

Über die Verdichtung von HI-Gebieten*.

Von

ROLF EBERT, Göttingen.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 7. Mai 1955.)

Es wird untersucht, wie weit HI-Gebiete durch den Druck sich ausdehnender HII-Gebiete verdichtet werden können. Die Verdichtung wird aufgefaßt als erste Phase einer Sternentstehung. Drei verschiedene Anfangsgestalten des HI-Gebietes werden betrachtet. Für eine kugelsymmetrische HI-Wolke ergibt sich von einer bestimmten Verdichtung ab eine Instabilität. Ist die HII-Region in der Lage, die HI-Wolke bis zu dieser Instabilität zu verdichten, so erfolgt die Weiterverdichtung selbständig unter der Wirkung der Eigengravitation. Die nötige Verdichtung wird erreicht, wenn die Masse der HI-Wolke größer als eine bestimmte kleinste Masse ist. — Es wird eine Abschätzung über die Energieausstrahlung während der Verdichtung gegeben. Ferner wird in einer ersten Näherung die selbständige Weiterverdichtung unter der Wirkung der Eigengravitation zu berechnen versucht.

1. Einleitung.

In den letzten Jahren ist besonders von OORT [7] der Gedanke entwickelt worden, daß neue O-Sterne in der Nachbarschaft von schon vorhandenen O-Sternen erzeugt werden können. Durch die sehr intensive kurzwellige Strahlung eines O-Sternes wird in seiner Umgebung eine umfangreiche HII-Region erzeugt, die sich solange ausdehnen muß, bis sie im Druckgleichgewicht zu angrenzenden HI-Gebieten ist. Da die Temperatur der HII-Region ungefähr 10000°K , die der HI-Region aber nur etwa 50°K beträgt, muß es zu erheblichen Verdichtungen der HI-Gebiete kommen. Ist die Verdichtung groß genug, so können Teile des HI-Gebietes gravitationsmäßig instabil werden und sich durch den Einfluß ihrer Eigengravitation unter ständiger Energieabstrahlung selbständig weiterverdichten.

Wie die Arbeiten von SPITZER [8] und FRIEMAN [3] gezeigt haben, bleibt bei der Ausdehnung der HII-Region die Grenzfläche zur HI-Region nicht stabil. Es bilden sich vielmehr Elefantenrüssel-Strukturen, d. h. lange, dichte HI-Rüssel, die in das HII-Gebiet hineinragen. Der Emissionsnebel M 16 z. B. zeigt deutlich diese Strukturen. Man erkennt außer den Rüsseln auch noch kleine HI-Gebiete, die vollständig von der HII-Region umschlossen sind — vielleicht als abgeschnürte Rüssel zu deuten.

* Dissertation, Göttingen 1954.

Sowohl die Rüssel als auch die vollständig umschlossenen HI-Gebiete müssen durch den hohen Druck der HII-Region sehr stark verdichtet sein. Wir werden nun untersuchen, unter welchen Bedingungen die HI-Gebiete durch den Druck der HII-Region so stark verdichtet werden können, daß eine selbständige Weiterverdichtung durch die Eigengravitation möglich ist. Diese Gebiete können sich dann zu neuen Sternen weiterentwickeln.

2. Zwei stabile Fälle.

In einer früheren Arbeit [1] ist gezeigt worden, daß die Gleichgewichtstemperatur einer HI-Region bis hin zu sehr großen Dichten mit sehr guter Näherung unabhängig von ihrer Dichte ist, sofern nur die chemische Zusammensetzung des Gases die gleiche bleibt. Wir rechnen daher im folgenden mit isothermer Temperaturverteilung.

Wir zeigen zuerst: HI-Gebiete, die die Gestalt einer ebenen Schicht oder eines langen Zylinders haben und diese Gestalt während der Verdichtung beibehalten¹, werden niemals gravitationsmäßig instabil (d. h. Gravitationskraft > Druckgradient).

Für irgendeine sich im Gleichgewicht befindende isotherme Gasverteilung müssen stets die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$p = \frac{\Re T_0 \varrho}{\mu} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$\sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\mu^2} - 4 \pi \gamma \varrho = 0. \quad (3)$$

Hierin bedeutet p , ϱ , T_0 , Φ Druck, Dichte, Temperatur, Gravitationspotential und $\Re$, μ , γ Gaskonstante, Molekulargewicht und Gravitationskonstante. Durch Einführung einer von der festen Dichte ϱ_0 noch abhängigen Länge

$$l_0 = \left(\frac{\Re T_0}{4 \pi \mu \gamma \varrho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

werden die entstehenden Differentialgleichungen dimensionslos gemacht.

a) *Ebene HI-Schicht.* Wir setzen $x = \sqrt{2} l_0 \xi$ und $\varrho = \varrho_0 \eta$ mit $\varrho_0 = \varrho(0)$. Aus (1) bis (3) ergibt sich dann

$$(\ln \eta)'' + \eta = 0, \quad (5)$$

wo der Strich die Differentiation nach ξ bedeutet. Diese Differentialgleichung ist schon von LEDOUX [5] gelöst worden. Die Lösung, die

¹ Diese Einschränkung ist sehr wichtig. Betrachtet man Störungen, die die ursprüngliche Gestalt verändern, so können diese Störungen unter Umständen ständig anwachsen. Dazu siehe: LEDOUX [5] sowie W. FRICKE: *Astrophysic. J.* **120**, 356 (1954).

die Randbedingung $\eta(0) = 1$, $\eta'(0) = 0$ erfüllt, lautet

$$\eta(\xi) = \frac{1}{(\cosh \xi)^2} = \frac{4 e^{2\xi}}{(e^{2\xi} + 1)^2}. \quad (6)$$

Diese bis ins Unendliche gehende Verteilung schneiden wir bei $\pm x_0$ ab und denken uns den Druck an diesen Ebenen durch den Druck einer HII-Region kompensiert. Eine einfache Rechnung ergibt für die in dieser Schicht enthaltene Gesamtmasse pro Flächeneinheit

$$m_0 = \left(\frac{2 \Re T_0 \varrho_0}{\pi \mu \gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tgh} \xi_0, \quad (7)$$

wo ξ_0 der zu x_0 gehörige ξ -Wert ist.

Wir halten nun m_0 konstant und fragen: Wie ändert sich der Randdruck P der Schicht — also der von der HI-Schicht an ihrem Rande ausgeübte Druck —, wenn wir die Schicht zusammendrücken. Bei

dieser Verdichtung können wir die Dichte ϱ_0 in der Mittelebene natürlich nicht mehr konstant halten; sie wird vielmehr anwachsen. Mit x^* bzw. ξ^* sei jetzt die Entfernung der Randebene bezeichnet und mit Γ die nun veränderliche Dichte in der Mittelebene. Dann ist der Randdruck gegeben durch

$$P = \frac{\Re T_0}{\mu} \Gamma(\xi^*) \eta(\xi^*). \quad (8)$$

Aus (7) folgt aber

$$\Gamma = \frac{\pi \gamma \mu m_0^2}{2 \Re T_0} \operatorname{ctgh}^2 \xi^* \quad (9)$$

und weiter mit Verwendung von (9)

$$\pi^* = \sqrt{2} l_0 \xi^* = \frac{\Re T_0}{\pi \gamma \mu m_0} \xi^* \operatorname{tgh} \xi^*. \quad (10)$$

Daher ist

$$P = \frac{\pi \gamma m_0^2}{2} \frac{1}{\sinh^2 \xi^*}. \quad (11)$$

Gleichung (10) und (11) ist die Parameterdarstellung der gesuchten Funktion $P = P(x^*)$. Für $x^* \rightarrow 0$ folgt $\xi^* \rightarrow 0$ und damit $P \rightarrow +\infty$; das aber heißt: so groß der Druck einer HII-Region auch sein mag, es gibt immer eine Schichtdicke, bei der die Schicht den Druck der HII-Region zu kompensieren vermag. Eine Instabilität der anfangs erwähnten Art tritt daher nicht auf.

b) *HI-Zylinder (unendlich lang)*. Der Abstand von der Zylinderachse sei z . Wir setzen unter Verwendung von (4) wieder $z = l_0 \xi$ und $\varrho = \varrho_0 \eta$ mit $\varrho_0 = \varrho(0)$; ϱ_0 ist also die Dichte längs der Zylinderachse. Aus (1) bis (3) erhalten wir eine Differentialgleichung für $\eta(\xi)$. Es

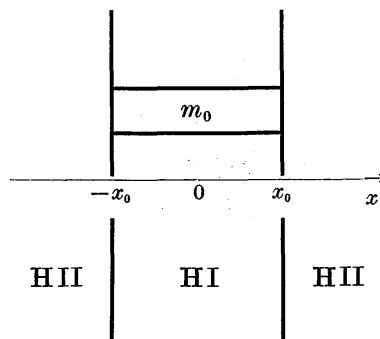


Abb. 1.
Ebene HI-Schicht, schematisch.

stellt sich nun heraus, daß wir für unseren Beweis die Lösungen dieser Differentialgleichungen nicht einmal benötigen.

Wir gehen im folgenden genau analog zu a) vor und wählen die Bezeichnungen ebenfalls analog; m_0 bedeutet jetzt also die Gesamtmasse pro Längeneinheit. Nach dem GAUSSschen Satz ist

$$\int_{\text{Volumen}} \Delta \Phi d\tau = \int_{\text{Oberfläche}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} df. \quad (12)$$

Aus (3) sieht man, daß die linke Seite die gesuchte Masse ergibt. Unter Ausnutzung der Symmetrie des Problems und mit Hilfe von (2) und (1) erhält man aus (12)

$$4 \pi \gamma m_0 = 2 \pi z_0 \left(\frac{d \Phi}{dz} \right)_{z=z_0} = - \frac{2 \pi \Re T_0 z_0}{\mu} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{d \varrho}{dz} \right)_{z=z_0},$$

also

$$m_0 = - \frac{\Re T_0}{2 \mu \gamma} \left(\frac{\xi}{\eta} \frac{d \eta}{d \xi} \right)_{\xi=\xi_0}. \quad (13)$$

Nun ist weiter

$$z^* = l_0 \xi^* = \left(\frac{\Re T_0}{4 \pi \mu \gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^*}{\Gamma^{1/2}}, \quad (14)$$

somit also

$$\Gamma \sim \left(\frac{\xi^*}{z^*} \right)^2,$$

und daher der Randdruck

$$P = \frac{\Re T_0}{\mu} \Gamma \eta(\xi^*) \sim \frac{\xi^{*2} \eta(\xi^*)}{z^{*2}}. \quad (15)$$

Nach (13) gehört aber zu einer fest vorgegebenen Masse ein bestimmtes ξ_0 *unabhängig* von Γ . Dabei ist $\xi^* = \xi_0$, und es folgt, da sich während der Kompression die Masse nicht ändern soll,

$$P \sim \frac{1}{z^{*2}}. \quad (16)$$

Der Randdruck wird also bei beliebig starker Kompression beliebig groß, d. h. auch hier tritt keine Instabilität auf.

3. Verdichtung einer kugelsymmetrischen HI-Wolke.

Im Gegensatz zu den zwei ersten Fällen erhalten wir bei Kugelsymmetrie eine echte Gravitationsinstabilität. Der Randdruck der HI-Gaskugel steigt bei der Verdichtung nicht beliebig an, sondern erreicht ein endliches Maximum. Wir wollen zeigen, wo dieses Maximum liegt, wie groß es ist und welche Folgerungen sich daraus ergeben.

Über isotherme Gaskugeln hat insbesondere EMDEN [2] gearbeitet. Sein Buch über Gaskugeln enthält eine Fülle von Ergebnissen, und eine Reihe der im folgenden abgeleiteten Resultate lassen sich daher in irgendeiner Form dort bereits finden. Da wir aber eine von EMDEN

verschiedene Fragestellung haben, gehen wir bei der Ableitung der Formeln einen eigenen Weg.

Wir stellen vorerst die zu Fall a) genau analogen Betrachtungen an. Die Bezeichnungen werden entsprechend gewählt. Es sei r der Abstand vom Mittelpunkt der Gaskugel. Wir setzen unter Verwendung von (4) $r = l_0 \xi$ und $\varrho = \varrho_0 \eta$ mit $\varrho_0 = \varrho(0)$. Für η ergibt sich die Differentialgleichung der isothermen Gaskugel:

$$\eta'' - \frac{(\eta')^2}{\eta} + \frac{2\eta'}{\xi} + \eta^2 = 0. \quad (17)$$

Der Strich bezeichnet die Differentiation nach ξ . Die zu befriedigenden Randbedingungen sind $\eta(0) = 1$, $\eta'(0) = 0$. Die Lösung ist als numerische Funktion bekannt (z. B. im Buch von EMDEN zu finden).

Für die Gesamtmasse m_0 der Gaskugel bis zur Entfernung r_0 ergibt sich mit Hilfe des GAUSSSchen Satzes sofort

$$\gamma m_0 = r_0^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=r_0},$$

und daher bei Verwendung von (1) bis (3)

$$m_0 = - \frac{\Re T_0 l_0}{\mu \gamma} \left(\xi \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)_{\xi=\xi_0}. \quad (18)$$

Wir schneiden die Gaskugel bei $r = r_0$ ab und denken uns den dortigen Druck der Gaskugel durch den Druck einer angrenzenden HII-Region kompensiert. Die Masse m_0 werde konstant gehalten, und der Radius R der Gaskugel werde verkleinert (wir setzen hier $R = l_0 \xi^*$; für $\xi^* = \xi_0$ ist $R = r_0$). Aus (18) folgt dann für die veränderlich gedachte Mittelpunktsdichte ($\Gamma \equiv \varrho_0$)

$$\Gamma = \frac{(\Re T_0)^3}{4 \pi \mu^3 \gamma^3 m_0^2} \left(\xi \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)_{\xi=\xi^*}^2 \quad (19)$$

und weiter

$$R = l_0 \xi^* = - \frac{\mu \gamma m_0}{\Re T_0} \left(\frac{d \ln \xi}{d \ln \eta} \right)_{\xi=\xi^*}. \quad (20)$$

Daher gilt für den Randdruck

$$P = \frac{(\Re T_0)^4}{4 \pi \mu^4 \gamma^3 m_0^2} \left\{ \eta \xi^2 \left(\frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)^2 \right\}_{\xi=\xi^*}. \quad (21)$$

Gleichung (20) und (21) ist die Parameterdarstellung der gesuchten Funktion $P = P(R)$; der Parameter ist ξ^* . Durch Integration von (17) und Einsetzen der Funktion $\eta(\xi)$ in (20) und (21) erhält man den gesuchten Funktionsverlauf. Er ist in Abb. 2 dargestellt; hierbei wurde gesetzt:

$$R_0 = \frac{\mu \gamma m_0}{\Re T_0}, \quad P_0 = \frac{(\Re T_0)^4}{4 \pi \gamma^3 \mu^4 m_0^2}. \quad (22)$$

Das Druckmaximum liegt bei

$$\frac{R_{kr}}{R_0} \approx 0.41 \quad \text{mit} \quad \frac{P_{max}}{P_0} \approx 17.6. \quad (23)$$

Der kleinste Radius und der Radius bei unendlicher Mittelpunktsdichte betragen

$$\frac{R_{min}}{R_0} \approx 0.395, \quad \frac{R_\infty}{R_0} = 0.5. \quad (24)$$

Wird der Radius der Gaskugel kleiner als R_{min} (bei festem m_0 und T_0) gemacht, so gibt es keinen Gleichgewichtszustand im Aufbau der Gas-

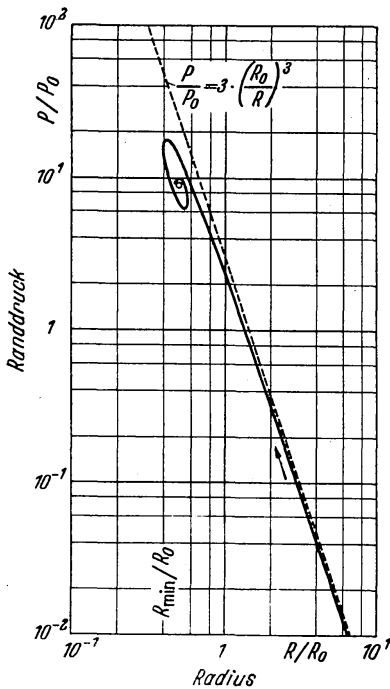


Abb. 2. Randdruck der Gaskugel.

kugel mehr. Die Gravitationskraft übersteigt dann in jedem Fall den Druckgradienten, ganz gleich, welche Dichteverteilung innerhalb des vorgegebenen Radius die Gaskugel auch immer herstellen mag, selbst wenn sie ihre Mittelpunktsdichte unendlich machen würde. Nur durch Erhöhung von T_0 oder Verringerung von m_0 könnte man neue Gleichgewichtszustände erhalten, weil dadurch R_0 , und somit auch R_{min} , in absoluten Einheiten gemessen kleiner als vorher würde. Es gäbe dann aber ein neues R_{min} , bei dessen Unterschreitung das gleiche gelten würde, was oben gesagt worden ist.

Der Zustand mit unendlicher Mittelpunktsdichte ist in Abb. 2 durch einen kleinen Kreis bezeichnet. Der Pfeil gibt die Richtung wachsenden Parameters ξ^* an.

Um weiter zu verfolgen, was aus der Gaskugel wird, wenn sie unter R_{min} herab zusammengedrückt wird, ist es nötig, die zeitabhängigen Gleichungen der Hydrodynamik zu lösen. Darauf soll im letzten Abschnitt eingegangen werden. Vorerst fragen wir, welche Folgerungen sich aus dem Bisherigen ergeben.

Ist eine die HI-Wolke umgebende HII-Region mit einem bestimmten Druck P_{II} gegeben, so folgt aus der Existenz eines Maximaldruckes, den die HI-Wolke am Rande aufbringen kann: Immer dann, wenn $P_{max} \leq P_{II}$ ist, kann die HII-Region die HI-Wolke so stark verdichten, daß eine selbständige Weiterverdichtung unter dem Einfluß der Eigengravitation einsetzen, und d. h. eine Sternbildung möglich werden kann.

Da die Temperatur der HI-Gebiete in ziemlich engen Grenzen liegt, fassen wir die eben ausgesprochene Bedingung als eine Forderung an die Masse der HI-Wolke auf. Mit Hilfe von (23) und (22) ergibt sich so

$$m_0^2 \geq 17.6 \frac{(\mathcal{R} T_0)^4}{4 \pi \mu^4 \gamma^3 P_{II}}. \quad (25)$$

Diese Bedingung tritt an die Stelle des JEANSSchen Kriteriums. Die Masse der HI-Wolke muß — wie beim JEANSSchen Kriterium — eine

bestimmte kleinste Masse überschreiten, damit eine Sternbildung möglich ist. Nennen wir diese kleinste Masse M^* , so ist nach (25)

$$M^* = 4.1 \cdot 10^{34} \frac{T_I^2}{\mu_I^2 (n_{II} T_{II})^{1/2}} \quad [\text{g}]. \quad (26)$$

Hierin bedeutet T_I die Temperatur der HI-Wolke ($T_I = T_0$), μ_I das Molekulargewicht im HI-Gebiet, n_{II} und T_{II} Teilchendichte und Temperatur der HII-Region; die Werte sind in CGS-Einheiten einzusetzen. In Tab. 1 ist M^* für verschiedene T_I und n_{II} (verschiedenes P_{II}) angegeben. Die Temperatur der HII-Region wurde stets zu 10000°K angesetzt. Für μ_I haben wir den UNSÖLDschen Wert von 1.5 gewählt.

Ferner ist in Tab. 2 der kleinste Radius R_{min} für $m_0 = M^*$ angegeben, unterhalb dessen keine Gleichgewichtszustände mehr möglich sind. Diesen Radius haben wir R^* genannt. Aus (22), (24) und (26) folgt dafür

$$R^* = 1.3 \cdot 10^{19} \frac{T_I}{\mu_I (n_{II} T_{II})^{1/2}} \quad [\text{cm}]. \quad (27)$$

Die gleiche Tabelle enthält zum Vergleich noch den Radius R_a , den die Wolke mit der Masse M^* hat, wenn ihre Mittelpunktsdichte $n_0 = 1 \text{ H-Atom/cm}^3$ beträgt (Anfangszustand der Wolke vor der Verdichtung), und schließlich die Mittelpunktsdichte n^* , wenn die Wolke mit der Masse M^* gerade den Radius R^* hat. Für diese Mittelpunktsdichte ergibt sich die einfache Beziehung

$$n^* = 3 \cdot 10^1 \frac{n_{II} T_{II}}{T_I}. \quad (28)$$

Die Genauigkeit der Zahlenfaktoren in (26), (27) und (28) liegt im Rahmen der Genauigkeit mit der die Differentialgleichung (17) integriert wurde. Die Stelle vor dem Komma der jeweiligen Zahlenfaktoren (ohne die Zehnerpotenzen) ist genau.

Tabelle 1. M^* als Funktion von T_I und n_{II} .

T_I in $^\circ \text{K}$	Dichte der H II-Region in H/cm^3			
	10^{-2}	1	10^2	
100	$1.8 \cdot 10^{37}$	$1.8 \cdot 10^{36}$	$1.8 \cdot 10^{35}$	} g
50	$4.5 \cdot 10^{36}$	$4.5 \cdot 10^{35}$	$4.5 \cdot 10^{34}$	
10	$1.8 \cdot 10^{35}$	$1.8 \cdot 10^{34}$	$1.8 \cdot 10^{33}$	

Aus Tab. 1 ersieht man, daß die kleinsten HI-Wolken, die durch den behandelten Mechanismus zu Sternen verdichtet werden können, Massen zwischen 1 bis 10^4 Sonnenmassen haben. Der mittlere Wert beträgt $200 M_\odot$. Da ein O-Stern im Mittel aber kaum mehr als 50fache Sonnenmasse hat, muß im Laufe der weiteren Verdichtung der größere

Tabelle 2. Radien und Dichten.

T_I in ° K	Dichte der H II-Region in H/cm ³			
	10 ⁻²	1	10 ²	
100	8.6 · 10 ¹⁹	8.6 · 10 ¹⁸	8.6 · 10 ¹⁷	} R^* in cm
50	4.3 · 10 ¹⁹	4.3 · 10 ¹⁸	4.3 · 10 ¹⁷	
10	8.6 · 10 ¹⁸	8.6 · 10 ¹⁷	8.6 · 10 ¹⁶	
100	1.4 · 10 ²⁰	1.2 · 10 ²⁰	5.7 · 10 ¹⁹	} R_a in cm
50	8.6 · 10 ¹⁹	7.8 · 10 ¹⁹	3.6 · 10 ¹⁹	
10	2.8 · 10 ¹⁹	2.7 · 10 ¹⁹	1.2 · 10 ¹⁹	
100	3 · 10 ¹	3 · 10 ³	3 · 10 ⁵	} n^* in H/cm ³
50	6 · 10 ¹	6 · 10 ³	6 · 10 ⁵	
10	3 · 10 ²	3 · 10 ⁴	3 · 10 ⁶	

Teil der Masse von der HI-Wolke wieder abgegeben werden. Es ist möglich, daß der bei sehr fortgeschrittener Verdichtung durch die einsetzenden Kernprozesse entstehende starke Strahlungsstrom dieses Abblasen der Masse übernimmt. Bei zunehmender Verdichtung könnte aber auch die wachsende Rotation der Wolke — bedingt durch die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses — zusammen mit Turbulenzeffekten ein Abführen der Materie bewirken [9] u. [6]. Schließlich könnte auch bei wachsender Verdichtung die gesamte Wolke in kleinere Untergebilde aufspalten, so daß aus einer Wolke mehrere Sterne entstünden. Eine weitere Möglichkeit, kleinere Massen zu bekommen, werden wir im nächsten Abschnitt noch angeben.

Wir stellen jetzt die weitere Frage: Welche Energie muß die Gaskugel bei ihrer Verdichtung abgeben, um vom Zustand mit dem Radius R in den Zustand mit dem Radius R_{min} übergehen zu können? Der gesuchte Energiebetrag ist die Summe aus der Kompressionsenergie und der Differenz zwischen der Gesamtenergie der Gaskugel im Anfangs- und Endzustand. Wir berechnen zuerst das letztere.

Die Gesamtenergie der Gaskugel bis zur Entfernung r_0 vom Mittelpunkt ist gegeben durch die Summe aus thermischer und potentieller Energie, also

$$E(r_0) = L(r_0) + \Phi(r_0) = c_v T_0 m(r_0) - \gamma \int_0^{r_0} \frac{m \, d m}{\gamma}, \tag{29}$$

wenn c_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen ist. Nun gilt für Gaskugeln ein dem Virialsatz der Mechanik entsprechender Satz, der für den isothermen Fall besagt

$$\Phi(r_0) = 4 \pi r_0^3 P(r_0) - 3(\kappa - 1) L(r_0), \tag{30}$$

wo κ das Verhältnis der spezifischen Wärmen und $P(r_0)$ der Gasdruck in der Entfernung r_0 vom Mittelpunkt ist. Durch Verwendung von (30)

läßt sich das in (29) auftretende Integral eliminieren. Verwendet man noch die in (17) benutzten dimensionslosen Größen, so wird aus (29)

$$E(r_0) = \frac{(\mathfrak{R} T_0)^2 l_0}{\mu^2 \gamma} \left[\xi^2 \left(\xi \eta + \frac{3\kappa - 4}{\kappa - 1} \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\xi} \right) \right]_{\xi=\xi_0} \quad (31)$$

Wegen der Konstanz der Masse bei der Kompression, müssen wir die in l_0 vorkommende Mittelpunktsdichte nach (19) einsetzen. Das ergibt schließlich

$$E(\xi^*) = -E_0 \left(\xi^2 \eta \frac{d \ln \xi}{d \ln \eta} + \frac{3\kappa - 4}{\kappa - 1} \right)_{\xi=\xi^*}, \quad E_0 = \frac{\mathfrak{R} T_0 m_0}{\mu}. \quad (32)$$

Gleichung (32) stellt zusammen mit (20) die Parameterdarstellung der gesuchten Funktion $E = E(R)$ dar. Abb. 3 gibt den Verlauf für $\kappa = \frac{5}{3}$

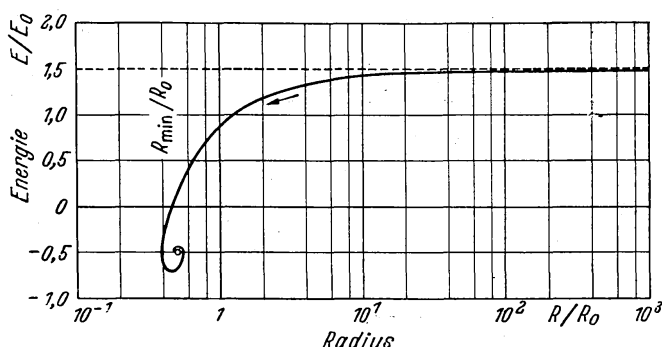


Abb. 3. Gesamtenergie der Gaskugel.

wieder. Der Zustand mit unendlicher Mittelpunktsdichte ist wieder durch einen Kreis bezeichnet, und der Pfeil zeigt wieder wachsendes ξ^* an. Für die Energiedifferenz zwischen dem Zustand mit $R = R_{min}$ und $R \gg R_{min}$ entnimmt man aus der Abbildung mit guter Näherung

$$\Delta E_1 = 2 E_0. \quad (33)$$

Den zweiten Energiebetrag, also die Kompressionsenergie, berechnen wir von vornherein durch eine Näherung. Wird bei fester Masse der Radius der Gaskugel sehr groß, so muß ihre Mittelpunktsdichte abnehmen [dies folgt auch aus (19) und (20)]. Da nun (18) eine monoton wachsende Funktion in ξ_0 ist (die Masse muß monoton mit dem Abstand vom Mittelpunkt wachsen), ergibt sich bei festem m_0 und fallender Mittelpunktsdichte — und d. h. wegen (4): für wachsendes l_0 — ein immer kleiner werdendes ξ_0 . (Man beachte dabei, daß durch das Wachsen von l_0 die absolute Größe der Gaskugel trotz abnehmendem ξ_0 zunimmt.) Für kleine ξ_0 bzw. ξ^* gilt aber in erster Näherung

$$\eta = 1 - \frac{1}{6} \xi^{*2}, \quad (34)$$

wie man durch Einsetzen in (17) leicht bestätigt. Setzen wir (34) in (20) und (21) ein, so ergibt sich sofort mit Verwendung von (22) für den

Randdruck

$$\frac{P}{P_0} = 3 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3. \quad (35)$$

Aus Abb. 2 entnimmt man, daß (35) eine gute Näherung für $R > R_0$ darstellt.

Wir werden nun (35) bis zu $R = R_{min}$ anwenden. Der berechnete Energiebetrag wird dadurch etwas zu groß. Wir begnügen uns aber mit dieser Näherung.

Die Energie, die zur Kompression der Gaskugel vom Anfangsradius R auf den Endradius R_{min} aufgewendet werden muß, ist dann gegeben durch

$$\Delta E_2 = -4 \pi \int_{R_{min}}^{R_0} P R^2 dR = 12 \pi P_0 R_0^3 \ln \frac{R_0}{R_{min}}, \quad (36)$$

und mit Verwendung von (22) wird daraus

$$\Delta E_2 = \frac{3 \beta \Re T_0 m_0}{\mu}, \quad \beta = \ln \frac{R_0}{R_{min}}. \quad (37)$$

Aus Tab. 2 ergibt sich, daß β etwa zwischen 1 und 6 liegt, wenn wir von ganz extremen Fällen absehen.

Die Energie (37) wird der Gaskugel durch die Kompression zugeführt. Um also vom Gleichgewichtszustand mit dem Radius R in den Gleichgewichtszustand mit dem Radius R_{min} übergehen zu können, muß die Gaskugel die Energie

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = (2 + 3 \beta) \frac{\Re T_0 m_0}{\mu} \quad (38)$$

abführen. Bezogen auf die Masseneinheit ergibt sich

$$\frac{5 \Re T_0}{\mu} \leq \frac{\Delta E}{m_0} \leq \frac{20 \Re T_0}{\mu}. \quad (39)$$

Wir fragen nun: Kann diese Energie durch Strahlungsprozesse abgeführt werden in einer Zeit, in der die gesamte Verdichtung sich vollzieht, ohne daß die Temperatur T_0 des HI-Gebietes dabei wesentlich erhöht werden muß?

Zur Beantwortung dieser Frage wählen wir unter den SPITZERSchen Energieverlustprozessen einen Prozeß aus, der für eine HI-Region mit mittlerer und hoher Dichte einer der wirksamsten ist. In einer früheren Arbeit [1] wurde gezeigt, daß bei Fehlen von Staub die Stoßanregung von Ionen durch freie Elektronen ein solcher Prozeß ist. Da wir von der schwierigen Frage der Staubkonzentration und -beschaffenheit unabhängig sein wollen, wählen wir diesen Prozeß. Wir verwenden die Formel (7) der eben angeführten Arbeit und die dort benutzten Teilchenkonzentrationen. In Tab. 3 sind die sich ergebenden Energieverluste

und die aus (39) folgenden Werte für drei verschiedene Temperaturen aufgeführt.

Tabelle 3.

Temperatur des HI-Gebietes in ° K	Energieverlust durch inelastische Stöße gemessen in $\text{erg sec}^{-1} \text{g}^{-1}$	$\frac{\Delta E}{m_0}$ in erg g^{-1}
500	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{11} — 6 \cdot 10^{11}$
100	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{10} — 1.2 \cdot 10^{11}$
50	$7.3 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{10} — 6 \cdot 10^{10}$

Durch Vergleich der Werte in der zweiten mit denen in der dritten und vierten Kolonne, entnimmt man für die Zeit, die nötig ist, um die geforderte Ausstrahlung zu liefern, einen Wert von 10^6 bis 10^7 Jahren. Diese Zeit ist von der gleichen Größenordnung wie die, während der sich die gesamte Verdichtung vollzieht, so daß die geforderte Energieausstrahlung ohne wesentliche Temperaturerhöhung möglich ist.

4. Grenzen.

Unsere ausgeführte Rechnung über den Verdichtungs Vorgang setzte Gleichgewichtszustände voraus, die während der Verdichtung durchlaufen werden sollten. Streng kann nun diese Bedingung niemals erfüllt sein, weil die beim Durchlaufen auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten notwendig ein Abweichen vom Gleichgewichtszustand bewirken. Erfolgt die Verdichtung der HI-Wolke aber langsam genug, so werden die Abweichungen klein sein, und unser Modell wird eine gute Näherung darstellen. Geschieht die Verdichtung dagegen sehr rasch, so versagt die ausgeführte Rechnung.

Wie schnell die Verdichtung erfolgt, hängt bei starkem Druckunterschied zwischen HI- und HII-Region fast ausschließlich von der Expansionsgeschwindigkeit der HII-Region ab. Wir haben Grund zu der Vermutung, daß diese Ausdehnung mitunter sehr rasch erfolgen wird. Wahrscheinlich werden Geschwindigkeiten auftreten können, die größer sind als die Schallgeschwindigkeit in der HI-Wolke, und das würde zur Folge haben, daß die Verdichtung nicht mehr ein die ganze Wolke ziemlich gleichzeitig erfassender Vorgang wäre, sondern von den die Wolke durchlaufenden Verdichtungsstößen gemacht würde. Damit hätten wir eine extreme Abweichung von irgendwelchen Gleichgewichtszuständen. (Zu dieser Frage siehe die Arbeit von KAHN [4].)

Die von uns berechnete kleinste Masse M^* [siehe Gl. (26)], die die HI-Wolke mindestens haben muß, um zu einem Stern verdichtet werden zu können, bleibt aber in Form einer oberen Grenze bestehen, d. h. auch im Fall sehr rascher Verdichtung braucht die HI-Wolke keine größere Masse als M^* zu besitzen. Man sieht aber, daß durch eine sehr schnelle Verdichtung auch noch Wolken mit kleinerer Masse

als M^* zu Sternen verdichtet werden können. Die in der schnellen Bewegung steckende Bewegungsenergie kann z. B. am Rand in thermische Energie des Gases umgewandelt, und d. h.: der von außen auf die Gaskugel ausgeübte Druck kann gegebenenfalls sehr groß werden; dadurch aber kann die Gaskugel leichter — und d. h.: auch wenn ihre Masse kleiner ist als M^* — bis zur Instabilität verdichtet werden. Dies ist die vierte, im vorigen Abschnitt schon angedeutete Möglichkeit, zu kleineren Sternmassen zu gelangen.

Vernachlässigt wurde ferner der resultierende Drehimpuls der HI-Wolke, den sie infolge ihrer Turbulenz immer hat — wenn er in einzelnen Fällen vielleicht auch sehr klein sein mag. Bei zunehmender Verdichtung der Wolke muß dieser Drehimpuls zu einer Gesamtrotation führen. Zentrifugalkräfte und Abweichungen von der Kugelsymmetrie sind die Folge. Ist der resultierende Drehimpuls sehr groß, so kann durch ihn die Sternbildung überhaupt verhindert werden.

Schließlich können interstellare Magnetfelder den Verdichtungsprozeß stark beeinflussen. Hierüber ist aber bisher noch so wenig bekannt, daß wir diese Frage ganz offenlassen müssen.

5. Näherungslösung für die Weiterverdichtung unter der Wirkung der Eigengravitation.

Wir sehen von den in Abschnitt 4 aufgeführten Schwierigkeiten noch einmal ab und versuchen eine Fortführung der Gedanken, die in Abschnitt 3 entwickelt wurden. Vorausgesetzt also, eine HI-Wolke habe eine genügend große Masse, so daß sie von der umgebenden HII-Region über den kritischen Punkt hinaus verdichtet werden kann, wie wird die weitere Entwicklung der Wolke dann aussehen? Strenge Gleichgewichtszustände gibt es unterhalb R_{min} nicht mehr, wie wir schon in Abschnitt 3 gesehen haben. Die Gravitationskraft ist so groß geworden, daß die Gaswolke keinen Druckgradienten herstellen kann, der der Gravitation das Gleichgewicht halten könnte. Die Wolke muß daher beginnen, sich unter dem Einfluß der Eigengravitation zusammenzuziehen. Unterstützt wird dieser Vorgang noch durch den ständig weiter wirkenden Druck der HII-Region. Die entstehende Wärme wird durch Strahlung abgeführt, so daß die Verdichtung ständig weiterlaufen kann.

Hierbei wird nun mehr und mehr die Frage wichtig, wie schnell die erzeugte Strahlung die immer dichter werdende Wolke verlassen kann; die eingestrahelte interstellare Strahlung wird dagegen mehr und mehr unwichtig. Die Ausstrahlungsgeschwindigkeit — die ihrerseits wieder von der Art der Strahlungsprozesse im Innern der Wolke abhängt — wird also wesentlich auf die Temperaturverteilung und damit auf den ganzen Verdichtungs Vorgang einwirken.

Um die anfangs gestellte Frage genau zu beantworten, müßte man also die zeitabhängigen Gleichungen der Hydrodynamik und gleichzeitig das Strahlungsproblem zu lösen versuchen. Dieses sehr komplizierte Problem soll in einer späteren Arbeit behandelt werden. Wir versuchen hier nur, einen ersten Einblick in die vermutliche Entwicklung der HI-Wolke zu gewinnen.

Dazu machen wir eine sehr grobe Vereinfachung: Aus Abschnitt 3, dessen Voraussetzungen wir hier übernehmen, wissen wir, daß für $R < R_{min}$ die Gravitationskraft stets überwiegt. Wir nehmen nun an, die Gravitationskraft sei groß gegenüber dem Druckgradienten, so daß in den zeitabhängigen Gleichungen der Hydrodynamik das Druckglied gestrichen werden kann. Die Gasteilchen der Wolke werden dann nur durch die Eigengravitation der Wolke beschleunigt.

Als anfängliche Dichteverteilung geben wir diejenige vor, die die Wolke als isotherme Gaskugel mit $R = R_{min}$ hat. Die anfängliche Strömungsgeschwindigkeit der Teilchen setzen wir Null. Durch das Streichen des Druckgliedes ist die thermische Geschwindigkeit der Teilchen vollständig vernachlässigt. Jedes Teilchen wird daher einen „freien Fall“ ins Zentrum der Gaskugel machen. Uns interessiert, wie bei diesem Vorgang sich die anfängliche Dichteverteilung mit der Zeit ändert. Dazu führen wir Lagrange-Koordinaten ein:

r_0 = Entfernung eines Teilchens vom Zentrum der Gaskugel zur Zeit $t = 0$; LAGRANGESCHE Numerierungscoordinate.

$r(t)$ = Entfernung des Teilchens „ r_0 “ vom Zentrum zur Zeit t .

$v(r)$ = Geschwindigkeit des Teilchens „ r_0 “ in der Entfernung r .

Die Dichteverteilung zur Zeit $t = 0$ werde durch $\varrho(r_0)$ bezeichnet; ihr entspricht eine Massenverteilung $m(r_0)$. Aus dem Aufbau der untersuchten Gaskugeln entnehmen wir, daß die Dichteverteilung $\varrho(r_0)$ eine mit wachsendem r_0 monoton abnehmende Funktion ist. Dies sorgt dafür, daß die einzelnen Teilchen beim freien Fall einander nicht „überholen“ können: die weiter entfernten Teilchen brauchen länger, um bis zum Zentrum zu gelangen, als die näherliegenden. (Im Grenzfall konstanter Dichte treffen alle Teilchen zu gleicher Zeit im Mittelpunkt ein.) Betrachten wir daher ein bestimmtes Teilchen, so wird es stets von der gleichen Masse beschleunigt. Teilchen mit anfänglich verschiedenem Abstand vom Zentrum werden aber durch verschieden große Massen beschleunigt.

Nach Voraussetzung ist $v(r_0) = 0$. Durch Benutzung des Energiesatzes folgt dann

$$v^2(r) = 2 \gamma m(r_0) \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right]. \quad (40)$$

Ferner ist

$$v(r) = \frac{dr}{dt},$$

und daher erhält man unter Verwendung von (40) und mit der Substitution $(r_0/r - 1) = y^2$

$$dt = - \left(\frac{r_0^3}{2 \gamma m(r_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2 dy}{(y^2 + 1)^2}. \quad (41)$$

Integration und Rücksubstitution ergibt

$$t(r, r_0) = \left(\frac{r_0^3}{2 \gamma m(r_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{r}{r_0} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \arctg \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (42)$$

$t(r, r_0)$ ist die Zeit, die ein Teilchen, das sich zur Zeit $t = 0$ bei r_0 befand, braucht, um nach r zu gelangen ($r \leq r_0$).

Um den Anschluß an die isothermen Gaskugeln zu gewinnen, führen wir wie dort dimensionslose Größen ein. Es wird gesetzt

$$\xi = \frac{r}{l_0}, \quad \xi_0 = \frac{r_0}{l_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \quad (43)$$

mit

$$l_0^2 = \frac{\mathfrak{R} T_0}{4 \pi \mu \gamma \Gamma_0}, \quad t_0^2 = \frac{1}{8 \pi \gamma \Gamma_0}.$$

T_0 ist die Temperatur der Gaskugel, deren Aufbau wir als Anfangszustand voraussetzen. Γ_0 ist die Mittelpunktsdichte dieser Gaskugel. Aus (19), (20) und (24) ergibt sich ihr Wert zu

$$\Gamma_0 = \Gamma(R_{min}) = \frac{\alpha (\mathfrak{R} T_0)^3}{4 \pi \mu^3 \gamma^3 m_0^2}, \quad \alpha \approx 5.2 \cdot 10^2. \quad (44)$$

Mit Hilfe der dimensionslosen Größen (43) und dem aus (18) folgenden Ausdruck für $m(r_0)$ — also die Masse bis zur Entfernung r_0 , davon verschieden bezeichnet m_0 in (44) die feste Gesamtmasse der Gaskugel — geht (42) über in

$$\tau(\xi, \xi_0) = \left[- \xi_0^2 \frac{d \ln \xi_0}{d \ln \eta(\xi_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\xi}{\xi_0} \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \arctg \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (45)$$

Wir betrachten nun die Masse, die sich zur Zeit $\tau = 0$ in der Kugelschale zwischen ξ_0 und $\xi_0 + d \xi_0$ befindet. Nach der endlichen Zeit τ ist das Teilchen bei ξ_0 nach ξ gelaufen und das bei $\xi_0 + d \xi_0$ nach $\xi + d \xi$ (Definition von $d \xi$). Es muß also sein

$$\tau(\xi, \xi_0) = \tau(\xi + d \xi, \xi_0 + d \xi_0),$$

woraus sofort folgt

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} d \xi + \frac{\partial \tau}{\partial \xi_0} d \xi_0 = 0. \quad (46)$$

Die Kontinuitätsgleichung in LAGRANGEScher Form besagt ferner

$$\varrho(\xi_0) \xi_0^2 d \xi_0 = \varrho(\xi) \xi^2 d \xi,$$

also mit Hilfe von (46)

$$\varrho(\xi) = - \varrho(\xi_0) \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \xi}}{\frac{\partial \tau}{\partial \xi_0}}. \quad (47)$$

Nach Ausrechnung der partiellen Differentialquotienten unter Benutzung von (45) und Einsetzen der Dichtefunktion $\varrho(\xi_0)$ der Gaskugel nach (17), erhält man für die gesuchte Dichte

$$\frac{\varrho(\xi, \xi_0)}{\Gamma_0} = \frac{\xi_0^3 \eta(\xi_0)}{\xi^3 (1 + g(\xi, \xi_0))}, \quad \xi \neq 0 \quad (48)$$

mit

$$g(\xi, \xi_0) = \frac{1}{2} \left[3 + \xi_0^2 \eta(\xi_0) \frac{d \ln \xi_0}{d \ln \eta(\xi_0)} \right] \times \\ \times \left[\frac{\xi}{\xi_0} \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \arctg \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\xi_0}{\xi} \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (45)$$

$\eta(\xi_0)$ ist dabei die durch (17) bestimmte Funktion, wenn ξ durch ξ_0 ersetzt wird.

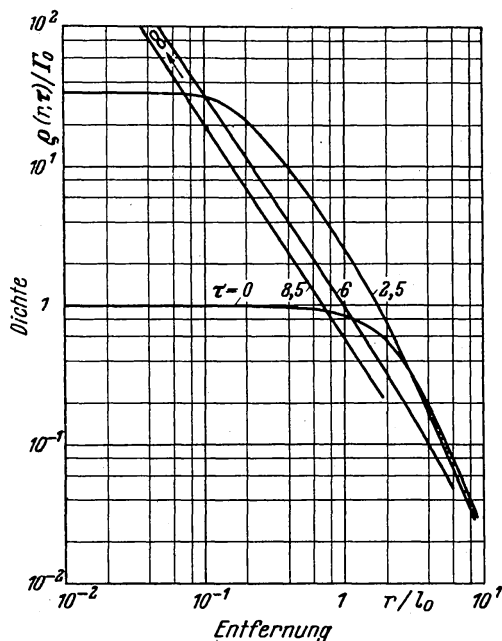


Abb. 4. Dichteverteilung der kontrahierenden Gaskugel.

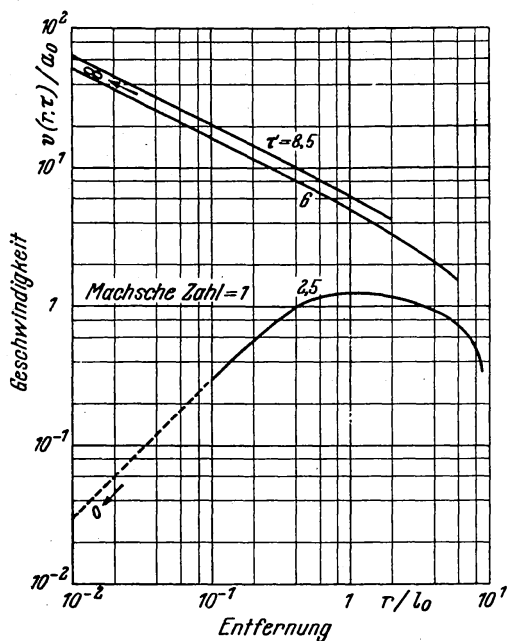


Abb. 5. Geschwindigkeitsverteilung der kontrahierenden Gaskugel.

Aus Gleichung (45) und (48) zusammen können wir nun den gesuchten Dichteverlauf über r zu verschiedenen Zeiten entnehmen. Dazu lassen wir bei festem τ ξ alle Werte durchlaufen und entnehmen aus (45) zu jedem ξ ein bestimmtes ξ_0 . Dieses $\xi_0(\tau, \xi)$ setzen wir dann in (48) ein und haben damit die EULERSche Dichte $\varrho(\xi, \tau)$ gewonnen. Ebenso gewinnt man aus (40) und (45) $v(\xi, \tau)$.

Abb. 4 u. 5 zeigt das Ergebnis. Für $\tau = 0$ haben wir nach Voraussetzung die Dichteverteilung einer isothermen Gaskugel, die bei $r = R_{min}$ enden soll. Mit wachsendem τ wandert der Rand zuerst langsam, dann schneller nach innen. Die Mittelpunktsdichte nimmt schnell zu und erreicht in endlicher Zeit — für $\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{3}$ — einen unendlichen Wert.

Die Zeit, in der die gesamte Masse der Gaskugel ins Zentrum gelangt, beträgt $\tau_0 = 8.88$. Mit Hilfe von (43) und (44) läßt sich diese Zeit in Sekunden angeben. Setzen wir als Masse der Gaskugel wieder die in Tab. 1 aufgeführte kleinste Masse M^* ein, und nennen die zu τ_0 und M^* gehörende Zeit t^* , so ist

$$t^* = 8 \cdot 10^{14} \left(\frac{T_I}{n_{II} T_{II}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ sec.} \quad (49)$$

Die Bezeichnungen sind wie in (26) gewählt. Durch Einsetzen von verschiedenen Temperatur- und Dichtewerten ergibt sich, daß t^* zwischen $1 \cdot 10^5$ und $3 \cdot 10^7$ Jahren liegt. Die in Abb. 5 verwendete Größe a_0 ist die Schallgeschwindigkeit, also $a_0^2 = \frac{\Re T_0}{\mu}$. Die Endphase der Kontraktion ist durch reine Potenzgesetze von ρ und v in r charakterisiert. Es gilt $\rho \sim r^{-\frac{3}{2}}$, $v \sim r^{-\frac{1}{2}}$.

Die zeitliche Abhängigkeit der Dichte im Mittelpunkt der Kugel läßt sich aus den bisherigen Formeln nicht entnehmen, da (48) für $\xi = 0$ nicht mehr gilt. Man erhält sie als Lösung einer einfachen nichtlinearen Differentialgleichung. Ist Γ die zeitabhängige Mittelpunktsdichte und Γ_0 durch (49), sowie τ durch (43) gegeben, so ist

$$\tau = \sqrt{3} \left\{ \left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{6}} \left[1 - \left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} + \arcsin \left[1 - \left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (50)$$

Tabelle 4.

τ	Γ/Γ_0
0.000	1.0
1.205	1.5
2.066	5.0
2.286	10.0
2.683	10^3
2.721	∞

die Umkehrfunktion der gesuchten Funktion. Tab. 4 gibt einige Werte dieser Funktion.

Daß die Dichte im Mittelpunkt unendlich wird, liegt an der vollständigen Vernachlässigung des Gasdruckes, ist also eine Folge unseres sehr groben Näherungssatzes. In Wirklichkeit verhindert der Gasdruck stets ein Unendlichwerden der Dichte.

Wieweit unsere hier behandelte Näherungslösung schon einige charakteristische Züge der wirklichen Verdichtung unter dem Einfluß der Eigengravitation gut wiedergibt, wird sich erst entscheiden lassen, nachdem eine genauere Rechnung mit Berücksichtigung des Gasdruckes durchgeführt sein wird.

Herrn Prof. v. WEIZSÄCKER bin ich für die Ermöglichung dieser Arbeit und für viele Diskussionen zu großem Dank verpflichtet. Dem Max-Planck-Institut für Physik danke ich für die Gewährung eines Stipendiums.

Literatur.

- [1] EBERT, R.: Z. Astrophysik **36**, 222 (1955). — [2] EMDEN, R.: Gaskugeln. Leipzig: Teubner 1907. — [3] FRIEMAN, E. A.: Astrophysic. J. **120**, 18 (1954). — [4] KAHN, F. D.: Bull. Astr. Netherlands **12**, Nr. 456 (1954). — [5] LEDOUX, P.: Ann. d'Astrophysique **14**, 438 (1951). — [6] LÜST, R.: Z. Naturforsch. **7a**, 87 (1952). [7] OORT, J. H., L. BIERMANN and A. SCHLÜTER: Cambridge Symposium on Gas Dynamics of Interstellar Clouds 1953. — [8] SPITZER, L.: Astrophysic. J. **120**, 1 (1954). — [9] WEIZSÄCKER, C. F. v.: Z. Naturforsch. **3a**, 524 (1948).

Dr. R. EBERT, Göttingen, Max-Planck-Institut für Physik.