxation times. The only exception is the density at great distance, which increases steadily due to stars escaping from the center. This might be used for an estimate of cluster ages. The density distribution of the inner region agrees with an isothermal polytrope, but deviations of 25% could be real.

The velocity distribution is maxwellian within 17%, but shows a remarkable excess of higher velocities. These are due to close pairs and have nothing to do with escaping stars. Therefore, the velocity distribution does not seem to give an adequate description and should be replaced by the distribution of the total energies (kinetic plus potential) of the stars.

Compared with theory, the production of stars with higher energies is too small by a factor of about 5. A rediscussion of the theory is suggested.

I. Einleitung und Aufgabenstellung

1. Die zeitliche Entwicklung isolierter Sternsysteme hat etwas Faszinierendes: Durch die gegenseitige gravitative Wechselwirkung seiner Sterne strebt jedes Sternsystem einem Gleichgewicht zu, das sich jedoch prinzipiell nie erreichen läßt. Im Endzustand des stationären Gleichgewichtes würde eine Maxwellsche Verteilung der Geschwindigkeiten herrschen und die Dichteverteilung einer Isothermen Polytropen. Aber dieser Zustand ist aus zwei miteinander verknüpften Gründen nicht realisierbar: Erstens gehen laufend alle Sterne mit Überentweichgeschwindigkeit dem System verloren, und zweitens hat die Isotherme

Polytrope bei endlicher Zentraldichte eine unendliche Gesamtmasse, beziehungsweise bei endlicher Masse wäre die Dichte überall gleich Null.

Beim Hinstreben auf das stationäre Gleichgewicht verströmt jedes Sternsystem sich somit an seine Umgebung, während der Kern des Systems bei abnehmender Masse und zunehmender Dichte sich zusammenzieht. Erst nach der erfolgten völligen Auflösung ist der stationäre Endzustand erreicht, allerdings nur in Form einer trivialen Lösung, bei der die Dichte überall gleich Null ist.

Ein mehr praktischer Grund für das Interesse an diesen Fragen ist der folgende. Sobald die Entwicklung von Sternhaufen theoretisch gut erfaßt ist, sollte man damit rechnen dürfen, daß die Anwendung der Theorie auf die beobachteten Sternhaufen eine rein dynamische Altersbestimmung von offenen Sternhaufen und Kugelhaufen möglich macht.

2. Jeder Sternhaufen ist zwei Arten von Einflüssen ausgesetzt: erstens dem inneren Energieaustausch (seiner Haufensterne untereinander), zweitens äußeren Kräften (Energieaustausch mit Feldsternen, Gezeitenwirkung der Milchstraße). In beiden Fällen erhalten laufend einige Sterne Überentweichgeschwindigkeit und gehen dem Haufen verloren. Im ersten Fall kontrahiert der restliche Haufen, im zweiten Fall dehnt er sich weiter aus, und beides führt schließlich zur Auflösung des Haufens. Welcher von beiden Einflüssen überwiegt, hängt nur von der Dichte des Haufens ab. In der vorliegenden Arbeit soll allein die innere Wechselwirkung betrachtet werden.

Eine erstrebenswerte Art der Darstellung wäre die, daß ein vorgegebenes Sternsystem nach einigen Relaxationszeiten ein *stationäres Gleichgewicht* erreicht und bis zum Ende beibehält. Hiermit sei ein Zustand gemeint, dessen mathematische Beschreibung für alle Systeme und zu allen Zeiten stets die gleiche Form hat, wobei jedoch die Parameter dieser Beschreibung von der Masse abhängen und sich mit der Zeit langsam und stetig verändern. — Eine derartige geschlossene und vollständige Theorie der Entwicklung von Sternhaufen liegt jedoch noch nicht vor.

3. Die Zeitskala des Energieaustausches wird Relaxationszeit genannt. Der Begriff der Relaxation wurde 1866 von MAXWELL eingeführt und 1916 von JEANS und von K. SCHWARZSCHILD auf Sternsysteme angewandt. Dieses Problem des Energieaustausches und die damit verbundene Abwanderung genügend schneller Sterne wurde ab 1938 in Arbeiten von AMBARZUMIAN, SPITZER, CHANDRASEKHAR und WILLIAMSON wieder aufgegriffen und erhielt seine klassische Form durch CHANDRASEKHAR in "Principles of Stellar Dynamics". (Siehe dort auch Zitate der früheren Arbeiten.) Die wichtigsten Züge dieser Theorie werden in Abschnitt II kurz geschildert werden.

CHANDRASEKHAR gibt Formeln an für die Dauer einer Relaxationszeit und für den Bruchteil der entweichenden Sterne. Auf diesen Grundlagen

haben sich einerseits inzwischen eine Reihe weiterer Arbeiten aufgebaut, die entweder die zeitliche Entwicklung der Masse und des Radius eines Sternhaufens betrachten (KING 1958b, v. HOERNER 1958, MATSUNAMI u. Mitarb. 1959, GUREWICH u. LEVIN 1950), oder die die Verteilung von Dichte und Geschwindigkeit untersuchen (WOOLLEY u. ROBERTSON 1956, BELZER, GAMOW u. KELLER 1951, WOOLLEY 1954, WOOLLEY 1956, v. HOERNER 1957a, RUPRECHT 1958, HENON 1959a, HENON 1959b, OORT u. VAN HERK 1959).

Andererseits lassen sich gegen die Ableitung der benutzten Formeln und vor allem gegen ihre Anwendung auf Sternhaufen eine Reihe von Einwänden vorbringen. In einigen Arbeiten wurde versucht, einigen dieser Einwände zu begegnen bzw. sie zu korrigieren (HENON 1958, KING 1958a, KING 1959, SPITZER und HÄRM 1958), doch kann von einer befriedigenden Lösung aller Probleme zur Zeit noch keine Rede sein.

Die gegenwärtige Situation läßt sich dadurch beschreiben, daß es eine Anzahl vertrauenerweckender, aber keineswegs sicherer Ansätze gibt für die Beschreibung einzelner Zonen eines Sternhaufens: Zentrum, Zwischengebiet, Bereich des radialen Gleichgewichtes, Außenbereich (v. HOERNER 1957); die mathematische Beschreibung dieser Bereiche ist teilweise reichlich kompliziert und wird es um so mehr, je exakter sie sein will. Eine exakte Beschreibung des Systemes im ganzen, mit seiner zeitlichen Entwicklung, dürfte jedoch vermutlich ganz hoffnungslos kompliziert werden. — Weiterhin ist zur Zeit noch völlig ungeklärt, wieviel Sterne eigentlich ein Haufen mindestens enthalten sollte, damit die bisherigen Ergebnisse noch auf ihn angewendet werden dürfen.

4. Aus dieser Situation heraus entstand der Plan zu der vorliegenden Arbeit. Ihre grundlegende Idee ist die folgende: Werden die Versuche der analytischen Beschreibung kompliziert und unbefriedigend, so greife man (zumindest vorübergehend) zur Methode der „Experimentellen Mathematik“. Man nehme einen kleinen Sternhaufen zufälliger Art, setze ihn auf eine möglichst schnelle elektronische Rechenmaschine, integriere numerisch die Bewegungsgleichungen über längere Zeit, und sehe zu, wie er sich entwickelt. — Ein gewisses Maß an Genauigkeit sowie die Abschätzung ihrer Größe läßt sich durch Mittelung über mehrere Beispiele erreichen.

Dabei sollte die Rechnung und die Ausgabe der Ergebnisse so angelegt werden, daß sich, falls möglich, die folgenden Fragen beantworten lassen:

1. Bezüglich der Rechentechnik:

a) Hat es überhaupt einen Sinn, die Theorie der Sternhaufen bereits mit wenigen Sternen prüfen zu wollen?

b) Wie müssen Rechenmethode und Schrittweite gewählt werden, damit sich, bei erträglichem Aufwand, eine genügende Genauigkeit ergibt?

- c) Wie steigt der Rechenaufwand mit der Anzahl n der Sterne?
- 2. Bezüglich der ersten Phase der Entwicklung:
 - a) Wie lang ergibt sich die Relaxationszeit?
 - b) Welche Verteilungen von Dichte und Geschwindigkeit spielen sich ein?
 - c) Wieviel Sterne/Relaxationszeit verlassen den Haufen?
- 3. Bezüglich der weiteren Entwicklung:
 - a) Wie verläuft die zeitliche Abnahme von Masse, Radius und Relaxationszeit des Haufens?
 - b) Wie verändern sich die Verteilungen von Dichte und Geschwindigkeit über längere Zeiträume?
 - c) Von wann ab sollte man die Auflösung des Haufens als „beendet“ betrachten, und wie sieht dieser Endzustand aus?

4. Als ein erster Schritt auf diesem Wege wurden auf der Tübinger Maschine „Siemens 2002“ einige Beispiele gerechnet mit $n = 4, 8, 12$ und 16 Sternen. Diese Beispiele hatten ursprünglich nur den Zweck, die Fragen der ersten Gruppe zu klären. Ihre Auswertung ergab jedoch bereits recht interessante Antworten auf die Fragen der zweiten Gruppe sowie einige weitere, nicht vorhergesehene Hinweise.

Auf die Beantwortung der Fragen der dritten Gruppe wurde bei diesem ersten Schritt noch verzichtet. Hierfür ist ein gesondertes und weit umfangreicheres Programm nötig. Dazu muß erst noch geklärt werden, wie man während der laufenden Abwanderung schneller Sterne eigentlich den „restlichen Haufen“ definieren soll, genauer gesagt seinen Radius und die Anzahl seiner verbleibenden Sterne. Aber auch der Mittelpunkt dieses restlichen Haufens ist schwer zu definieren: weil die schnellen Sterne in Zufalls-Richtungen davonfliegen, erhält der restliche Haufen Zufalls-Impulse und beginnt zu wandern. — Eine theoretische Abschätzung ergab, daß nach spätestens 10 Relaxationszeiten der Schwerpunkt und dessen Geschwindigkeit neu zu bestimmen sind.

5. Weitere Rechnungen dieser Art sind geplant, können jedoch, wegen einer längeren Abwesenheit, erst nach über einem Jahr durchgeführt werden.

Die vorliegende Arbeit will keine endgültigen Ergebnisse liefern. Sie will vor allem eine neue Methode vorschlagen, die Möglichkeit von Erfolgen zeigen, weitere Rechnungen vorbereiten, und möchte auch andernorts zu ähnlichem Nachdenken anregen.

II. Theoretische Grundlagen und Erwartungen

Im folgenden sollen von der Theorie der Sternsysteme nur diejenigen Punkte (kurz und zusammengefaßt) geschildert werden, die als Grundlagen der durchgeführten Rechnungen dienen oder zu ihrer Auswertung herangezogen werden. — Alle Arbeiten, die den detaillierteren Aufbau

oder die spätere zeitliche Entwicklung beschreiben, sollen erst in einer zukünftigen Arbeit anhand von weiteren Rechnungen besprochen werden. — Das heißt, daß wir uns hier, mit wenigen Ausnahmen, auf die Darstellung von CHANDRASEKHAR (1947) beschränken wollen.

IIa. Relaxationszeit und Abwanderung

1. CHANDRASEKHAR geht davon aus, daß jeder Stern in einem homogen und isotrop verteilten Sternfeld eine Folge von kleineren und größeren Wechselwirkungen mit den anderen Sternen erfährt, die jeweils eine Änderung ΔE_k der kinetischen Energie des Sternes bewirken. Er betrachtet nur die Wechselwirkung je zweier Sterne und nimmt an, daß die Energieänderungen sich im Mittel mit wachsender Zeit quadratisch addieren:

$$\Sigma \Delta E_k^2 \sim dt. \quad (1)$$

Die Relaxationszeit T wird dann definiert durch

$$\frac{\Sigma \Delta E_k^2}{E_k^2} = \frac{dt}{T}, \quad (2)$$

wobei E_k hier die mittlere kinetische Energie eines Sternes bedeutet. Unter der Voraussetzung Maxwell'scher Verteilung der Geschwindigkeiten wird nun für die Begegnung je zweier Sterne der Mittelwert von ΔE_k^2 berechnet, gemittelt über alle Richtungen, Abstände und Geschwindigkeiten. Dabei divergiert die Integration über die Abstände logarithmisch (in Wirklichkeit sind die Wechselwirkungen mit den ferneren Sternen keine Zweier-Begegnungen und heben sich weitgehend gegenseitig auf). Daher schneidet CHANDRASEKHAR diese Integration ab, und zwar bei der mittleren gegenseitigen Entfernung benachbarter Sterne. Schließlich ergibt sich (CHANDRASEKHAR 1947, Formel 2. 379):

$$T = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(Gm)^2} \frac{V_2^3}{\varrho} \frac{1}{\ln(p V_2^2)} \quad (3)$$

mit: G Gravitationskonstante; m Masse eines Sternes; ϱ Dichte (= Anzahl Sterne/Volumen); V_2 Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat; $p = (6 \varrho/\pi)^{1/3}/(2Gm)$.

Bei der Anwendung auf Sternhaufen wird erstens die Dichte ersetzt durch

$$\varrho = \frac{3}{4\pi} \frac{n}{R^3}, \quad (4)$$

wobei n die Anzahl der Sterne des Haufens ist und R sein Radius. Zweitens wird der Virialsatz benützt:

$$V_2^2 = \frac{Gmn}{2r_{-1}}. \quad (5)$$

Dabei ist r_{-1} zwar von gleicher Größenordnung wie der Radius des Haufens, ist jedoch anders definiert, und zwar als reziproker gemittelter

Abstand r_{ij} je zweier Haufensterne

$$\frac{1}{r_{-1}} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{r_{ij}}. \quad (6)$$

Vernachlässigt man mit CHANDRASEKHAR den Unterschied zwischen r_{-1} und R , so erhält man aus (3):

$$T = \frac{1}{16} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{nR^3}{Gm} \right)^{1/2} \frac{1}{\ln(n/2^{3/2})}. \quad (7)$$

Legt man jedoch Wert auf die Unterscheidung zwischen r_{-1} und R , so ist die obige Formel noch rechts zu multiplizieren mit

$$\left(\frac{R}{r_{-1}} \right)^{3/2}, \quad (7a)$$

wobei in dem logarithmischen Term $r_{-1} = R$ gelassen wurde.

2. Für das Entweichen der Sterne mit hoher Geschwindigkeit setzt CHANDRASEKHAR (nach AMBARZUMIAN und SPITZER) an, daß erstens während je einer Relaxationszeit eine volle Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeiten entsteht, und daß zweitens alle Sterne mit Überentweichgeschwindigkeit den Haufen verlassen. Die Entweichgeschwindigkeit V_∞ ergibt sich, aus dem Virialsatz, im Mittel zu

$$V_\infty = 2 V_2 \quad (8)$$

und der Bruchteil aller Sterne mit $V \geq V_\infty$ ist bei der Maxwell-Verteilung

$$Q = 0,0074. \quad (9)$$

Somit sollten im Mittel pro Relaxationszeit 0,74% aller Sterne dem Haufen verlorengehen.

CHANDRASEKHAR weist darauf hin, daß nicht jeder Stern mit hoher Geschwindigkeit den Haufen auch wirklich verlassen wird, der Stern muß erst noch einen Teil des Haufens durchlaufen und kann dabei durch Wechselwirkung mit anderen Sternen einen Teil seiner Energie wieder verlieren. Vor allem bei Haufen mit geringer Sternzahl n wird dieser Effekt wirksam. Nach KING (1959) verlängert sich jedoch auch bei $n = 20$ die „effektive Relaxationszeit“ dadurch nur um 31%.

IIb. Charakteristische Größen

1. Einige, für Aufbau und Entwicklung eines Sternhaufens charakteristische Größen sollen miteinander verglichen werden (siehe auch HENON 1958). Wir definieren:

$$\begin{aligned} R & \text{ mittlerer Radius des Haufens; } R_g \text{ Radius des Wirkungs-} \\ & \text{querschnittes eines Sternes für gravitative Wechselwirkung;} \\ \lambda & \text{ freie Weglänge der Sterne im Haufen; } D \text{ mittlerer Abstand} \\ & \text{benachbarter Sterne.} \end{aligned} \quad (10)$$

Es folgt eine grobe Abschätzung dieser Längen.

Wir setzen $r_{-1} = R$, verzichten auf Korrekturfaktoren der Größenordnung eins und erhalten aus dem Virialsatz:

$$R = \frac{Gmn}{2V^2} . \tag{11}$$

Für den „Gravitationsabstand“ R_g setzen wir an: Würde ein Stern mit der Geschwindigkeit V an einem zweiten Stern (geradlinig) mit dem kleinsten Abstand A vorüberfliegen, so beträgt die Dauer der Begegnung etwa A/V ; und während dieser Zeit erhält er eine Beschleunigung der Größe Gm/A^2 . Dadurch erhält er eine auf den zweiten Stern gerichtete Geschwindigkeitskomponente der Größe $(Gm/A^2) \cdot (A/V)$. Von einer

Tabelle 1.
Näherungswerte der charakteristischen Größen

n	D/R_g	λ/R	λ/D
	$= 0,5 n^{2/3}$	$= 0,05 n$	$= 0,025 n^{4/3}$
8	2,0	0,4	0,4
16	3,2	0,8	1,0
20	3,7	1,0	1,4
30	4,8	1,5	2,3
50	6,7	2,5	4,5
100	10,8	5	12
300	22	15	48
1000	50	50	250

„starken“ Wechselwirkung können wir dann sprechen, sobald dieser letzte Ausdruck vergleichbar mit V wird, z. B. gleich $V/2$. Den hierzu gehörigen Wert von A setzen wir gleich R_g und erhalten

$$R_g = \frac{2Gm}{V^2} = \frac{4R}{n} . \tag{12}$$

Zur Abschätzung der freien Weglänge λ setzen wir $\lambda = VT$, wobei wir in dem logarithmischen Term von (7) die Abhängigkeit von n vernachlässigen und $n = 20$ setzen. Dann ist:

$$\lambda = 0,05 nR . \tag{13}$$

Für den mittleren Abstand benachbarter Sterne setzen wir mit CHANDRASEKHAR an (1947, Formel 5. 214):

$$D = 2R/n^{1/3} . \tag{14}$$

2. Die Größenfolge dieser vier Längen ist damit:

$$R_g \ll D \ll R \ll \lambda \quad \text{für} \quad n \gg 1 , \tag{15}$$

während für kleine Sternzahlen n die obige Folge durchaus nicht gilt, wie die obenstehende Tabelle zeigt.

Zusammenfassend ergibt sich:

1. Erst für größere n ist jeder Stern im Mittel gravitationsmäßig „weit“ von seinen Nachbarn entfernt (Spalte 2).

2. Bevor ein Stern eine größere Wechselwirkung erfährt, beschreibt er eine Anzahl von Umläufen, die proportional zu n wächst. Jedoch ist erst für $n > 20$ die freie Weglänge größer als der Radius des Haufens (Spalte 3).

3. Bevor ein Stern eine größere Wechselwirkung erfährt, fliegt er an einer Anzahl von Sternen vorbei, die proportional zu $n^{4/3}$ wächst. Doch ist er für $n < 20$ praktisch dauernd in Wechselwirkung mit mindestens einem seiner Nachbarn (Spalte 4).

Hieraus könnte man den Eindruck gewinnen, in Anbetracht der Ableitung von Formel (3), daß bei einer numerischen Rechnung der geplanten Art mindestens eine Anzahl von 50 bis 100 Sternen nötig sei, um die Theorie zu kontrollieren. — Doch kann hierüber schließlich nur der Versuch entscheiden, da auch die Werte der Tabelle 1 bei kleinem n nicht mehr zu stimmen brauchen.

IIc. Gleichgewicht

1. Da sich die Rechnungen nur über die erste Phase der Entwicklung erstrecken sollen, ist es zweckmäßig, die entweichenden Sterne nicht „abzustreichen“, sondern noch weiter mit zu berücksichtigen. Dann ist die Gesamtenergie des Haufens zeitlich konstant:

$$E = E_k + E_p = \text{const} \quad (16)$$

mit

$$E_k = \frac{mn}{2} V_2^2 \quad \text{und} \quad E_p = - \frac{n(n-1)}{2} \frac{Gm^2}{r_{-1}}. \quad (17)$$

Dabei ist r_{-1} nach (6) definiert, und V_2 ist die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat.

Im zeitlichen Mittel sollte für den Haufen der Virialsatz gelten:

$$2E_k + E_p = 0, \quad (18)$$

so daß wegen (16) und (18) auch E_k und E_p einzeln konstant bleiben. Dadurch sind dann V_2 und r_{-1} ebenfalls im Mittel konstant:

$$r_{-1} = \frac{n(n-1)(2K-1)Gm^2}{-4KE} \quad \text{und} \quad V_2 = \left\{ \frac{-2E}{mn(2K-1)} \right\}^{1/2} \quad (19)$$

wobei die Größe K durch

$$K = \frac{-E_p}{2E_k} = \frac{Gmn}{2r_{-1}V_2^2} \quad (20)$$

definiert ist. Bei Erfüllung des Virialsatzes sollte dann

$$K = 1 \quad (21)$$

sein.

2. Für die Verteilung der Geschwindigkeiten soll nur geprüft werden, ob sie, zumindest für nicht zu große E , der Maxwellverteilung gleicht:

$$f(V) = 3 \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{V^2}{V_2^3} e^{-3/2(V/V_2)^2}, \quad (22)$$

wobei in Umgebung der Entweichgeschwindigkeit

$$V_\infty = 2V_2 \quad (23)$$

ein Defizit gegenüber (22) zu erwarten ist.

Im zentralen Teil des Haufens sollte sich eine Isotherme Polytrope einspielen, deren Längenskala nach CHANDRASEKHAR (1947, Formel 5. 806) gegeben ist durch:

$$r_0 = \frac{V_2}{\sqrt{12 \pi G m \varrho_0}} \quad (24)$$

und deren Verlauf dort aus Tabelle 13 entnommen werden kann (ϱ_0 ist die Dichte im Mittelpunkt; in Sterne/Volumen).

Weiterhin sollte sich weit außen nach v. HOERNER (1957 a) die Verteilung

$$\varrho(r) = \text{const}/r^4 \quad \text{für } r \gg R \quad (25)$$

ergeben, wenn man nur voraussetzt, daß die während jeder Relaxationszeit erzeugte Verteilung der Geschwindigkeiten stetig ist in der Umgebung der Entweichgeschwindigkeit.

II d. Die Rechendauer

1. Benötigt man A Operationen, um die gegenseitige Anziehung je zweier Sterne zu berechnen, so ist

$$1 \text{ Zeitschritt} = \frac{n^2}{2} A \text{ Operationen}, \quad (26)$$

wenn wir n gegen n^2 vernachlässigen.

Die Länge eines Zeitschrittes läßt sich nicht allgemein festsetzen; sie soll sich stets nach *den* beiden Sternen richten, die den kleinsten Abstand voneinander haben. Wir definieren eine mittlere Vorübergangszeit zweier Nachbarn:

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D_0}{V_2}, \quad (27)$$

wobei D_0 der mittlere Abstand zweier Nachbarn ist. Nach CHANDRASEKHAR (Formel 5.214) ist

$$D_0 = 2 R/n^{1/3} \quad (28)$$

2. Für die Relaxationszeit machen wir die gleichen Vernachlässigungen wie für die Ableitung von (7) und (13) und erhalten

$$T = 0,05 \frac{n R}{V_2} \quad (29)$$

und damit schließlich

$$T/\tau_0 = 0,035 n^{4/3}. \quad (30)$$

Nun brauchen wir aber nicht die mittlere Vorübergangszeit zweier Nachbarn, sondern die Vorübergangszeit τ_m der beiden Sterne, die den *kleinsten* Abstand D_m voneinander haben. Für die gegenseitige Geschwindigkeit dieser beiden Sterne setzen wir an

$$V_m = \sqrt{2} V_2 (D_0/D_m)^{1/2} \quad (31)$$

und erhalten für $\tau_m = D_m/V_m$ dann:

$$\tau_m/\tau_0 = (D_m/D_0)^{3/2} \quad (32)$$

Ist $f(D)$ die Verteilung der gegenseitigen Abstände, so ist der kürzeste Abstand D_m zu berechnen aus

$$\frac{n^2}{2} \int_0^{D_m} f(D) dD = 1. \quad (33)$$

Die Verteilung $f(D)$ ist nicht bekannt. Machen wir den einfachsten Ansatz, daß die n Sterne innerhalb einer Kugel vom Radius R gleichverteilt sind, so sollte sein:

$$f(D) dD = \frac{4\pi D^2 dD}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3D^2 dD}{R^3} \quad \text{für } D \ll D_0. \quad (34)$$

Durch Einsetzen von (34) in (33) ergibt sich dann mit (32)

$$\tau_0/\tau_m = 2n^{1/2} \quad (35)$$

und mit (30) schließlich

$$T/\tau_m = 0,07 n^{11/6} \approx 0,07 n^2. \quad (36)$$

3. Für die numerische Rechnung werden wir die Festsetzung treffen, daß die Länge h eines Zeitschrittes stets durch

$$h = \tau_m/\mu \quad (37)$$

definiert sein soll. Dabei ist μ eine Konstante, die vor Beginn der Rechnung frei eingesetzt wird, und durch die dann die Genauigkeit der Rechnung bestimmt ist. Damit ergibt unsere Abschätzung

$$1 \text{ Relaxationszeit} = 0,07 n^2 \mu k \text{ Zeitschritte}, \quad (38)$$

wobei wir einen Korrekturfaktor k eingeführt haben, um zu berücksichtigen, daß im Zentrum des Haufens die Dichte weit höher ist, als die für (34) benutzte mittlere Dichte. Im Hinblick auf (32) sollte dabei

$$k \approx (\varrho_0/\bar{\varrho})^{1/2}$$

sein, und wenn wir das Dichteverhältnis mit etwa 10 ansetzen, so ist

$$1 \text{ Relaxationszeit} = 0,2 n^2 \mu \text{ Zeitschritte} \quad (39)$$

und aus (26) ergibt sich

$$1 \text{ Relaxationszeit} = \frac{\mu A}{10} n^4 \text{ Operationen}. \quad (40)$$

Dieses Ergebnis, daß der Rechenaufwand mit n^4 ansteigt, ist äußerst ungünstig und setzt praktisch eine scharfe Grenze für die Anzahl der Sterne. Bereits die doppelte Anzahl ergibt eine 16fache Rechendauer.

III. Methode der Rechnung

IIIa. Die Bewegungsgleichungen

Da nur die erste Phase der Entwicklung gerechnet werden soll, werden stets für jeden der n Sterne die Anziehungskräfte der übrigen $(n-1)$ Sterne berechnet. Weiterhin werden alle Sterne mit gleicher Masse,

$m = 1$, angesetzt. — Dann lauten die Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\frac{dx_{\alpha i}}{dt} = u_{\alpha i}; \quad \frac{du_{\alpha i}}{dt} = -Gm \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{x_{\alpha i} - x_{\alpha j}}{r_{ij}^3} \quad (41)$$

mit

$$\alpha = 1, 2, 3$$

$$i, j = 1 \dots n$$

und

$$r_{ij} = \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 (x_{\alpha i} - x_{\alpha j})^2 \right\}^{1/2}.$$

Dies ist ein System von $6n$ gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung (z. B. 96 bei $n = 16$).

Für die Durchführung setzen wir

$$1 \text{ Zeiteinheit} = \left\{ \frac{(\text{Längeneinheit})^3}{Gm} \right\}^{1/2}, \quad (42)$$

damit ist dann gerade

$$Gm = 1 \quad (43)$$

in allen bisherigen Formeln einzusetzen.

IIIb. Anfangsbedingungen

Das Programm war so angelegt, daß verschiedene Dichteverteilungen gewählt werden konnten. Aus Zeitgründen wurden jedoch alle Rechnungen nach dem gleichen Modell, und zwar mit homogener Dichte, begonnen. Der Aufbau eines solchen homogenen Modelles lief in der folgenden Weise ab:

1. Erzeugung einer Reihe von Zufallszahlen nach v. HOERNER (1957b). Man geht aus von einer beliebigen Zahl x_0 in $0,59 < x_0 < 0,91$ und bildet eine Folge*

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n^2 + 0,32 & \text{für } x_n^2 < 0,59 \\ x_n^2 & \text{für } x_n^2 \geq 0,59. \end{cases} \quad (44)$$

Von jeder Zahl x_n dieser Folge ist das erste Viertel ihrer Ziffern zu streichen, der Rest ist als Zufallszahl zu benutzen.

2. Mit Hilfe dieser Zufallszahlen werden die Orts- und Geschwindigkeits-Koordinaten der n Sterne so erzeugt, daß sie Zufallsentnahmen aus einer Gleichverteilung darstellen innerhalb einer Kugel vom Radius 1 um den Nullpunkt.

3. Alle Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten werden um ihre Mittelwerte verschoben, so daß der Schwerpunkt des Haufens im Nullpunkt liegt und die Geschwindigkeit null hat.

* Es erscheint vorteilhaft, $x_n \cdot x_{n-1}$ anstelle von x_n^2 in (44) zu benutzen.

4. Um ein anfängliches Zusammenfallen oder Auseinanderlaufen des Haufens zu vermeiden, soll anfangs der Virialsatz gelten. Daher wird nach Formel (20) die Größe K berechnet, und alle Geschwindigkeiten werden mit $q = \sqrt{K}$ multipliziert.

III c. Die Schrittweite

Die Schrittweite ist für alle Sterne gleich und richtet sich nach den beiden Sternen, die den kleinsten Abstand voneinander haben. Da man jedoch nicht im voraus wissen kann, wie nahe sich irgendwann zwei Sterne kommen werden, so muß mit variabler Schrittweite gerechnet werden. Vor jedem Schritt wird sie neu festgelegt. Ist τ_m die Vorübergangszeit der beiden engsten Sterne, so soll die Schrittweite h gegeben sein durch

$$h = \tau_m / \mu. \quad (45)$$

Die Konstante μ bestimmt die Genauigkeit der Rechnung, sie ist vorher festzulegen. Durch diese variable Schrittweite wird ein gelegentliches Divergieren der Lösung verhindert.

Ist D_m der gegenseitige Abstand der beiden engsten Sterne, und V_m die Differenz ihrer räumlichen Geschwindigkeiten, so würde es im allgemeinen genügen, $\tau_m = D_m / V_m$ zu setzen. Es könnte jedoch gelegentlich vorkommen, daß die beiden Sterne zur Zeit der Abfrage gerade nahezu parallel fliegen und $V_m \approx 0$ ist. In diesem Fall würde dann die Schrittweite durch diejenige Zeit bestimmt sein, die die beiden Sterne brauchen, um durch ihre Anziehungskraft aufeinander zuzulaufen: $\tau_m = (2D_m^3)^{1/2}$ für $Gm = 1$. Für den vorliegenden Zweck genügt es, die beiden Ausdrücke für τ_m reziprok zu addieren, so daß der jeweils kleinste den Ausschlag gibt. Damit ergibt sich dann

$$\tau_m = \frac{D_m \sqrt{2D_m}}{1 + V_m \sqrt{2D_m}}. \quad (46)$$

III d. Das Näherungsverfahren

1. Bei variabler Schrittweite ergeben sich recht komplizierte Formeln, daher soll nur in zweiter Näherung gerechnet werden. Zur Erhöhung der Genauigkeit werden die Geschwindigkeiten für Zeitpunkte berechnet, die um eine halbe Schrittweite hinter den Ortspunkten zurückliegen. Nach einem Vorschlag von A. SCHLÜTER (1960) wird anschließend eine „halbe Iteration“ durchgeführt, wodurch sich die Genauigkeit wesentlich erhöht, ohne daß eine Neuberechnung der Beschleunigung nötig ist.

Um die Abhängigkeit der Rechengenauigkeit von den einzelnen Faktoren zu erproben, wurde das Programm so angelegt, daß nach Wahl in erster oder zweiter Näherung gerechnet werden konnte, und mit oder ohne Iteration.

2. Es sei x eine der Ortskoordinaten, u die zugehörige Geschwindigkeit und b die Beschleunigung. Der untere Index bezeichne den Zeitpunkt,

eine obere Null bedeute „ohne Iteration“. Weiterhin sei

$$a_2 = \frac{b_2 - b_1}{h_2} \quad \text{und} \quad d_2 = a_2 - a_1.$$

Zur Ableitung der Formeln wurde in Abb. 1 davon ausgegangen, daß die ausgefüllten Punkte bekannt sind, die rechts davon liegenden Werte sind zu berechnen. Für die Beschleunigung wird der Ansatz benutzt:

1. Näherung: $b = \text{const} = b_1$,
 2. Näherung: $b = \text{linear} = b_1 + a_1 t$.
- (47)

Dann ergibt die Integration von u und x :

1. Näherung	2. Näherung
$u_2^0 = u_1 + k_0 b_1$	$u_2^0 = u_1 + k_0 b_1 + k_2 a_1$
$x_2^0 = x_1 + h_2 u_2^0$	$x_2^0 = x_1 + h_2 u_2^0 + k_1 a_1$

(48)

mit den Faktoren

$$k_0 = \frac{h_2 + h_1}{2}, \quad k_1 = \frac{h_2^3}{24}, \quad k_2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{8}.$$

3. Nach Ausführung dieses Schrittes (für alle Koordinaten und für alle Sterne) werden aus diesen Orten x_2^0 die neuen Beschleunigungen b_2 nach (41) berechnet. Nun wird eine „halbe Iteration“ durchgeführt, bei

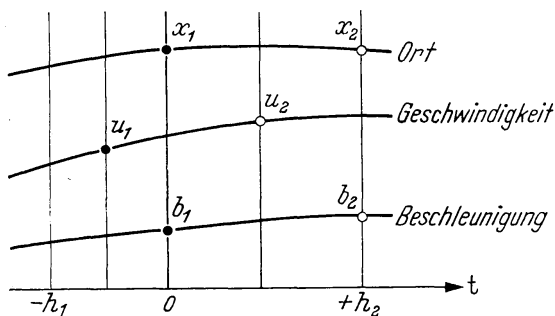


Abb. 1. Schema der Rechenpunkte

der, in *nächsthöherer Ordnung*, die Werte für x und für u verbessert werden. Damit ist dann dieser Schritt beendet; für die verbesserten Werte von x werden also keine Beschleunigungen berechnet, sondern die unverbesserten Beschleunigungen werden für den nächsten Schritt benutzt.

Zur Ableitung der Formeln wird der Ansatz benutzt:

1. Näherung: $b = \text{linear} = b_1 + a_2 t$
 2. Näherung: $b = \text{quadratisch} = b_1 + a_1 t + \frac{d_2}{h_2 + h_1} (h_1 t + t^2)$
- (49)

und die Integration von u und x ergibt:

1. Näherung	2. Näherung
$u_2 = u_2^0 + k_2 a_2$	$u_2 = u_2^0 + k_3 d_2$
$x_2 = x_2^0 + k_4 a_2$	$x_2 = x_2^0 + k_5 d_2$

(50)

mit den weiteren Faktoren:

$$k_3 = \frac{h_2^2 + 2h_2h_1 - h_1^2}{24}$$

$$k_4 = \frac{h_2}{24} (4h_2^2 - 3h_1^2)$$

$$k_5 = \frac{h_2}{12} (h_2^2 + h_2h_1 - h_1^2) .$$

Der erste Schritt, nach Aufbau eines neuen Modells, wurde stets mit halber Schrittweite gerechnet, und auch dann in erster Näherung, wenn die zweite vorgeschrieben war.

III e. Kontrollen

Zur Kontrolle der Rechengenauigkeit werden (nach einer anfangs festgelegten Anzahl von Rechenschritten) laufend die folgenden Größen berechnet und ausgegeben:

Kontrollgröße	sollte sein
1. Der Abstand des Haufen-Schwerpunktes vom Nullpunkt, r_H	$r_H = 0$
2. Der Betrag der räumlichen Geschwindigkeit des Schwerpunktes, V_H	$V_H = 0$
3. Die Abweichung der Gesamtenergie von ihrem Wert bei $t = 0$, $\Delta E = E - E_0$	$\Delta E = 0$
4. Die Abweichung des Gesamtdrehimpulses von seinem Wert bei $t = 0$, $\Delta J = J - J_0$	$\Delta J = 0$

Die Rechnungen zeigen, daß die anderen Abweichungen gegenüber der von ΔE zu vernachlässigen sind. Wir schätzen nun ab, welche Genauigkeit in ΔE wir für unseren Zweck brauchen. Diese Forderung an die Genauigkeit soll einerseits möglichst niedrig liegen, um die Rechendauer nicht unnötig zu erhöhen, doch soll sie andererseits auch für die zukünftigen Rechnungen ausreichen, die die weitere Entwicklung von Sternhaufen behandeln sollen.

Bei der weiteren Entwicklung wird (durch das Entweichen der schnellen Sterne) die Energie des restlichen Haufens pro Relaxationszeit um den Bruchteil 0,0052 abnehmen (v. HOERNER 1958, Formel 8). Wir fordern nun, daß die Rechenfehler höchstens $\frac{1}{10}$ hiervon betragen sollen. Da wir nicht wissen, in welcher Art die Fehler mit der Zeit wachsen, stellen wir zwei verschiedene Forderungen:

1. Während jeder einzelnen Relaxationszeit soll sein

$$\frac{\Delta E}{E} \leq 5 \cdot 10^{-4} \quad \text{für} \quad \Delta t = T . \tag{51}$$

14a

2. Über eine Anzahl von ν Relaxationszeiten hinweg soll sein

$$\frac{\Delta E}{E} \leq 5 \nu \cdot 10^{-4} \quad \text{für} \quad \Delta t = \nu T \quad (52)$$

mit ν etwa zwischen 5 und 10.

Die Rechnungen ergeben, daß dann die übrigen drei Kontrollgrößen kleiner sind, als man eigentlich zu fordern brauchte.

III f. Die Definition der Relaxationszeit

Von den vielen Möglichkeiten der Definition wurde, teils aus theoretischen und teils aus rechentechnischen Gründen, die folgende ausgewählt.

1. Wir definieren als Energie E_i des i -ten Sternes diejenige Arbeit, die nötig wäre, um ihn ins Unendliche zu bringen, wenn alle andern Sterne feststünden:

$$E_i = \frac{1}{2} V_i^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{1}{r_{ij}}. \quad (53)$$

Die so definierte Energie wäre eine Konstante, wenn nur dieser Stern sich bewegte und die andern Sterne feststünden; die Änderung dieser Energie ist also ein Maß für die Wechselwirkung. (Dagegen ist die Gesamtenergie des Haufens *nicht* etwa gleich der Summe dieser Energien.)

2. Zu Beginn jeder Relaxationszeit notieren wir für jeden Stern seine gegenwärtige Energie und nennen sie E_{i0} . Zugleich berechnen wir die Streuung dieser Energien:

$$\sigma_0 = \sqrt{\overline{E_{i0}^2} - E_{i0}^2}. \quad (54)$$

Weiterhin erhält jeder Stern zu Beginn jeder Relaxationszeit eine positive Markierung.

3. Nach jedem Zeitschritt wird jeder Stern mit positiver Markierung abgefragt, ob für seine gegenwärtige Energie

$$|E_i - E_{i0}| \geq \sigma_0 \quad (55)$$

ist. Wenn ja, wird er *negativ* markiert.

4. Die Relaxationszeit gilt als beendet, sobald die Anzahl negativ markierter Sterne (n_o) die halbe Gesamtzahl erreicht hat:

$$T \text{ beendet, falls } n_o \geq n/2. \quad (56)$$

Vernachlässigt man den Unterschied zwischen Mittelwert und Median, so ergibt eine Abschätzung (unter Benutzung der Formeln (16) bis (21)), daß die obige Definition mit der von CHANDRASEKHAR etwa übereinstimmt, falls

$$\sigma_0 = -\overline{E_{i0}}/3 \quad (57)$$

wäre.

IIIg. Die Ausgabe

Die Ausgabe der Ergebnisse erfolgte durch drei verschiedene Druckpläne.

Druckplan 1: Nach Ablauf einer festen Zahl von Zeitschritten wird jeweils ausgegeben:

1. Die vier Kontrollgrößen r_H , V_H , ΔJ , ΔE (und $\Delta E/E_0$).
2. Die bisherige Gesamtzahl von Zeitschritten.
3. Der gegenwärtige Zeitpunkt.
4. Die Größe K nach (20) zur Kontrolle des Virialsatzes.
5. Die Anzahl n_σ der negativ markierten Sterne, siehe (55).
6. Die Nummern i_m und j_m der beiden Sterne, die sich zur Zeit am nächsten stehen, siehe Abschnitt III c.

Druckplan 2: Nach jeder Relaxationszeit wird ausgegeben:

1. Die Anzahl von Zeitschritten der letzten Relaxationszeit.
2. Die Zeitdauer der letzten Relaxationszeit.
3. Die Anzahl bisheriger Relaxationszeiten.

Druckplan 3: Zu Beginn der Rechnung und nach jeder Relaxationszeit wird ausgegeben:

1. (Nur zu Beginn) Die Größe $q = \sqrt{K}$, mit der nach Abschnitt III b, 4, die Geschwindigkeiten anfangs normiert wurden.
2. Die gegenwärtigen Werte von:
 - r_{-1} = reziprok gemittelte gegenseitige Abstände (6),
 - R_1 = mittlerer Haufenradius = $\bar{r}_i$,
 - R_2 = quadratisch gemittelter Haufenradius = $\sqrt{\bar{r}_i^2}$,
 - V_1 = mittlere Geschwindigkeit = $\bar{V}_i$,
 - V_2 = quadratisch gemittelte Geschwindigkeit = $\sqrt{\bar{V}_i^2}$.
3. Dichteverteilung, durch Anzahl der Sterne in 20 Kugelschalen.
4. Geschwindigkeitsverteilung, ebenfalls in Kugelschalen im Geschwindigkeitsraum. Statt der Geschwindigkeiten selbst wurde $v_i = V_i/q$ benutzt, um auch bei verschiedenen n einheitlich vergleichen zu können.
5. Die mittlere Energie $\bar{E}_{i0}$ der Sterne nach (53) und die Streuung σ_0 dieser Energie nach (54).

IV. Ergebnisse

IVa. Genauigkeit der Rechnung

1. Mit $n = 4, 8$ und 10 Sternen wurden einige Rechnungen über drei Relaxationszeiten durchgeführt, mit dem Ziel, die Genauigkeit der Rechnungen als Funktion von Rechenmethode und Schrittweite zu erhalten. Dabei ergab sich, daß $\mu = 6$ bei zweiter Näherung und Iteration eine ausreichende Genauigkeit liefert. Daraufhin wurden zwei Beispiele, mit $n = 12$ und 16 , über längere Zeit, mit $\mu = 6$ gerechnet.

Tabelle 2 gibt einen Überblick über alle gerechneten Beispiele. Die ersten vier Spalten zeigen die Anzahl n der Sterne, den Grad der Nähe-

rung nach (48), mit oder ohne Iteration nach (50), und das relative Maß μ der Schrittweite nach (45). Es folgt die Anzahl ν der gerechneten Relaxationszeiten, die Gesamtzahl Z der Zeitschritte, und die Zeitdauer t in der Einheit (42). Zum Vergleich wurde die Größe $t V_1/R_1$ hinzugefügt, das ist die Anzahl von Haufenradien, die ein Stern mittlerer Geschwindig-

Tabelle 2. Überblick über alle gerechneten Beispiele verschiedener Genauigkeit. Die letzte Spalte zeigt den maximalen Fehler der Energie des Haufens

Anzahl	Genauigkeit			Dauer				Fehler
n	Nähe- rung	Itera- tion	μ	ν	Z	t	$\frac{t V_1}{R_1}$	$\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{max}$
4	1	0	4	3	16	0,38	0,6	0,016
4	1	0	8	3	206	3,76	5,5	0,002
8	1	0	3	3	122	1,38	3,3	0,08
8	1	0	6	3	467	2,49	6,7	0,11
8	1	0	12	3	823	1,52	5,7	0,016
8	2	0	3	3	217	2,51	6,1	0,03
8	2	0	6	3	488	2,64	7,2	0,012
8	2	0	12	2	208	0,33	1,3	0,0003
8	2	1	3	3	281	3,40	8,3	0,014
8	2	1	6	3	505	2,48	6,7	0,004
10	2	1	4	—	957	1,29	6,4	0,026
12	2	1	6	4	527	1,00	3,3	0,003
16	2	1	6	12	2346	3,40	13,1	0,004

einschließlich der letzten Relaxationszeit, die wegen Bildung enger Doppelsterne abgebrochen wurde:

12	2	1	6	(5)	1647	2,11	6,9	0,004
16	2	1	6	(13)	4722	4,76	18,3	0,017

keit während der Zeit t zurückgelegt hat. Als letztes folgt der Maximalwert der relativen Fehler der Gesamtenergie.

Anmerkung: Bei $n = 10$ war die Zählung der Relaxationszeit nicht in Ordnung. Über die beiden letzten Zeilen siehe Abschnitt IV c.

2. Als nächstes wurde untersucht, wie sich Näherung, Iteration und Schrittweite im einzelnen auf die Genauigkeit auswirken. — Für verschiedene *feste Zeiten* wurde bei allen Beispielen sowohl der maximale als auch der mittlere Fehler der Energie notiert. Das Ergebnis lautet, gemittelt über alles Material:

Durch alleinige Änderung von	erhöht sich die Genauigkeit um einen Faktor
Verdoppelung von μ	10 ± 3
2. (statt 1.) Näherung	3 ± 1
mit Iteration (statt ohne)	4 ± 1

Dabei ist zu bemerken, daß die Verdoppelung von μ (= Halbierung der relativen Schrittweite) nur ein Handgriff an der Maschine ist, während sich die Rechendauer dabei verdoppelt. Auf der anderen Seite erfordert die Einführung einer höheren Näherung eine beachtliche Menge an Vorarbeit, während sich die Rechendauer dadurch praktisch überhaupt nicht ändert (die Rechendauer ist fast allein durch die Berechnung der gegenseitigen Abstände und Beschleunigungen bestimmt).

3. Über das zeitliche Anwachsen der Fehler läßt sich wenig Sicheres sagen. Wegen der großen Streuung müßte hierfür erst mehr Material abgewartet werden. Setzt man das Anwachsen proportional zu t^s an, so ergab eine grobe Abschätzung etwa

$$s \approx 0,8 \pm 0,3 \, . \tag{58}$$

4. In Tabelle 3 zeigen wir die maximalen Werte aller vier Kontrollgrößen, die in Abschnitt IIIe beschrieben wurden. Beim Ort des Haufenschwerpunktes, r_H , ist keine Normierung nötig; die Geschwindigkeit V_H des Schwerpunktes wurde durch g dividiert (Abschnitt III b, 4) und ΔE durch E_0 (anfängliche Energie). Da der anfängliche Gesamt-Drehimpuls J als Zufallsgröße auch gleich Null sein könnte, wurde ΔJ durch den anfänglichen Wert von $R_1 V_1$ dividiert. — Die Tabelle zeigt, daß die anderen Fehler gegenüber dem Fehler der Energie zu vernachlässigen sind. — Die Forderungen (51) und (52) waren stets erfüllt.

Weiterhin ist noch von Interesse, daß zwischen dem maximalen Fehler und dem mittleren Fehler das folgende Verhältnis bestand (gemittelt über alle Beispiele und mehrere feste Zeitspannen):

$$\overline{\Delta E} = \frac{1}{2,3} (\Delta E)_{max} \, . \tag{59}$$

Tabelle 3. Die relative Größe der maximalen Rechenfehler für Ort, Geschwindigkeit, Drehimpuls und Energie des Haufens. Für alle Beispiele mit zweiter Näherung, Iteration und $\mu = 6$. (ν = Anzahl von Relaxationszeiten)

n	ν	$(R_H)_{max}$	$\left(\frac{V_H}{g}\right)_{max}$	$\left(\frac{\Delta J}{R_1 V_1}\right)_{max}$	$\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{max}$
8	3	$9 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$
12	4	$3 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$
16	12	$12 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$

5. Alle Rechnungen wurden mit *Gleitkomma* durchgeführt. Der Rechner „Siemens 2002“ hat 12 Dezimalen für jede Zahl; bei Gleitkomma gehen davon zwei für den Exponenten ab, es bleibt somit eine 10stellige Rechengenauigkeit der einzelnen arithmetischen Operation.

Die Zuverlässigkeit der Maschine war ausgezeichnet: Während der gesamten Rechnungen ist kein nachweislicher Fehler bei Rechnung oder

Ausgabe passiert. Für das Beispiel $n = 16$ wurde die Maschine abends eingeschaltet und über Nacht, ohne Aufsicht, in Betrieb gelassen; am Morgen lief die Rechnung noch immer einwandfrei.

IVb. Dauer der Rechnung

1. Für die Planung weiterer Rechnungen ist es wichtig zu wissen, ob unsere Abschätzung für die Anzahl ΔZ der Zeitschritte pro Relaxationszeit richtig ist. Nach (39) sollte sein:

Tabelle 4. Die Anzahl ΔZ der Zeitschritte/Relaxationszeit

n	$n^2/5$	$\Delta Z/\mu$
4	3,2	5 ± 3
8	12,8	27 ± 7
12	28,8	22 ± 11
16	51,2	33 ± 5

$$\Delta Z = n^2 \mu/5 . \tag{60}$$

Da die Abhängigkeit des ΔZ von μ trivial ist, haben wir durch μ dividiert und dann über alle Fälle mit gleichem n gemittelt. Die letzte Spalte von Tabelle 4 zeigt das Ergebnis; dies ist mit $n^2/5$ zu vergleichen. — Die Abschätzung (39) liefert also durchaus die richtige Größenordnung. Möglicherweise ist der Anstieg von ΔZ mit n nicht ganz so steil wie vorausgesagt, doch ist hier noch weiteres Material abzuwarten.

2. Die Rechendauer pro Zeitschritt wurde durch Stichproben beobachtet. Die Ergebnisse lassen sich gut darstellen durch:

$$1 \text{ Zeitschritt} = \left\{ 3,1 \left(\frac{n}{10} \right)^2 + 0,9 \frac{n}{10} \right\} \text{ sec} . \tag{61}$$

Zur Berechnung der gegenseitigen Anziehung zweier Sterne (sowie für Energie, Suche nach dem engsten Paar, Organisation, usw.) wurden $A = 120$ Operationen benötigt. Zusammen mit unserer Abschätzung (26) und dem Ergebnis (61) bedeutet dies eine Rechengeschwindigkeit der Maschine von rund

$$2000 \text{ Operationen/sec} \tag{62}$$

bei Gleitkommarechnung.

3. Die Rechendauer pro Relaxationszeit sollte nach (40) mit n^4 ansteigen, sobald man alle niedrigeren Potenzen und den logarithmischen Term von (7) vernachlässigen kann. Bei $n = 16$ ergab sich eine Dauer von 40 Minuten. Für Rechnungen mit größerem n würde daraus folgen:

n	1 Relaxationszeit	
16	0,67 Stunden	
20	1,6	„
25	4,0	„
30	8,3	„

(63)

Falls diese Abschätzung sich bestätigt, so müßte die angewandte Methode stets auf relativ wenige Sterne beschränkt bleiben. Oder es ist nach einer Änderung der Methode zu suchen, die die Rechendauer wesentlich verkürzt (Abschnitt Vc, 4).

IVc. Die Bildung enger Doppelsterne

Ein Effekt, der den Ablauf der Rechnung in einigen Fällen wesentlich verzögerte, war die Bildung enger Doppelsterne im Zentrum des Haufens. Der Effekt fällt erstens dadurch auf, daß sich die durch (45) definierte Schrittweite stark verkleinert (*enges* Paar), und zweitens dadurch, daß im Druckplan 1 (Abschnitt IIIg) über längere Zeit stets die gleichen Nummern i_m, j_m erscheinen (lange Lebensdauer des Paares).

Relativ oft bilden sich Paare, die bis zu 4 mal einander umlaufen, bevor sie wieder getrennt werden. Durch diese Paare wurde die Schrittweite nur mäßig verkleinert (Faktor 2). Bei den vier Paaren mit größter Lebensdauer betrug die Anzahl der Umläufe 9, 22, 35 und 43. Gelegentlich verkürzte sich die Schrittweite um einen Faktor 10.

Weiterhin wirkt sich die Paarbildung störend aus auf die nach (56) definierte Relaxationszeit. Durch ein enges Paar wird einerseits die Streuung (54) heraufgesetzt; zweitens wird die Anzahl n der Haufensterne praktisch um 1 vermindert, und drittens brauchen die Sterne eines engen Paares längere Zeit als normal, um (55) zu erfüllen. Die Rechnung mit $n = 12$ wurde wegen eines engen Paares mit langer Lebensdauer abgebrochen; bei $n = 16$ hatte sich im Zentrum eine enge Gruppe von 4 Sternen gebildet.

IVd. Virialsatz und Energieverteilung

1. Bei Gültigkeit des Virialsatzes sollte der Betrag der potentiellen Energie des Haufens doppelt so groß sein wie die kinetische Energie; für den in (20) definierten Quotienten sollte somit $K = 1$ gelten. Die Auswertung der Beispiele mit $n = 8, 12, 16$ ergab im zeitlichen Mittel

$$K = 0,984 \pm 0,015 \quad (64)$$

und bei $n = 16$ betrugen die Extremwerte von K :

$$0,53 \leq K \leq 1,84 . \quad (65)$$

Der geforderte Wert $K = 1$ liegt somit noch innerhalb der Streuung.

2. In Abschnitt IVf, 2 werden wir darauf hinweisen, daß die Verteilung der nach (53) definierten Energien E_i die Entwicklung eines Haufens vermutlich besser beschreibt, als es die Verteilung der Geschwindigkeiten tut. In den vorliegenden Rechnungen wurde leider nicht die Energieverteilung ausgegeben, sondern nur die mittlere Energie $\overline{E}_{i0}$ und die Streuung σ_0 (Druckplan 3, Abschnitt IIIg).

Die mittlere Energie muß etwa konstant bleiben wegen der Konstanz von (19) und wegen $K \approx 1$. Die Streuung dagegen nimmt mit der Zeit zu. Bei $n = 16$ nahm das Verhältnis $\sigma_0/\overline{E_{i0}}$ etwa gleichmäßig zu von anfangs 0,20 bis 0,75 nach 12 Relaxationszeiten, und ähnlich war es auch in den anderen Beispielen. Für $n = 8, 12, 16$ ergab sich als Mittel über die ersten drei bis fünf Relaxationszeiten:

$$S = \tau_0 \overline{E_{i0}} = 0,336. \quad (66)$$

IV e. Die Länge T der Relaxationszeit

1. Wegen der Abwanderung der schnellen Sterne und der Kontraktion des restlichen Haufens sollte sich die Relaxationszeit laufend verkürzen (KING 1958 b, v. HOERNER 1958), und zwar linear mit der Zeit. — Dieser Effekt kann bei der vorliegenden Rechnung nicht auftreten, da bei der Definition (56) der Relaxationszeit stets alle n Sterne berücksichtigt werden. Die Relaxationszeit nimmt hier laufend zu, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Durch die Entwicklung des Haufens nimmt der mittlere Radius zu.
2. Die relative Streuung S der Energien (66) nimmt zu.
3. Bildung enger Doppelsterne.
4. Abwanderung schneller Sterne in Gebiete geringer Dichte.

Am deutlichsten trat der zweite Grund in Erscheinung. Es ist daher zweckmäßig, alle beobachteten Werte von T auf den gleichen Wert von S zu reduzieren, und zwar auf den Wert $S = 1/3$, weil dann gerade unsere Definition der Relaxationszeit etwa mit der von CHANDRASEKHAR übereinstimmt, siehe Formel (57). Statt der beobachteten Werte von T werden wir daher

$$T_{rech} = \frac{T}{3S} \quad (67)$$

als Ergebnis der Rechnung betrachten. Auf andere Reduktionen wurde dagegen verzichtet.

Bei $n = 4$ und 8 sind nur drei Relaxationszeiten je Beispiel gerechnet worden. Für den Vergleich verschiedener n sollten daher auch bei den anderen Beispielen nur die ersten Relaxationszeiten herangezogen werden. Bei $n = 12$ wurden die ersten vier, bei $n = 16$ die ersten fünf Relaxationszeiten benutzt. — Weiterhin sind von den 8 Beispielen mit $n = 8$ (Tab. 2) stets mehrere Beispiele mit gleichen Anfangsbedingungen gerechnet worden (zum Vergleich der verschiedenen Genauigkeiten). Nur drei verschiedene Anfangsbedingungen waren benutzt worden; bei jedem dieser drei suchen wir uns das Beispiel heraus, das mit der größten Genauigkeit gerechnet worden ist. — Tabelle 5 zeigt in der ersten Spalte die Anzahl der Sterne, in der zweiten die Anzahl der Relaxationszeiten, über die gemittelt wurde, und in der dritten Spalte die so erhaltenen Mittelwerte mit ihrem mittleren Fehler.

2. Diese Ergebnisse der Rechnung sind nun mit der theoretischen Formel (7) von CHANDRASEKHAR zu vergleichen. Dagegen soll die Diskussion einiger Verbesserungen von (7) erst in einer späteren Arbeit anhand von weiteren Rechnungen durchgeführt werden (siehe Einleitung). Weiterhin soll gegenwärtig auch der Unterschied zwischen r_{-1} (6) und R (Radius des Haufens) vernachlässigt werden. Anfangs ist $R = 1$ (Abschnitt III b, 2), und da nach (19) r_{-1} wegen des Virialsatzes etwa konstant bleibt, soll auch R als konstant betrachtet werden. Zumindest für die benutzten ersten Relaxationszeiten ist dies zulässig. Mit $Gm = 1$ nach (43) ergibt sich somit aus (7) als theoretischer Wert von T

$$T_{th} = 0,136 \frac{\sqrt{n}}{\ln\left(\frac{n}{2,82}\right)} . \tag{68}$$

Die letzte Spalte der Tabelle 5 zeigt die hiernach berechneten Werte, in der durch (42) definierten Einheit der Zeit.

Tabelle 5. Die Länge T einer Relaxationszeit bei n Sternen

n	Mittlung über Anzahl	Rechnung: T_{rech} nach (67)	Theorie: T_{th} nach (68)
4	6	$0,84 \pm 0,40$	0,784
8	9	$0,68 \pm 0,10$	0,365
12	4	$0,30 \pm 0,03$	0,323
16	5	$0,32 \pm 0,06$	0,313

Die Übereinstimmung in Tabelle 5 ist weit besser, als man eigentlich hätte erwarten sollen. Wieweit diese Übereinstimmung ernst zu nehmen ist, und welche Schlußfolgerungen man daraus ziehen kann, diese Frage wollen wir jedoch vorerst noch etwas offenlassen.

IV f. Die Verteilung der Geschwindigkeiten

1. In Tabelle 6 ist die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung gezeigt. Um auch bei verschiedenen n einheitlich vergleichen zu können, werden im folgenden statt der räumlichen Geschwindigkeit V die Werte

$$v = V/q, \quad (q \text{ nach Abschnitt III b, 4}) \tag{69}$$

benutzt werden. Damit liegen anfangs ($\nu = 0$) alle Geschwindigkeiten innerhalb einer Kugel mit Radius 1 um den Nullpunkt (mit einer Ausnahme bei $n = 16$, die durch die Verschiebung des Schwerpunktes in den Nullpunkt möglich wird, siehe Abschnitt III, b 3).

Nach CHANDRASEKHAR (1947, Formel 5. 306) ist die mittlere Entweichgeschwindigkeit $V_\infty = 2 V_2$. Im Mittel über die gerechneten Beispiele

war $v_2=V_2/q=0,755$, und da V_2 wegen (19) zeitlich konstant ist, so ist also für alle Beispiele und zu jeder Zeit

$$v_\infty=V_\infty/q=1,51\;.$$

(70)

Zunächst sieht man an Tabelle 6, daß die anfängliche Verteilung nicht bestehen bleibt, sondern sich zu niedrigen und hohen Geschwindigkeiten

Tabelle 6. *Die Verteilung der Geschwindigkeiten und ihre zeitliche Entwicklung.* — Die Zahlen geben die Anzahl von Sternen in 20 Kugelschalen des Geschwindigkeitsraumes, jeweils nach Beendigung der Relaxationszeit Nr. v . — Bei $n=8$ wurden drei gerechnete Beispiele zugleich eingetragen

$v \backslash v$		$n = 8$				$n = 12$						$n = 16$															
		0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
0,0	— 0,1																										
0,1	— 0,2				2											1						1		2			
0,2	— 0,3				2			1			3			1		2	3	2	1				2	2			
0,3	— 0,4	3	1	2	1			1	1	1	1	2	2	1		2	2	3	1				3	3	3		
0,4	— 0,5	2	4	1	2			3	1	2	1		2		2	2	2	4		1	1	4	3	2	2	1	
0,5	— 0,6	3	4	1	6			2	3	3	4	4			3	4	4	1	2		5	4	1	1	3		
0,6	— 0,7	4	2	1	1			3	2	1	1	1	1		4	1	1		4	3			3	3	1	2	3
0,7	— 0,8	4	3	5	2			1	2		2	1	1		1	3	2	1	2	1	1	3	3	1	1		1
0,8	— 0,9			6	2	3		1		2	1	1	1		2	1	1	2	1	3		4	1	1	3	1	2
0,9	— 1,0	8	1	3	2			1	2	1		1			2		1	3	1	2	1	2		2	1	3	
1,0	— 1,25			2	3	3				1	1	2			1	4	5	1			3	1	4	3	1	1	2
1,25	— 1,50				2	1				1	1						2	1	1	1				1		2	
1,50	— 1,75			1	2	1														1							
1,75	— 2,00																							1			
.																											
.																											
.																											
3,25	— 3,50												1														
> 3,5													1														

hin ausdehnt. Die Verteilung bekommt also ein Maximum bei $v=0$, und einen „Schwanz“ in Richtung hoher Geschwindigkeit.

2. Alle Sterne in Tabelle 6, die unterhalb der durchgezogenen Linie liegen, haben ihre großen Geschwindigkeiten durch Wechselwirkung mit anderen Sternen erhalten, und alle Sterne unterhalb der gestrichelten Linie haben Geschwindigkeiten größer als die mittlere Entweichgeschwindigkeit. — Eine nähere Untersuchung der schnellen Sterne zeigte jedoch, daß dies keineswegs entweichende Sterne sind, sondern Komponenten enger *Doppelsterne* im Zentrum des Haufens. Auch bei den zwei Sternen mit $v>3$ ist dies der Fall. Von allen Sternen mit größerer Entfernung vom Zentrum hatte kein einziger Stern die für seinen Ort nötige Entweichgeschwindigkeit.

Wir meinen daher, daß die Verteilung der Geschwindigkeiten keine Größe ist, durch die sich die Entwicklung eines Haufens und das Entweichen schneller Sterne einwandfrei beschreiben läßt. Die Verteilung der nach (53) definierten Energien der Sterne dürfte sich vermutlich besser hierzu eignen. Bei zukünftigen Rechnungen ist dies zu berücksichtigen.

3. Trotz dieses Einwandes wollen wir die vorhandene Verteilung der Geschwindigkeiten mit der Maxwell-Verteilung vergleichen:

$$f(v) \, dv = 3 \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \frac{nv^2}{v_2^3} \cdot e^{-\frac{3}{2}(v/v_2)^2} \quad \text{mit} \quad v_2 = 0,755 . \tag{71}$$

Um zu prüfen, wie „schnell“ sich eine Verteilung einstellt, wurde einerseits in allen Beispielen über die 2. und die 3. Relaxationszeit gemittelt, andererseits für $n = 12$ und 16 über die 4. bis 12. Relaxationszeit; weiterhin wurden stets mindestens zwei Kugelschalen zusammengefaßt. — Auf diese Weise wurden die Anzahlen der Sterne hinreichend groß für einen Vergleich.

Die so erhaltenen Zahlen n zeigt Tabelle 7. Zum Vergleich wurde (71) in den gleichen Intervallen von v integriert, mit der entsprechenden Gesamtzahl (104, 168) normiert und in die Tabelle eingetragen.

Tabelle 7. *Die sich einspielende Verteilung der Geschwindigkeiten, verglichen mit einer Maxwellverteilung gleicher Normierung*

v	$\nu = 2, 3$		$\nu = 4 \dots 12$	
	n	Maxwell	n	Maxwell
0,0 — 0,3	4	7,4	19	11,9
0,3 — 0,5	19	21,4	35	34,6
0,5 — 0,7	24	27,2	41	44,0
0,7 — 0,9	23	23,5	33	38,0
0,9 — 1,25	24	20,1	30	32,4
1,25 — 1,75	10	4,2	7	6,8
1,75 — 2,25		0,11	1	0,18
2,25 — 3,00		0,001		0,0012
3,0		$3 \cdot 10^{-8}$	2	$5 \cdot 10^{-8}$
Summe:	104		168	

Der Vergleich zeigt:

1. Bereits nach 2 bis 3 Relaxationszeiten hat sich eine Verteilung der Geschwindigkeiten eingespielt, die sich dann nur noch wenig ändert.
2. Diese Verteilung zeigt keine signifikanten Abweichungen gegenüber einer Maxwell-Verteilung, mit Ausnahme einiger sehr schneller Sterne, die jedoch Komponenten enger Doppelsterne im Haufenzentrum sind.

In Abb. 2 wurden die Verteilungen der 2. bis 12. Relaxationszeit zusammengefaßt und in logarithmischer Form mit der Maxwell-Verteilung gleicher Normierung verglichen. Die weitgehende Übereinstimmung sowie der Überschuß an schnellen Sternen tritt deutlich hervor.

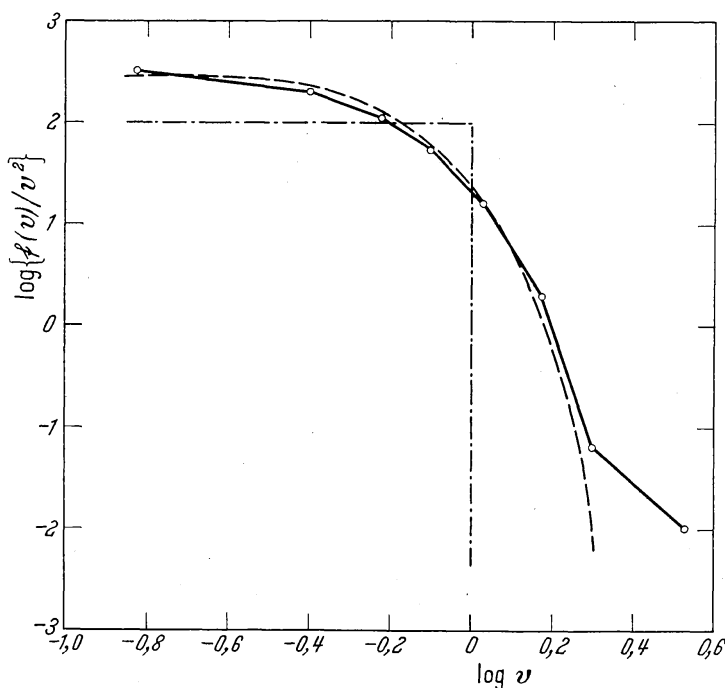


Abb. 2. Die sich einspielende Verteilung der Geschwindigkeiten. · — · — · anfangs vorgegebene Gleichverteilung; ○ — ○ — ○ Rechenergebnis, Mittel über 2 bis 12 Relaxationszeiten; — — — Maxwell-Verteilung

IVg. Die Verteilung der Dichte

1. Tabelle 8 zeigt die zeitliche Entwicklung der Dichteverteilung. Aus der anfänglich vorgegebenen Gleichverteilung entwickelt sich bald ein steiles Maximum der Dichte im Zentrum, während eine zunehmende Anzahl von Sternen in den Außenraum abwandern.

In Abschnitt I, 5 wurde bereits darauf hingewiesen, daß der Schwerpunkt des „restlichen“ Haufens durch die Abwanderung schneller Sterne zu wandern beginnt und nach spätestens 10 Relaxationszeiten neu bestimmt werden müßte. In Tabelle 8 äußert sich dieser Effekt darin, daß bei $n = 16$ sich das zentrale Maximum der Dichte wieder stark abflacht (das eigentliche Dichtemaximum liegt nicht mehr im Nullpunkt). Daher soll im folgenden die 11. und 12. Relaxationszeit nicht mitbenutzt werden.

2. Es soll wieder geprüft werden, wie schnell sich die Dichteverteilung einspielt. Die Zahlen der Tabelle 9 sind die über alle Beispiele addierten Anzahlen von Sternen innerhalb einiger Kugelschalen, einerseits nach der 2. und 3. Relaxationszeit, andererseits nach der 4. bis 10. Relaxationszeit. — Man gewinnt den Eindruck, daß die Dichte im ganzen inneren

Tabelle 8. *Die Verteilung der Dichte und ihre zeitliche Entwicklung.* Die Zahlen geben die Anzahl von Sternen in 20 Kugelschalen um den Nullpunkt, jeweils nach Beendigung der Relaxationszeit Nr. *v*. Bei *n* = 8 wurden drei Beispiele zugleich eingetragen

$\nu \backslash r$		$n = 8$				$n = 12$						$n = 16$													
		0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
0,0 — 0,1				1							1										1				
0,1 — 0,2		1	2				1	1	2				2					1	1						
0,2 — 0,3			1	1	2			1					3	1		1		2	1	3	1	1			
0,3 — 0,4		1	3	4	2		1	2				1	2	1	1					3	1	1	1		
0,4 — 0,5		2	3	2	2		1	1	2	3	1		2	1	1		1	3	2	1	1		3		
0,5 — 0,6		4	1	2	4			1	1		1	1	4	2	2	1	2	1	3	2	1	4	2	2	
0,6 — 0,7		5	4	2	1		3	2	1	3			1	1	1	4	1		3	1	2	1	1	4	
0,7 — 0,8		3	4	2	5		3	3	2		3	4	4	4	2	1	2	1		1	3	1	1		
0,8 — 0,9		6	1	1	1		4	3		1	1		6	2	2		4	4	1		1	1	1	1	
0,9 — 1,0		2	2		3			1	1	2			1	3	3		1		1	2	2				
1,0 — 1,25			5	3	1		1	1	2		2			1	1	3	3	3	3	2		2	1	1	
1,25 — 1,50				2					1	1			1	1	4	1	1	2	1			1		1	
1,50 — 1,75									1		1					1	1		1		1	1	1		
1,75 — 2,00				1						1	1					1									
2,00 — 2,25				1	1						1											1	1	2	
2,25 — 2,50					1																1		1	1	
2,50 — 2,75																	1				1		1		
2,75 — 3,00																		1						1	
3,00 — 3,25											1														
3,25 — 3,50					1															1		1			
> 3,50																					1	1	1	2	2

Bereich bereits nach 3 Relaxationszeiten eine Verteilung angenommen hat, die sich weiterhin wenig ändert. Im Außenraum jedoch steigt die Dichte gleichmäßig weiter an, durch die laufende Abwanderung schneller Sterne aus dem Zentrum.

3. In Abb. 3 wurde die räumliche Dichte der 2. bis 10. Relaxationszeit zusammengefaßt und logarithmisch aufgetragen. Zum Vergleich wurde die Isotherme Polytrope herangezogen. Ihre Längenskala wurde nach (24) festgesetzt durch:

$$r_0 = \frac{V_2}{\sqrt{12\pi G m \varrho_0}} ,$$

Tabelle 9. *Die sich einspielende Dichteverteilung nach verschieden langer Zeit*

<i>r</i>	Anzahl	
	<i>v</i> = 2, 3	<i>v</i> = 4 . . . 10
0,0 — 0,2	7	6
0,2 — 0,4	18	14
0,4 — 0,6	20	25
0,6 — 0,8	19	24
0,8 — 1,0	15	21
1,0 — 1,5	19	25
1,5 — 2,25	4	11
2,25 — 3,25	1	5
3,25	1	5
Summe:	104	136

wobei ϱ_0 die Dichte im Zentrum ist. Im inneren Bereich des Haufens ($r < 1$) betragen die Abweichungen der Rechenergebnisse gegenüber der Isothermen Polytropen im Mittel etwa 25%, während die mittlere Fehlergrenze etwa 15% beträgt. Die Abweichungen mögen somit reell und systematisch sein, doch läßt sich dies noch nicht entscheiden.

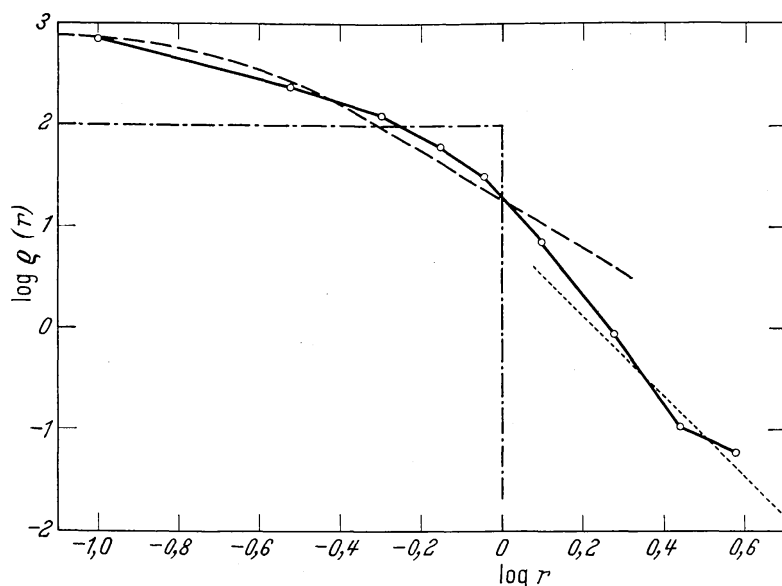


Abb. 3. Die sich einspielende Verteilung der Dichte. ····· anfangs vorgegebene Gleichverteilung
 ○—○—○ Rechenergebnis, Mittel über 2 bis 10 Relaxationszeiten; —·—·— Isotherme Polytrope;
 $\varrho(r) \sim r^{-4}$

In dem weiter außen liegenden Bereich sollte nach (26) die Dichte mit $1/r^4$ abfallen. Die Rechenergebnisse stehen zwar hierzu nicht im Widerspruch, doch sind hier die Fehlergrenzen relativ groß, da sich weit außen nur eine geringe Anzahl von Sternen befindet.

IVh. Die Abwanderung schneller Sterne

1. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die schnellsten Sterne nicht abwandern, sondern Komponenten von Doppelsternen sind. Wir beschränken uns daher jetzt auf die räumlichen Verhältnisse. Zunächst läßt sich nach (9) abschätzen, daß bei dem gesamten Material der Tabelle 8 etwa 2,3 Sterne den Haufen mit Überentweichgeschwindigkeit verlassen sollten. Durch eine Kontrolle der weiter außen liegenden Sterne ergab sich jedoch, daß kein einziger davon die für seinen Ort nötige Entweichgeschwindigkeit hatte.

Weiterhin ist zu bemerken, daß nicht alle über $r = 1$ hinausfliegenden Sterne einen Energiezuwachs durch Wechselwirkung hierzu gebraucht haben. Liegt ein Stern anfangs gerade bei $r = 1$ und hat auch seine Geschwindigkeit ihren Maximalwert $v = 1$ in radialer Richtung, so ergibt eine Abschätzung, daß dieser Stern dann bis zu $r = 2,5$ fliegen kann, ehe

er wieder umkehrt. (Vielleicht wäre es besser gewesen, alle Geschwindigkeiten anfangs so vorzugeben, daß kein Stern über $r = 1$ hinausfliegen kann.) — Dagegen muß die Energie aller Sterne jenseits von $r = 2,5$ aus Wechselwirkungen stammen.

2. Die Anzahl dieser „Außensterne“ soll theoretisch abgeschätzt werden. Sterne mit $r \geq 2,5$ müssen den Haufen mit $v \geq 1$ verlassen haben, während das quadratische Mittel $v_2 = 0,755$ beträgt. Dann ist der Bruchteil Q_1 aller Sterne, die pro Relaxationszeit $v \geq 1$ erhalten, ähnlich wie bei (9) gegeben durch

$$Q_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-x^2} x^2 dx = 0,152 \quad (72)$$

mit $a = \sqrt{6}/(2v_2) = 1,622$. Die Anzahl pro Relaxationszeit ist dann gleich $n Q_1$.

Aus Tabelle 8 lesen wir die Anzahl n_a von Sternen mit $r \geq 2,5$ ab und tragen sie in Tabelle 10 ein. Bei der Anzahl von Relaxationszeiten ist zu

Tabelle 10. Die Abwanderung schneller Sterne

n	ν	n_a	n_a/ν	$n Q_1$	fehlt Faktor
3 · 8	1	1	1,0	3,66	3,7
12	2	1	0,5	1,83	3,7
16	9	3	0,33	2,44	7,4

bedenken, daß ein Stern etwa 3 Relaxationszeiten braucht, um in den Außenraum zu gelangen; die Werte von ν sind entsprechend zu verkleinern. — Wir bilden nun die beobachtete Anzahl pro Relaxationszeit, n_a/ν , und vergleichen mit dem theoretischen Wert $n Q_1$. Die letzte Spalte zeigt den Faktor, um den n_a/ν zu klein ist. Wir erhalten somit das Ergebnis, daß die Abwanderung schneller Sterne weit weniger effektiv ist als erwartet (siehe Abschnitt II a, 2).

Im Mittel erhalten wir:

Die Anzahl der abwandernden Sterne ist zu klein um einen Faktor der Größe

$$5 \pm 2. \quad (73)$$

V. Diskussion und Folgerungen

In der Einleitung (Abschnitt I, 4) hatten wir eine Reihe von Fragen aufgezählt, die durch die numerische Rechnung beantwortet werden sollten. Im folgenden werden diese Fragen, soweit möglich, beantwortet, einige weitere Ergebnisse werden beschrieben, und es werden Hinweise für spätere Rechnungen notiert.

Va. Die Rechenmethode

1. Anhand der vorliegenden Ergebnisse darf man sagen, daß die hier vorgeschlagene Methode sich bewährt hat. Es ist durchaus sinnvoll, auch mit einer geringen Anzahl von Sternen die vorhandene Theorie zu kontrollieren und ihre Weiterentwicklung anzuregen. Voraussetzung dafür ist eine schnelle Rechenmaschine.

2. Die Rechengenauigkeit ist ausreichend, wenn mit $\mu = 6$ in zweiter Näherung gerechnet wird mit anschließender halber Iteration (ohne neue Berechnung der Beschleunigungen). Diese Art der Iteration hat sich gut bewährt, sie erhöhte die Genauigkeit um einen Faktor 4, ohne die Rechendauer zu verlängern. Auch nach 12 Relaxationszeiten betrug der Fehler der Gesamtenergie nur 0,4% bei 2300 Zeitschritten.

3. Bei 16 Sternen dauerte die Berechnung einer Relaxationszeit 40 Minuten. Nach (40) sollte diese Dauer mit n^4 ansteigen, doch ist der Anstieg nach Tabelle 4 eventuell langsamer. Aber auch dann wird man nach (60) kaum über $n = 20$ hinauskommen.

Eine befriedigende Genauigkeit der Auswertung läßt sich auch bei wenigen Sternen dadurch erreichen, daß man über mehrere Rechenbeispiele und über mehrere Relaxationszeiten mittelt.

Vb. Die bisherigen Ergebnisse

1. Die Dauer T einer Relaxationszeit für verschiedene n stimmt nach Tabelle 5 genau mit der Chandrasekharschen Formel (7) überein. Diese Übereinstimmung soll jedoch nicht zu hoch gewertet werden, weil die beiden Definitionen von T nicht ganz übereinstimmen und weil an (7) noch einige Verbesserungen anzubringen sind. Eine genauere Diskussion ist erst nach weiteren Rechnungen möglich.

2. Als störend in vieler Hinsicht erwies sich die Bildung enger Paare oder Doppelsterne im Zentrum. Die Folgen davon sind: Die Relaxationszeit T verlängert sich etwas; die Rechendauer verlängert sich erheblich; die in der Verteilung der Geschwindigkeiten auftretenden schnellen Sterne haben nichts mit der gesuchten Abwanderung schneller Sterne zu tun.

Die Verteilung der Geschwindigkeiten ist daher wenig dazu geeignet, die zeitliche Entwicklung eines Haufens zu beschreiben.

3. Bereits nach 2 bis 3 Relaxationszeiten hat sich eine Verteilung von Dichte und Geschwindigkeit eingespielt, die sich während der nächsten 10 Relaxationszeiten dann nur unmerklich verändert. Eine Ausnahme hiervon ist die Dichte des Außenraumes, die sich stetig erhöht durch die Abwanderung schneller Sterne aus dem Zentrum.

Die Geschwindigkeiten spielen sich auf eine Maxwell-Verteilung ein; die Abweichungen betragen höchstens 17% und liegen innerhalb der Fehlergrenzen. Nur bei den großen Geschwindigkeiten zeigt sich ein starker Überschuß infolge der Bildung enger Paare. Die Dichteverteilung

stimmt im inneren Bereich leidlich gut mit der Isothermen Polytropen überein; einige systematische Abweichungen von 25% könnten aber auch reell sein. Weiter außen fällt die Dichte steiler ab (und zwar etwa mit $1/r^4$).

Der Virialsatz ist im zeitlichen Mittel erfüllt, im Einzelfall betragen jedoch die Abweichungen bis zu knapp einem Faktor 2.

4. Die Abwanderung schneller Sterne durch Wechselwirkung ist zu klein um etwa einen Faktor 5. Mit der „Abbremsung“ schneller Sterne vor dem endgültigen Verlassen des Haufens (Abschnitt IIa, 2) ist dies nicht mehr zu erklären.

Als Erklärung möchten wir vorschlagen: Die Relaxationszeit für schnelle Sterne ist größer als für mittlere Sterne. Zur Berechnung dieser Zeit dürfte jedoch *nicht* von einem Zustand des Gleichgewichtes ausgegangen werden: für einen mittleren Stern ist die Wahrscheinlichkeit, eine hohe Geschwindigkeit zu erhalten, vermutlich davon abhängig, ob schon Sterne hoher Geschwindigkeit vorhanden sind oder nicht.

5. Eine der wichtigsten Fragen ist: „Woran kann man das Alter eines Sternhaufens abschätzen?“ — Nach Tabelle 9 kann man dies vermutlich nur durch die zunehmende Dichte im Außenraum. Doch ist hier noch weiteres Material für eine Klärung abzuwarten.

V c. Hinweise für weitere Rechnungen

1. Die vorgegebenen Anfangsbedingungen sollten vielleicht besser so gewählt werden, daß ohne Wechselwirkungen kein Stern den Rand ($r = 1$) des Haufens verlassen könnte. Man sollte z. B. nur Geschwindigkeiten in tangentialer Richtung mit dem Betrage der örtlichen Kreisgeschwindigkeit vorgeben (siehe Abschnitt IV, 1).

2. Die Ausgabe der Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ ist unbefriedigend. Es sollte außerdem auch die Verteilung der Energien $f(E)$ ausgegeben werden, vielleicht auch die Verteilung von Energie und Drehimpuls $f(E, J)$. Für die Energie ist die Definition (53) zu benutzen.

3. Die hier benutzte Definition der Relaxationszeit mit Hilfe der Streuung der Energie ist nicht zu wiederholen, da die Streuung stark mit der Zeit zunimmt. In Formel (55) wäre σ_0 zu ersetzen durch $\frac{1}{3} \overline{|E_{i0}|}$.

4. Bei der bisherigen Methode war die Schrittlänge für alle Sterne die gleiche, und sie wurde bestimmt durch das jeweils engste Paar. — Vielleicht könnte es gelingen, eine Art von „individueller“ Schrittlänge einzuführen, so daß einige Sterne mit kurzer, andere Sterne mit großer Schrittlänge integriert werden. — Eine weitere Möglichkeit, die Rechendauer zu verkürzen, könnte in der Vernachlässigung aller Wechselwirkungen im Außenraum bestehen.

Den Herren Professoren E. KAMKE und H. SIEDENTOPF möchte ich meinen Dank ausdrücken für ihre Gastfreundschaft an der Maschine und im Institut.

Literatur

- BELZER, J., G. GAMOW u. G. KELLER: *Astrophys. J.* **113**, 166 (1951).
 CHANDRASEKHAR, S.: *Principles of stellar dynamics*. Chicago 1947.
 GUREVICH, L. E., i. B. J. LEVIN: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **70**, 781 (1950).
 HENON, M.: *Ann. Astrophys.* **21**, 186 (1958).
 HENON, M.: *Ann. Astrophys.* **22**, 126 (1959a).
 HENON, M.: *Ann. Astrophys.* **22**, 491 (1959b).
 HOERNER, S. v.: *Astrophys. J.* **125**, 451 (1957a).
 HOERNER, S. v.: *ZAMP* **8**, 26 (1957b).
 HOERNER, S. v.: *Z. Astrophysik* **44**, 221 (1958).
 KING, I.: *Astron. J.* **63**, 109 (1958a).
 KING, I.: *Astron. J.* **63**, 114 (1958b).
 KING, I.: *Astron. J.* **64**, 351 (1959).
 MATSUNAMI, N., *Tokyo Astr. Repr.* Nr. 177, S. 9 (1959).
 OORT, J. H., u. G. VAN HERK: *BAN* **14**, 299 (1959).
 RUPRECHT, J.: *Ceskoslov. Akad. Astron. Ustav. Publ.* Nr. 39 (1958).
 SCHLÜTER, A.: *Private Mitteilung* (1960).
 SPITZER, L., u. R. HÄRM: *Astrophys. J.* **127**, 544 (1958).
 WOOLLEY, R. v. D. R.: *Monthly Notices* **114**, 191 (1954).
 WOOLLEY, R. v. D. R.: *Monthly Notices* **116**, 298 (1956).
 WOOLLEY, R. v. D. R., and D. A. ROBERTSON: *Monthly Notices* **116**, 288 (1956).

Dr. S. VON HOERNER, Astronomisches Rechen-Institut, Heidelberg,
 Grabengasse 14