

Die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne.

Von

ERIKA VITENSE, Kiel.

Mit 11 Textabbildungen.

(Eingegangen am 15. November 1952.)

Es wird ein Modell der Wasserstoffkonvektionszone untersucht unter Berücksichtigung des Zusammenwirkens von konvektivem und Strahlungsenergietransport. Dabei ergibt sich, daß die Temperaturschichtung bis etwa $\bar{\tau} = 2$ dem Zustande des Strahlungsgleichgewichtes entspricht, dann folgt eine ausgedehnte Übergangszone, an die sich erst etwa bei $\log P_g = 7,5$ bis 8 eine praktisch adiabatische Schichtung anschließt. Die Dicke der Konvektionszone ergibt sich je nach Größe des angenommenen Mischungsweges der Turbulenzelemente zu 65000 bis 160000 km. Die Turbulenzelemente der Konvektionszone, die an der Sonnenoberfläche als Granulationselemente sichtbar werden, können ohne Schwierigkeit bis etwa $\bar{\tau} = 0,3$ aufsteigen, wo sie noch beobachtet werden. Die Untersuchung eines bis $\bar{\tau} = 0,3$ aufsteigenden Granulationselementes liefert Geschwindigkeiten von 2—4 km/sec. Vergleicht man die Temperatur eines solchen Elementes mit der mittleren Temperatur seiner Umgebung bei gleichem Druck, d. h. in gleicher *geometrischer* Tiefe, so erhält man maximale Temperaturdifferenzen von etwa 3500° bei einer mittleren Temperatur von 6300°. Vergleicht man dagegen die Temperatur eines Granulationselementes mit seiner Umgebung bei gleichen *optischen* Tiefen τ , wie es für die Deutung der Beobachtungen notwendig ist, so ergibt die Rechnung maximale Temperaturdifferenzen von 1000° und mittlere Temperaturdifferenzen von ungefähr 300°.

Einleitung.

In älteren Arbeiten über die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne wird allgemein so gerechnet, als ob gleich nach Einsetzen der Konvektion die Schichtung etwa einer *Adiabat* folgen würde. Allerdings hatte schon L. BIERMANN [3] festgestellt, daß in der Nähe der oberen Grenze der Wasserstoffkonvektionszone der konvektive Energietransport nicht ganz ausreichen dürfte und die wirkliche Schichtung der Sonne deshalb wohl zwischen der Strahlungsgleichgewichtsschichtung und der adiabatischen liegen müsse. Jedoch ist diese Übergangszone bisher noch nicht untersucht worden (außer bei WOOLLEY [22], der aber ihre Ausdehnung erheblich unterschätzt). Auch blieb ihr Einfluß auf die anschließende adiabatische Schicht unberücksichtigt. Weiterhin weist die Erfahrungstatsache, daß die aufsteigenden Granulationselemente an der Sonnenoberfläche — wo man sie beobachtet — nicht kälter, sondern *wärmer* als ihre Umgebung ankommen, auf eine wesentliche Abweichung von der Adiabat in der Übergangszone hin. Es soll deshalb im folgenden versucht werden, die Schichtung der solaren

Wasserstoffkonvektionszone und insbesondere der Übergangsschicht, die sich als ganz wesentlich erweist, genauer zu untersuchen. Wir werden dabei, wie das auch in den Arbeiten von BIERMANN, COWLING, ÖPIK u. a. geschehen ist, mit der PRANDTLschen Theorie des Mischungsweges rechnen, d. h. wir werden annehmen, daß jedes Turbulenzelement genau einen Mischungsweg l zurücklegt und sich dann schlagartig auflöst, während es sich ja tatsächlich Stück für Stück verändert und in kleinere Elemente zerteilt. Leider ist über die wesentlich in die Untersuchungen eingehende Größe des Mischungsweges l nur bekannt, daß er etwa von der Größenordnung einer Äquivalenthöhe H sein wird. Genaueres läßt sich darüber im Augenblick nicht aussagen; unsere Ergebnisse werden infolgedessen größtenteils einen halbquantitativen Charakter tragen. Wir haben daher die ganzen Rechnungen für zwei verschiedene Größen des Mischungsweges, nämlich $l = H$ und $l = 2H$ durchgeführt, wobei wir jedoch der ersteren Annahme die größere Bedeutung beimessen. Wegen der erwähnten Unsicherheit wurde darauf verzichtet, den Einfluß der Rotation, der Turbulenzreibung und eventuell vorhandener Magnetfelder zu berücksichtigen. Alle diese Effekte würden in der gleichen Richtung wirken, nämlich wie eine Verkleinerung des Mischungsweges. Berücksichtigen werden wir dagegen den Energieverlust der Turbulenzelemente durch Abstrahlung, der gerade in der Übergangsschicht den wesentlichen Teil der gesamten Energieabgabe ausmacht.

Sodann ergänzen wir noch unsere Übersicht durch einige prinzipielle Betrachtungen über das Zusammenwirken von konvektivem und Strahlungsenergetransport anhand des Entropiediagramms der Stellarmaterie nach A. UNSÖLD [17].

Trägt man das von E. VITENSE [21] angegebene, aus den Arbeiten von CHALONGE, KOURGANOFF und BARBIER [5], [1] abgeleitete empirische Sonnenmodell (im Durchschnitt etwa 100° niedriger als bei dem ursprünglichen DE JAGER-Modell) in dieses Diagramm ein, so zeigt sich, daß es bei etwa $\tau_0 = 0,8$ (τ_0 = optische Tiefe für $\lambda = 5010 \text{ \AA}$) gegen Konvektion instabil wird, denn von hier ab wächst die Entropie mit zunehmender Tiefe (s. Abb. 4). Für größere Tiefen muß deshalb bei der Berechnung der Temperaturschichtung der Einfluß der Konvektion untersucht werden. Bei der Ableitung des bisher meistbenutzten Sonnenmodells von C. DE JAGER [7] wird im wesentlichen so getan, als ob das Modell von der Instabilitätsgrenze ab einer Adiabaten, d. h. im Entropiediagramm (s. Abb. 4) einer Geraden $S = \text{const}$ folgen würde. Für die Tiefen bis $\tau_0 = 1,5$ dürfte aber das empirische Modell noch zuverlässig sein, und danach nimmt die Entropie jedenfalls zunächst noch zu. Andererseits zeigt auch schon ein Blick auf die Sonnenoberfläche, daß die aufsteigenden Granulationselemente mindestens bis $\tau_0 = 0,3$ mit einem Temperaturüberschuß ankommen. Würde das Modell schon ab $\tau_0 = 0,8$ der

Adiabaten $S = \text{const}$ folgen, so könnten die näherungsweise adiabatisch, d. h. auf einer Geraden $S = \text{const}$. aufsteigenden Granulationselemente in den beobachtbaren Schichten der Sonnenatmosphäre nur mit einem Temperaturunterschluß ankommen, was den Beobachtungen widersprechen würde. Dies weist zusammen mit der empirisch bestimmten Temperaturschichtung darauf hin, daß die Sonne in Tiefen größer als $\tau_0 = 0,8$ trotz der Instabilität gegen Konvektion zunächst noch nicht adiabatisch geschichtet ist. Vielmehr muß die Entropie mit wachsendem $\log P_g$ zunächst zunehmen. Nur wenn sie in größeren Tiefen über den Wert an der Sonnenoberfläche hinauskommt, kann ja ein aus der Tiefe adiabatisch (mit $S = \text{const}$) aufsteigendes Granulationselement oben mit einem Temperaturüberschuß ankommen. Die trotz Einsetzens der Konvektion nichtadiabatische Schichtung läßt sich folgendermaßen verstehen: Wäre die Sonne bei $\tau_0 > 0,8$ streng adiabatisch geschichtet, so würde ein irgendwie nach oben in Bewegung gesetztes Turbulenzelement, das etwa adiabatisch aufsteigt, gar keine Temperaturerhöhung gegenüber seiner Umgebung erhalten, es würde also keinen Auftrieb erfahren und bald zur Ruhe kommen, d. h. es könnte gar keine Konvektion stattfinden.

Bezeichnen wir im folgenden die mittlere Temperatur einer bestimmten Schicht mit T und den zugehörigen Gasdruck mit P_g , so möge der logarithmische Gradient dieser mittleren Temperatur $\frac{d \log T}{d \log P_g}$ mit ∇ bezeichnet werden. ∇_{ad} wollen wir für das $\frac{d \log T}{d \log P_g}$ schreiben, das wir zu dem mittleren T und P_g einer bestimmten Schicht erhalten würden, wenn die Schichtung von hier ab adiabatisch wäre. ∇_{ad} gibt dann zugleich das $\frac{d \log T(t)}{d \log P_g(t)}$ eines ohne Wärmeaustausch, d. h. adiabatisch aufsteigenden Turbulenzelementes an, wobei t die Zeitkoordinate ist.

Entsprechend dem ∇_{ad} bezeichnen wir mit ∇_{Str} das $\frac{d \log T}{d \log P_g}$, welches sich einstellen müßte, wenn an der betrachteten Stelle alle Energie durch Strahlung transportiert würde, d. h. wenn die Schichtung in T und P_g dem Strahlungsgleichgewichtszustand entspräche. Nach dem SCHWARZSCHILD'schen Kriterium kann dann überhaupt erst Konvektion einsetzen, und damit Energie konvektiv transportiert werden, wenn $\nabla > \nabla_{ad}$ ist. Ist ∇ nur wenig größer als ∇_{ad} , so gewinnen die aufsteigenden Elemente nur einen kleinen Temperaturüberschuß. Es wird deshalb nur wenig Energie konvektiv transportiert. Der größte Teil muß durch Strahlung transportiert werden, und der Gradient ∇ muß sich mehr dem Strahlungsgleichgewichtsgradienten ∇_{Str} annähern. Da nun ∇_{Str} sicher der steilste Gradient ist, der überhaupt möglich ist — sonst würde ja allein durch die Strahlung schon zu viel Energie transportiert, — so bedeutet eine Annäherung an ∇_{Str} ein Aufsteilen des Gradienten. Dadurch wird

hinwiederum der konvektive Energietransport verstärkt. Im stationären Zustand wird sich nun der Temperaturgradient so einstellen müssen, daß der konvektive Energiestrom πF_k und der strahlungsmäßig transportierte Energiestrom πF_{Str} zusammen gerade den gesamten Energiestrom der Sonne σT_e^4 ergeben¹. ∇ kann demnach maximal gleich ∇_{Str} werden, wenn verschwindend wenig Energie konvektiv transportiert wird, und muß minimal etwas oberhalb ∇_{ad} bleiben, wenn der größte Teil der Energie konvektiv transportiert wird. $\nabla = \nabla_{ad}$ kann streng genommen nie erreicht werden, denn auch in einer adiabatisch geschichteten Atmosphäre wird ja noch ein bestimmter Bruchteil der Energie durch Strahlung transportiert. Es gilt also stets $\nabla_{Str} > \nabla > \nabla_{ad}$. In der Nähe von $\tau_0 = 0,8$, wo ∇_{Str} und damit sicher auch ∇ nur wenig größer als ∇_{ad} sind, werden wir nur einen sehr geringen konvektiven Energietransport erhalten, der weitaus größte Teil der Energie muß strahlungsmäßig transportiert werden. Es muß also $\nabla \approx \nabla_{Str}$ sein. Demnach wird unser Modell zunächst noch etwa so aussehen wie ein Strahlungsgleichgewichtsmodell. Im Entropiediagramm steigt die Kurve, die das Modell wiedergibt, nach rechts hin an. Erst langsam, wenn $\nabla_{Str} \gg \nabla_{ad}$ wird, wird der konvektive Energietransport merklich, ∇ wird kleiner und nähert sich schließlich mehr und mehr ∇_{ad} an. Erst in ziemlich großen Tiefen können wir in hinreichender Annäherung mit $\nabla = \nabla_{ad}$ rechnen.

Berechnung der mittleren Temperatur- und Druckverteilung in der Sonnenatmosphäre.

Für die genaue Berechnung des Modelles müssen wir zunächst Konstanz des Energiestroms fordern, d. h.

$$\pi F_k + \pi F_{Str} = \pi F = \sigma T_e^4, \quad (1)$$

wo πF den Gesamtstrahlungsstrom und T_e die effektive Temperatur bedeutet.

Die durch Strahlung transportierte Energie πF_{Str} ist für große $\bar{\tau}$ in guter Näherung gegeben durch (vgl. z. B. A. UNSÖLD [18] u. [17])

$$\pi F_{Str} = \frac{16}{3} \frac{\sigma T^4}{\bar{\kappa} \cdot H} \cdot \nabla. \quad (2)$$

Dabei ist T die jeweils herrschende Temperatur, $\bar{\kappa}$ der ROSSELANDSche Mittelwert des Absorptionskoeffizienten pro cm und $H = \frac{R T}{\mu g}$ die Äquivalenzhöhe mit R = Gaskonstante, μ = mittleres Molekulargewicht, g = Schwerebeschleunigung.

¹ Bei RUDKJÖBING [15] bleibt der konvektive Energiestrom in der Energiegleichung unberücksichtigt. Unter der Annahme einer adiabatischen Schichtung in der Konvektionszone darf man aber konsequenterweise nicht den konvektiven Energiestrom als vernachlässigbar klein annehmen.

Insbesondere gilt

$$\sigma T_e^4 = \frac{16}{3} \frac{\sigma T^4}{\bar{\kappa} \cdot H} \cdot V_{Str}, \quad (2a)$$

da ja V_{Str} definiert wurde als *das* V , bei dem $\pi F_{Str} = \pi F = \sigma T_e^4$ wäre. Durch diese Gleichung ist V_{Str} bestimmt zu

$$V_{Str} = \frac{3}{16} \left(\frac{T_e}{T} \right)^4 \bar{\kappa} \cdot H = \frac{3}{16} \left(\frac{T_e}{T} \right)^4 \cdot \frac{\bar{\kappa} P_g}{g}, \quad (2b)$$

wenn man rechts $\bar{\kappa}$ pro gr. rechnet.

Der konvektive Energiestrom πF_k , d. h. die pro sec durch die Flächeneinheit transportierte Energie ist

$$\pi F_k = c_p \varrho \overline{\Delta T} \cdot \bar{v} = c_p \varrho T \cdot \frac{\overline{\Delta T}}{T} \cdot \bar{v}, \quad (3)$$

wobei c_p die spezifische Wärme pro gr., ϱ die Dichte, $\bar{v}$ die mittlere Geschwindigkeit der aufsteigenden Turbulenzelemente in der betrachteten Schicht und $\overline{\Delta T}$ deren mittleren Temperaturüberschuß gegenüber der Umgebung bedeuten. Darin müssen wir zunächst das $\overline{\Delta T}$ und das $\bar{v}$ bestimmen. Wir bezeichnen im folgenden die mittlere Temperatur eines Elementes mit T' im Gegensatz zur mittleren Temperatur der Umgebung, die wir mit T bezeichnet haben. Es sei dann $\xi' = \frac{dT'}{dx}$, wobei x die Lagekoordinate des aufsteigenden (oder absteigenden) Turbulenzelementes ist, gezählt vom Startpunkt aus. ξ' ist demnach der lineare Gradient für die mittlere Temperatur eines bewegten Elementes ($x = x(t)$ und $T' = T'(t)$). Entsprechend bezeichnen wir den linearen Gradienten der Umgebung $\frac{dT}{dx}$ mit ξ . Damit wird dann der Temperaturunterschied eines Elementes gegenüber der Umgebung

$$\Delta T = \int_0^x (\xi' - \xi) dx = (\xi' - \xi) \cdot x, \quad (4)$$

wenn wir näherungsweise $\xi' - \xi$ als konstant annehmen (sonst wäre ein geeigneter Mittelwert zu nehmen).

Zur Bestimmung des $\bar{v}$ gehen wir aus von dem Energiesatz

$$\frac{m}{2} v^2 = \int_0^x K(x) dx,$$

wobei K die Auftriebskraft bedeutet und gegeben ist durch

$$\begin{aligned} K &= - \text{Volumen} \cdot g \cdot \Delta \varrho = \\ &= \text{Volumen} \cdot g \cdot \varrho \frac{\Delta T}{T} = m \cdot g \cdot \frac{\Delta T}{T} = m \cdot g \cdot \frac{\xi' - \xi}{T} \cdot x. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\frac{m}{2} v^2 = m \cdot g \cdot \int_0^x \frac{\xi' - \xi}{T} \cdot x dx \approx m \cdot g \cdot \frac{\xi' - \xi}{T} \cdot \frac{x^2}{2},$$

wenn wir wieder $\frac{\xi' - \xi}{T}$ als konstant annehmen oder einen geeigneten Mittelwert benutzen. So erhalten wir

$$v = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\int_0^x \frac{\xi' - \xi}{T} x dx} \approx \sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{\xi' - \xi}{T}} \cdot x. \quad (5)$$

Es wird also v etwa proportional der Entfernung des Elementes vom Startpunkt. Nehmen wir im Rahmen der PRANDTL'schen Mischungswegtheorie an, daß jedes Turbulenzelement einen Mischungsweg l zurücklegt und sich dann auflöst, so wird

$$\bar{v} = \frac{\int_0^l v dx}{\int_0^l dx} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{\xi' - \xi}{T}} \cdot \frac{l}{2}, \quad (6)$$

d. h. gleich der Geschwindigkeit bei $x = l/2$, wenn wir annehmen, daß alle x gleich wahrscheinlich sind¹.

Für das $\overline{\Delta T}$ ergibt sich analog

$$\overline{\Delta T} \approx (\xi' - \xi) \cdot l/2. \quad (7)$$

Drücken wir $\xi = \frac{dT}{dx}$ durch

$$\nabla = \frac{d \log T}{d \log P_g} = \frac{dT}{dT} \cdot \frac{P_g}{T} = \frac{P_g}{T} \cdot \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dx}{dP_g} = - \frac{P_g}{T} \cdot \frac{1}{g \varrho} \cdot \xi$$

aus, so wird mit

$$\xi = - \nabla \cdot \frac{T}{P_g} \cdot g \cdot \varrho = - \nabla \cdot \frac{g \mu}{RT} \cdot T = - \nabla \cdot \frac{1}{H} \cdot T$$

schließlich

$$\frac{\overline{\Delta T}}{T} \approx (\nabla - \nabla') \cdot \frac{l}{2H}. \quad (7a)$$

Dabei ist mit ∇' jetzt $\frac{d \log T'}{d \log P_g}$ für die mittlere Temperatur eines Elementes T' gemeint, während ∇ wieder das $\frac{d \log T}{d \log P_g}$ für die mittlere Temperatur der Umgebung bezeichnet. Damit wird dann²

$$\pi F_k = c_p \cdot \varrho \cdot T \cdot \bar{v} \cdot \frac{l}{2H} [\nabla - \nabla'] \quad (3a)$$

¹ In den älteren Arbeiten von L. BIERMANN [2], [3] über die Konvektionszone wird durchweg mit $\bar{v}^2 = g \frac{l^2}{T} [\xi' - \xi]$ gerechnet. In der neueren Arbeit dagegen [4] tritt im $\bar{v}^2$ noch zusätzlich zu unserem Faktor 1/4 ein Faktor 1/2 auf, der dort wegen der Turbulenzreibung hereinkommt, die hier aber vernachlässigt wird.

² Bei L. BIERMANN [3] ist πF_k um einen Faktor 2 größer, in seiner neueren Arbeit dagegen [4] wird der obige Ausdruck benutzt. Eine von uns durchgeführte Rechnung mit den in den älteren Arbeiten von L. BIERMANN benützten Formeln zeigt, daß man damit Werte erhält, die in sich inkonsistent sind (vgl. Anm. 1 S. 145).

mit

$$\bar{v}^2 = g \cdot \frac{l^2}{4H} \cdot [\nabla - \nabla'] \quad (\nabla' < \nabla) \quad (6a)$$

Diese beiden Gleichungen (3a) und (6a) sind nun zusammen mit dem Energiesatz (1) und der Bestimmungsgleichung (2) für πF_{str} die vier notwendigen Gleichungen zur Berechnung unserer 4 Unbekannten πF_{str} , πF_k , $\bar{v}$ und ∇ . Das ∇ bestimmt uns dann schließlich die gesuchte Temperaturschichtung $T(P_g)$. Außer dem ∇ brauchen wir noch ∇' , d. h. den Gradienten eines aufsteigenden Turbulenzelementes. Ohne Wärmeabgabe unterwegs wäre — wie wir schon erwähnten — ∇' gleich dem adiabatischen Gradienten ∇_{ad} . Die in den höheren Schichten der Sonne wesentliche Energieabgabe der Turbulenzelemente durch Strahlung bedingt, daß $\nabla' > \nabla_{ad}$.

Einem Gedanken von A. UNSÖLD folgend, können wir nun ∇' relativ einfach berechnen mit Hilfe einer Größe γ , die das Verhältnis des überschüssigen Energieinhaltes des Elementes infolge seines Temperaturüberschusses gegenüber einem gleich großen mittleren Volumelement der Umgebung zur Abstrahlung während der Lebensdauer angibt, d. h.

$$\gamma = \frac{\text{Überschüssiger Energieinhalt}}{\text{Abstrahlung während der Lebensdauer}}.$$

Der überschüssige Energieinhalt ist $c_p \varrho \Delta T \cdot \text{Volumen}$. Die abgestrahlte Energie ist, wenn wir das Element zunächst als optisch *dünn* betrachten, gleich $\sigma \cdot \Delta(T^4) \cdot \bar{\kappa} \cdot l \cdot l/\bar{v} \cdot \text{Oberfläche}$, wenn l auch etwa der Durchmesser eines Turbulenzelementes ist. $l/\bar{v}$ ist etwa die Lebensdauer des Elementes. Wenn dagegen das Element optisch *dick*, also $\bar{\kappa} \cdot l \gg 1$ ist, so wird die Strahlung am Abströmen gehindert und zwar um so mehr, je größer $\bar{\kappa} \cdot l$ ist. Man kann dann näherungsweise die Strahlungsgleichgewichtstheorie auf den horizontalen Strahlungstransport anwenden. Es ist für große $\bar{\tau}$ das $F(\bar{\tau}_q) = \frac{dB}{d\bar{\tau}_q} \cdot \frac{4}{3}$. Dabei setzen wir den Index q , um zu betonen, daß es sich in diesem Fall um das $\bar{\tau}$ handelt, das von der Grenzschicht zweier Turbulenzelemente her in die Turbulenzelemente hinein gezählt wird, also quer zum normalen $\bar{\tau}$. B bedeutet die Kirckhoff-Planck-Funktion. Nehmen wir in dem Element ganz grob eine lineare Temperaturverteilung an $T' = T_0 + \frac{\Delta T}{l/2} \cdot \frac{\bar{\tau}_q}{\bar{\kappa}}$, so erhalten wir $\pi F(\tau_q) = \frac{8}{3} \cdot \sigma \cdot \Delta(T^4) \cdot \frac{1}{\bar{\kappa} l}$ für große $\bar{\kappa} \cdot l$.

Wir haben also

$$\pi F_{\text{Abstrahlung}} = \begin{cases} \sigma \Delta(T^4) \cdot \bar{\kappa} \cdot l & \text{für } \bar{\kappa} \cdot l \ll 1 \\ \frac{8}{3} \cdot \sigma \Delta(T^4) \cdot \frac{1}{\bar{\kappa} \cdot l} & \text{für } \bar{\kappa} \cdot l \gg 1 \end{cases}$$

Um für $\bar{\kappa} \cdot l = 1$ einen stetigen Anschluß zu bekommen, lassen wir den Faktor $8/3$ in der 2. Formel weg, da er ohnehin nur auf einer relativ

groben Abschätzung beruht. Dann können wir die beiden Fälle zusammenfassen in der einen Formel

$$\pi F_{\text{Abstrahlung}} = \sigma \Delta (T^4) \cdot [\bar{\kappa} \cdot l], \text{ wobei sein soll } [\bar{\kappa} \cdot l] = \begin{cases} \bar{\kappa} \cdot l & \text{wenn } \bar{\kappa} \cdot l \ll 1 \\ \frac{1}{\bar{\kappa} \cdot l} & \text{wenn } \bar{\kappa} \cdot l \gg 1. \end{cases}$$

γ wird dann

$$\gamma = \frac{1}{4} \cdot \frac{c_p \varrho T \cdot \text{Volumen}}{\sigma T^4 [\bar{\kappa} \cdot l] \cdot \text{Oberfläche}} \cdot \frac{\bar{v}}{l}. \quad (8)$$

Die Rechnung zeigt, daß in der interessierenden Schicht $\bar{\kappa} \cdot l$ durchweg größer als 1 ist. Wir können deshalb für die Rechnung im allgemeinen $[\bar{\kappa} \cdot l]$ ersetzen durch $\frac{1}{\bar{\kappa} \cdot l}$. Um das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche zu bestimmen, schematisieren wir das Element durch einen Zylinder, dessen Durchmesser und Höhe gleich l seien. So erhalten wir

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{Oberfläche}} = \frac{l}{4}.$$

(Für kugelförmige Volumelemente würden wir $l/6$ erhalten.)

Damit wird dann

$$\gamma = \frac{c_p \varrho T \cdot \bar{\kappa} \cdot l}{16 \sigma T^4} \cdot \bar{v} = \gamma_0 \cdot \bar{v} \quad \text{mit} \quad \gamma_0 = \frac{c_p \varrho T \cdot \bar{\kappa} \cdot l}{16 \sigma T^4}, \quad (8a)$$

das allerdings wohl um einen Faktor 2—3 unsicher sein dürfte.

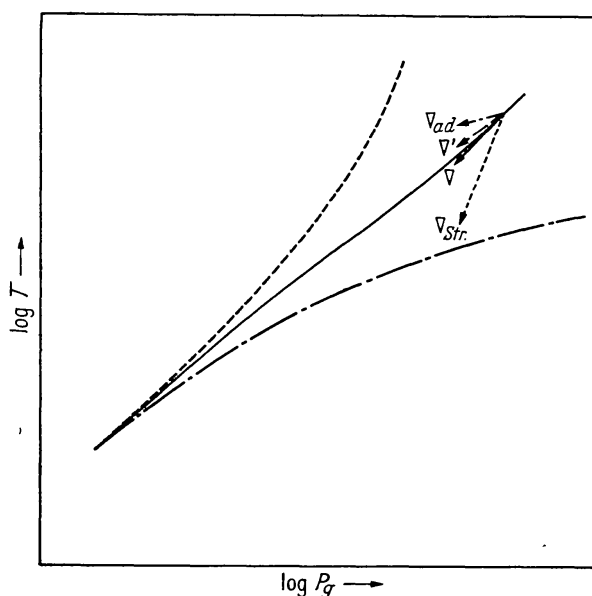


Abb. 1. Zur Ableitung der Beziehung (9). — — — Strahlungsgleichgewichtsschichtung entsprechend dem Gradienten ∇_{Str} ; — · — · — adiabatische Schichtung entsprechend ∇_{ad} ; — — — wirkliche Schichtung entsprechend ∇ . Außerdem ist eingezeichnet ∇' , der mittlere Gradient der durch den Punkt $\log T, \log P_g$ aufsteigenden oder absteigenden Turbulenzelemente.

Mit Hilfe dieses γ , das ein Maß für den relativen Energieverlust des Turbulenzelementes auf seinem Wege ist, wollen wir nun versuchen, den logarithmischen Temperaturgradienten eines bewegten Elementes ∇' zu bestimmen. Dazu bedienen wir uns der schematischen Abb. 1. Skizziert ist zunächst der Verlauf von $\log T$ als Funktion von $\log P_g$, wie wir ihn unter Vernachlässigung der Konvektion erhalten würden (-----); der Anstieg dieser Kurve entspricht dem ∇_{Str} . Ferner ist die adiabatische Schichtung eingezeichnet (— · — · —), deren Gradient dem ∇_{ad} entspricht, und

schließlich noch die wirklich zu erwartende Schichtung mit dem Gradienten ∇ (——). Nach unseren früheren Überlegungen muß stets sein $\nabla_{Str} > \nabla > \nabla_{ad}$. Nunmehr untersuchen wir ein mittleres Element¹, das sich gerade durch einen beliebig herausgegriffenen Punkt mit dem zu berechnenden Gradienten ∇' bewegt. Es muß jedenfalls $\nabla > \nabla' > \nabla_{ad}$ sein, denn wenn das Element gar keine Wärme abgibt, steigt es mit ∇_{ad} , flacher kann es in unserem Diagramm nicht aufsteigen. Wenn es sehr viel Wärme abgibt, steigt es höchstens mit ∇ , dem Gradienten der Umgebung. Steiler kann ein mittleres Element sicher nicht aufsteigen, denn sonst würde es sich ja gegenüber der Umgebung abkühlen und schnell zur Ruhe kommen. Da nun γ das Verhältnis des überschüssigen Energieinhaltes zur abgestrahlten Energie bezeichnet, andererseits aber $\nabla' - \nabla$ den Temperaturüberschuß, also den überschüssigen Energieinhalt bestimmt, und die Differenz $\nabla_{ad} - \nabla'$ durch die abgestrahlte Energie bestimmt ist, so muß gelten

$$\frac{\nabla' - \nabla}{\nabla_{ad} - \nabla'} = \gamma. \quad (9)$$

Damit haben wir nun die notwendige Gleichung zur Bestimmung unserer letzten Unbekannten, dem ∇' gefunden.

Für die Rechnung empfiehlt es sich, unsere früheren Gleichungen (1), (2) und (3a) noch folgendermaßen umzuformen:

Aus (2) und (1) erhalten wir

$$\pi F_{Str} = \frac{16}{3} \cdot \frac{\sigma T^4}{\bar{\kappa}/\text{cm} \cdot H} \cdot \nabla = \sigma T_e^4 - \pi F_k.$$

Daraus folgt

$$\nabla = (\sigma T_e^4 - \pi F_k) \cdot \frac{3 \bar{\kappa} \cdot H}{16 \sigma T^4}$$

und mit Hilfe von (2a)

$$\nabla = \nabla_{Str} - \pi F_k \cdot \frac{3 \bar{\kappa} \cdot H}{16 \sigma T^4}.$$

Setzen wir πF_k nach (3a) ein und lösen nach ∇ auf, so wird

$$\nabla (1 + \beta) = \nabla_{Str} + \nabla' \cdot \beta$$

oder

$$\nabla = \frac{\nabla_{Str} + \beta \nabla'}{1 + \beta}. \quad (10)$$

Dabei haben wir β zur Abkürzung für den Ausdruck $\frac{3}{16 \cdot 2} \cdot \frac{\bar{\kappa} \cdot H}{\sigma T^4} c_p \cdot \varrho \times T \cdot \bar{v} \cdot \frac{l}{H}$ geschrieben. Vergleichen wir β mit dem γ , so sehen wir, daß $\beta = 3/2 \gamma$ ist.

¹ Als mittleres Element bezeichnen wir eines, dessen Zustandsgrößen etwa den Mittelwerten aller durch diesen Punkt ab- oder aufsteigenden Elemente entsprechen.

Verwenden wir die Gleichung (10) noch zur Umformung von (9), so wird¹:

$$\nabla' = \frac{\nabla_{Str} + \gamma (1 + \beta) \nabla_{ad}}{1 + \gamma (1 + \beta)} = \frac{\nabla_{Str} + \gamma (1 + \frac{3}{2} \gamma) \cdot \nabla_{ad}}{1 + \gamma (1 + \frac{3}{2} \gamma)}. \quad (9a)$$

Für die Rechnung stehen uns also jetzt die fünf Gleichungen (2a), (6a), (9a) und (10) zur Bestimmung von ∇_{Str} , $\bar{v}$, ∇' und ∇ zur Verfügung. πF_{Str} und πF_k treten nicht mehr explizit auf, lassen sich aber aus den anderen Größen sofort nach (2) und (3) angeben.

Zur Lösung dieses Gleichungssystems (2a), (6a), (9a) und (10) macht man zweckmäßig Reihenentwicklungen einerseits für kleine und andererseits für große γ .

Für kleine γ erhält man

$$\bar{v} = \frac{RT}{4\mu} \cdot \gamma_0 (\nabla_{Str} - \nabla_{ad}) \cdot \left(\frac{l}{H}\right)^2.$$

Für große γ wird

$$\bar{v}^3 = \frac{1}{6} \frac{RT}{\mu} \cdot \frac{1}{\gamma_0} (\nabla_{Str} - \nabla_{ad}) \cdot \left(\frac{l}{H}\right)^2.$$

Mit dem $\bar{v}$ kann man dann nach (9a) das ∇' und dann nach (10) das ∇ in dem betrachteten Punkt berechnen.

Für mittlere γ rechnet man zu verschiedenen $\bar{v}$ das γ aus, damit nach (9a) und (10a) das ∇' und ∇ und dann nach (6a) wiederum das $\bar{v}$. Der Ausgangswert von $\bar{v}$ muß dann so gewählt werden, daß er mit dem $\bar{v}$ nach (6a) übereinstimmt. Dadurch ist $\bar{v}$ festgelegt.

Die in die Rechnungen eingehenden Zahlenwerte von c_p , $\bar{\kappa}$, μ und ∇_{ad} wurden dabei jeweils den Arbeiten von A. ROSA und A. UNSÖLD [13], von E. VITENSE [20] (für große P_g wurde graphisch extrapoliert), von A. ROSA [12] und A. UNSÖLD [17] entnommen.

Mit $\nabla = \frac{d \log T}{d \log P_g}$ erhält man durch Integration nach $\log P_g$ das $\Delta \log T = \int_{\log P_{g0}}^{\log P_{g0} + \Delta \log P_g} \nabla d \log P_g \sim \nabla \cdot \Delta \log P_g$. Damit bekommt man $\log T$ und $\log P_g$ in dem nächsten Punkt und kann dort dann $\bar{v}$, ∇' und ∇ berechnen. Auf diese Weise integriert man schrittweise in 1. Näherung. Zur Verbesserung kann man dann das ∇ ($\log P_g$) genau integrieren und erhält so bessere Werte von $\log T$ ($\log P_g$), zu denen man wieder das neue ∇ ausrechnet, usw.

Bei unseren Rechnungen wurde diese Iteration mit jedem Schritt durchgeführt, d. h. es wurde praktisch nach dem ADAMS-STÖRMER-

¹ Zu demselben Ergebnis — bis auf einen Faktor $\sqrt{2}$ vor dem γ — kommt man auch anhand einer neueren Arbeit von ÖPIK [11], wenn man sie dahingehend korrigiert, daß an der Grenze der Konvektionsschicht *alle* überschüssige Energie abgegeben wird. Sonst könnte ja die Materie gar nicht wieder herunterfallen.

Verfahren gerechnet, wobei zur Interpolation aber statt der Polynome das Kurvenlineal benutzt und dann graphisch integriert wurde.

Eine wesentliche Schwierigkeit liegt aber noch in der Bestimmung des Verhältnisses l/H . Um dieses Verhältnis genau festzulegen, wäre eine Turbulenztheorie kompressibler Medien erforderlich. Die Kompressibilität geht hier in zweierlei Hinsicht ein: einmal über das Gravitationsfeld, das über die in Frage kommenden Entfernungen große Dichteänderungen hervorruft; zum anderen spielt die Kompressibilität eine Rolle wegen der hier auftretenden relativ großen Machzahlen, die schon an die Größenordnung von Eins herankommen, da wir es mit Geschwindigkeiten von einigen Kilometern pro sec zu tun haben.

Solange eine solche Turbulenztheorie kompressibler Medien aber noch nicht verfügbar ist, kann man nur sagen, daß das Verhältnis l/H von der Größenordnung 1 sein muß. Es bleibt aber mindestens um einen Faktor 2 unsicher. Die Rechnungen wurden deshalb — wie gesagt — durchgeführt für $l/H = 1$ und 2.

Die Ergebnisse der Rechnungen¹ zeigen die Abb. 2—7. Wir haben überall die Ergebnisse für $l = H$ (—) und $l = 2H$ (-----) eingetragen, jedoch wollen wir zunächst nur die Schichtung betrachten, die sich für $l = H$ ergibt. Auf das 2. Modell werden wir anschließend eingehen.

¹ Nachdem so, wie oben ausgeführt, ein Modell gewonnen war, wurde zur Kontrolle nach (4) das $\Delta T(x)$ und damit nach (5) auch das $\bar{v}$ durch Integration berechnet. Es ergab sich gute Übereinstimmung mit den Werten nach Gl. (6), wenn man den Mittelwert von auf- und absteigenden Elementen nimmt. Die ursprünglich von L. BIERMANN benutzten Formeln, die auch wir für eine erste Rechnung verwendet hatten, führen an dieser Stelle zu einer Inkonsistenz. Siehe hierzu S. 140, Anm. 2.

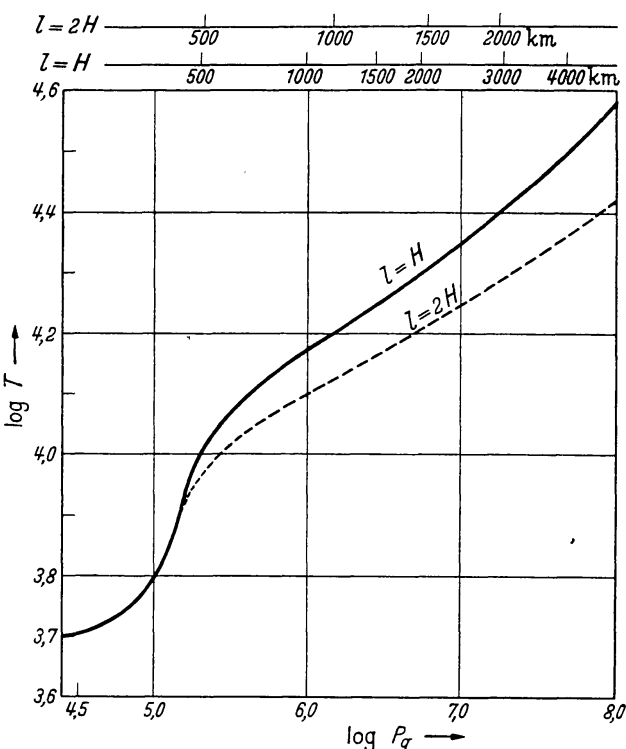


Abb. 2. $\log T$ als Funktion von $\log P_g$ in der Sonnenatmosphäre berechnet unter der Annahme, daß der Mischungsweg der Turbulenzelemente gleich der Äquivalenzhöhe H ist (—) oder daß er doppelt so groß ist (-----). Über der Abbildung die Skala der geometrischen Tiefen in Kilometern für die Schichtung mit $l = H$ (—) bzw. $l = 2H$.

In Abb. 2 ist $\log T$ als Funktion von $\log P_g$ aufgetragen. Dabei wurde bis $\bar{\tau} = 1,694$ entsprechend $\tau_0 = 1,6$ bzw. $\log P_g = 5,095$ das empirisch gewonnene Modell verwendet. Die Rechnung ergab bis dahin

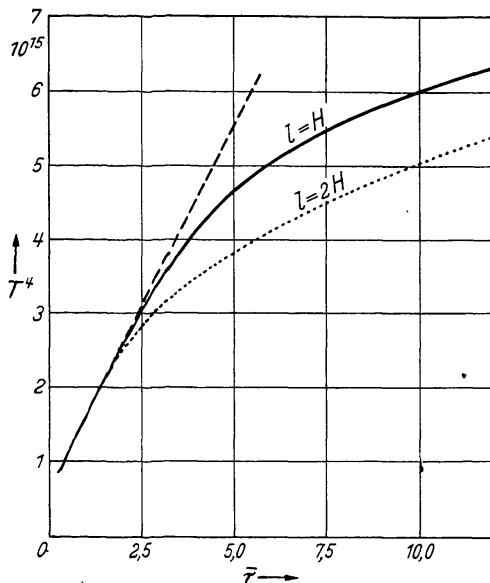


Abb. 3. T^4 als Funktion von $\bar{\tau}$ für das Modell mit Mischungsweg $l = H$ (—) bzw. $l = 2 H$ (.....). Außerdem ist das Strahlungsgleichgewichtsmodell eingezeichnet (— — —).

Abweichungen vom Strahlungsgleichgewichtsgradienten bis etwa 20/100. Da andererseits in diesem Bereich das V_{Str} nach (2 b) noch ziemlich ungenau ist, so schien es geratener, hier einfach das empirische Modell zu verwenden.

Das $T^4(\tau)$ zeigt die Abb. 3. Die gestrichelte Kurve ist die geradlinige Verlängerung von kleinen $\bar{\tau}$ -Werten her, sie dürfte der Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht entsprechen. Man sieht, daß die Abweichungen hiervon erst merklich werden ab $\bar{\tau} = 3$.

Ferner haben wir in Abb. 4 das Modell noch einmal im Entropiediagramm aufgetragen. Der fallende linke Teil der Kurve stellt die Strahlungsgleichgewichtszone dar, das Minimum die obere Grenze der Konvektionszone und der nach rechts ansteigende Teil die Konvektionszone

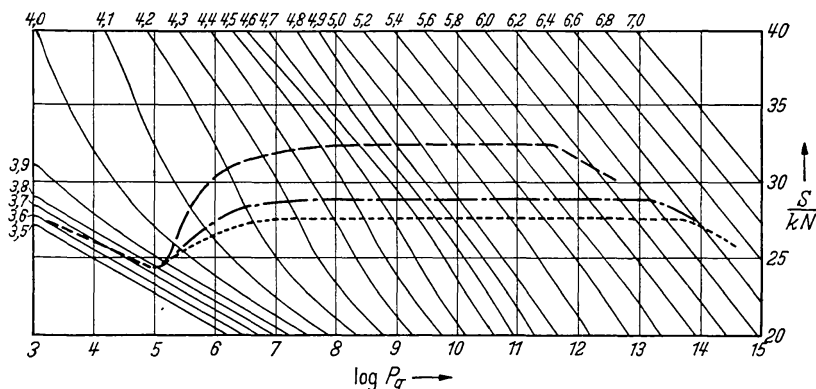


Abb. 4. Die Schichtung der Sonnenatmosphäre im Entropiediagramm. Links Strahlungsgleichgewichtsteil, in der Mitte die Übergangszone, anschließend der adiabatische Teil, ganz rechts Beginn der neuen Strahlungsgleichgewichtszone. — — — Modell mit $l = H$, Modell mit $l = 2 H$, — · — · — Modell mit $l = 2 H$, aber doppelt so großer Abstrahlung der Elemente unterwegs.

selbst. Ab $\log P_g = 8,00$ folgt dann die Schichtung ungefähr einer Adiabaten $S = \text{const.}$ Von hier ab erfolgt praktisch der gesamte Energietransport durch Konvektion; der Strahlungsenergietransport beträgt weniger als 0,1%. Ganz rechts ist noch der Beginn der inneren Strahlungsgleichgewichtszone eingezeichnet.

Den prozentualen Anteil des πF_k am gesamten Energietransport πF als Funktion von $\log P_g$ haben wir in Abb. 5 aufgetragen. Ab $\log P_g$

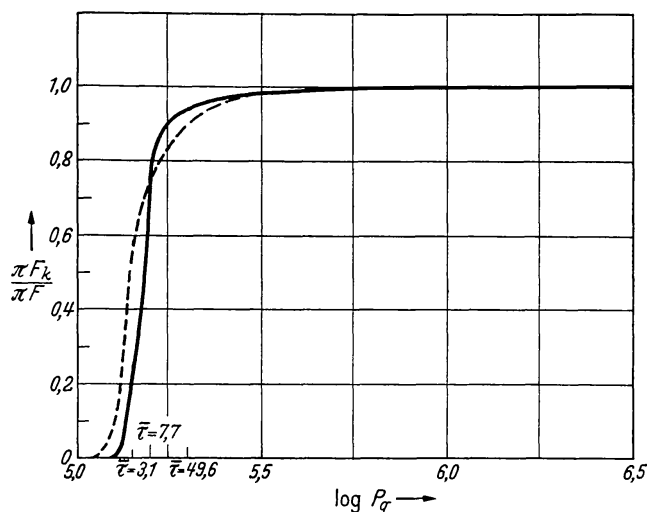


Abb. 5. Der Bruchteil des konvektiven Energietransportes πF_k vom gesamten Energiestrom πF als Funktion von $\log P_g$. — für $l = H$, — — — für $l = 2H$.

= 5,50 bzw. $\bar{\tau} = 450$ wird schon praktisch alle Energie konvektiv transportiert. (Trotzdem wird die Schichtung erst adiabatisch ab etwa $\log P_g$

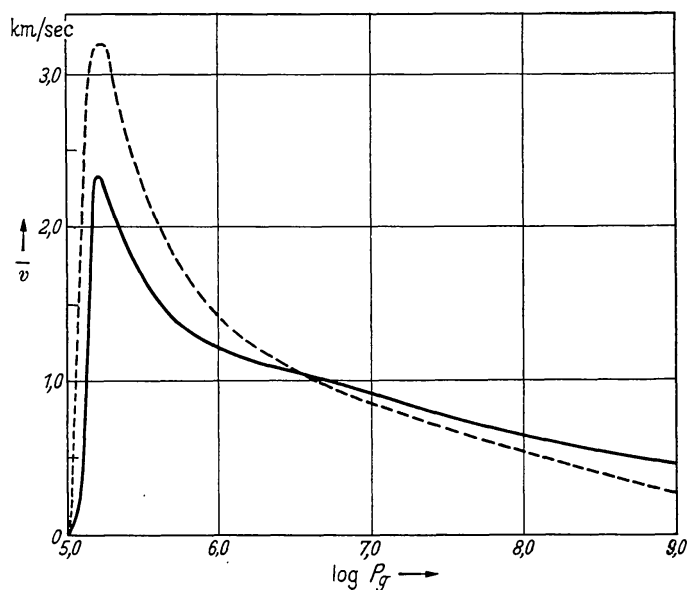


Abb. 6. Die mittlere Aufstiegsgeschwindigkeit der Turbulenzelemente $\bar{v}$ als Funktion von $\log P_g$. — für $l = H$, — — — für $l = 2H$.

= 8,00.) Dagegen wird in den optisch wichtigen Schichten nur ein kleiner Bruchteil, z. B. bei $\bar{\tau} = 3$ nur 22% des Energiestromes durch Konvektion transportiert.

Interessant ist auch der Verlauf des $\bar{v}$ als Funktion von $\log P_g$, den wir in Abb. 6 zeigen. $\bar{v}$ erreicht sein Maximum bereits bei $\log P_g = 5,09$, also einer Tiefe, wo der konvektive Energietransport erst in der Größenordnung 2% ist. $\bar{v}$ erreicht hier einen Wert von 2,4 km pro sec. Nach größeren Tiefen zu nimmt die mittlere Geschwindigkeit dann ab, bis sie an der unteren Grenze der Konvektionszone gleich Null wird.

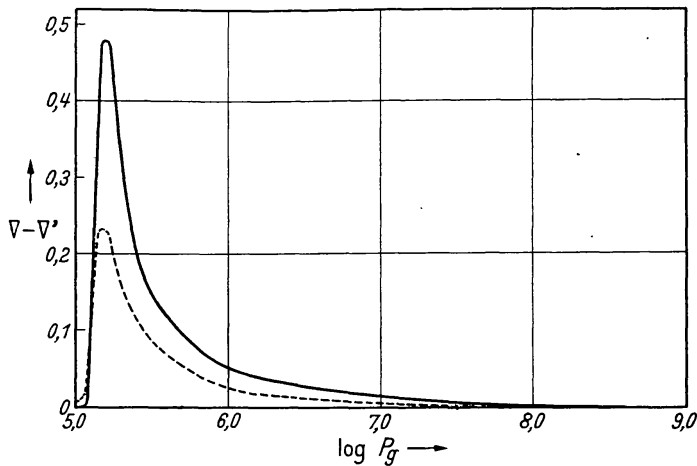


Abb. 7. Differenz zwischen dem logarithmischen Gradienten der Mittelwerte von T und P_g und dem mittleren logarithmischen Gradienten der auf- oder absteigenden Turbulenzelemente, d. h. $\bar{v} - \bar{v}'$ als Funktion von $\log P_g$. — $l = H$, - - - $l = 2H$.

Die Erklärung für dieses Verhalten des $\bar{v}$ finden wir in Abb. 7, in der die Differenz $\bar{v} - \bar{v}'$ als Funktion von $\log P_g$ aufgetragen ist. Wir sehen, daß das Maximum dieser Kurve etwa mit dem Maximum von $\bar{v}$ zusammenfällt. Das $\int (\bar{v} - \bar{v}') d \log P_g$ über eine halbe Äquivalenthöhe, also über $\Delta \log P_g = 0,217$ gibt aber das $\Delta \log T$ an, d. h. den prozentualen Temperaturüberschuß der aufsteigenden Elemente gegenüber der Umgebung. Das $\Delta \log T$ bestimmt wiederum den Auftrieb und damit die Geschwindigkeit der Elemente, so daß es ohne weiteres verständlich ist, daß die Maxima von $\bar{v} - \bar{v}'$ und $\bar{v}$ etwa an derselben Stelle liegen. In größeren Tiefen wird wegen des zunehmenden ρ das πF_k so groß, daß die Abweichungen der Schichtung von einer Adiabaten nicht mehr groß genug sind, um eine hohe Geschwindigkeit zu erzeugen. Daß trotz der hohen Geschwindigkeit der Elemente der konvektive Energietransport bei $\log P_g = 5,1$ noch so klein ist, liegt im wesentlichen an der geringen Dichte und dann an dem kleinen c_p . Der Energieüberschuß eines Turbulenzelementes ist noch relativ klein. Andererseits ist das $\bar{v}$ selbst noch nicht so sehr viel kleiner als $\bar{v}_{Str}$, so daß noch genügend Energie durch Strahlung transportiert wird. Erstaunlich ist, daß in größeren Tiefen die Konvektion trotz sehr geringer Temperaturdifferenzen von nur etwa $10-50^\circ$ den gesamten Energietransport schafft. Das liegt natürlich an den sehr viel größeren Dichten.

2. Die untere Begrenzung der Konvektionszone.

Um die untere Begrenzung der Konvektionszone festzustellen, müssen wir *den* Gasdruck ermitteln, bei dem $\nabla_{Str} = \nabla_{ad}$ wird. In den in Frage kommenden Bereichen ist $\nabla_{ad} = 0,40$, da die Ionisationen von Wasserstoff und Helium abgeschlossen sind. Wir müssen also nur noch das ∇_{Str} ausrechnen, in welches vor allem das $\bar{\kappa}$ eingeht. Die Werte von E. VITENSE [20], die für die bisherigen Rechnungen verwendet wurden, umfassen diese hohen Drucke und Temperaturen nicht mehr. Wir haben daher auf die Arbeit von P. M. MORSE [10] zurückgegriffen. Dort wurden allerdings andere Elementmischungen benutzt als in den Arbeiten von A. UNSÖLD, A. ROSA und E. VITENSE. Da aber die ganzen Konvektionsrechnungen wegen der Unsicherheit des l/H und des γ nicht allzu genau sind, so schien es unnötig, in diesem Zusammenhang allzuviel Mühe auf die Berechnung des $\bar{\kappa}$ zu verwenden. Wir haben deshalb die Formel (16) von MORSE benutzt, in der wir den prozentualen Massenanteil des Wasserstoffs X und des Heliums Y , sowie das über die Massen gemittelte Kernladungsquadrat für die schweren Elemente — bei MORSE mit Γ bezeichnet — auf die von uns benutzte Mischung umgerechnet haben. Die MORSESchen Korrekturfaktoren $\bar{g}/t$ unterscheiden sich für die verschiedenen von ihm verwendeten Mischungen nicht erheblich. Wir haben deshalb die Werte von MORSEs „Mischung I“ benutzt, die der UNSÖLDSchen wohl am nächsten kommt.

Mit diesen $\bar{\kappa}$ -Werten ergab sich, daß $\nabla_{Str} = 0,40$ wird für $\log P_g = 11,44$, entsprechend einer geometrischen Tiefe von 66 200 km, gezählt von $\bar{\tau} = 0,001$ aus. Die Dicke der Konvektionszone beträgt demnach etwa 66 000 km $\approx 1/10$ Sonnenradius, in Übereinstimmung mit L. BIERMANN [3].

Es erhebt sich die Frage, ob man hier bei der Berechnung von ∇_{Str} schon die Änderung von g , der Schwerebeschleunigung der Sonne, mitberücksichtigen muß. Dabei darf man wohl die Änderung der anziehenden Masse zunächst vernachlässigen und nur die Änderung von r berücksichtigen. Es ist zunächst $g = g_0 \cdot R^2/r^2$, wenn g_0 die Schwerebeschleunigung an der Sonnenoberfläche, R den Sonnenradius und r den Abstand der betrachteten Stelle vom Sonnenmittelpunkt bedeuten. Andererseits geht in das ∇_{Str} aber auch der gesamte Energiestrom $\pi F = \sigma T_e^4$ ein. πF ist definiert als der pro sec und cm^2 fließende Energiestrom. Soll nun der gesamte Energiestrom der Sonne von innen nach außen konstant bleiben, so muß πF umgekehrt proportional der durchströmten Kugeloberfläche zunehmen, also $\pi F = \sigma T_e^4 = \pi F_0 \cdot R^2/r^2$. Es wachsen also T_e^4 und g in gleicher Weise, so daß sich im ∇_{Str} die R^2/r^2 -Faktoren herausheben. — Bei der Berechnung der geometrischen Tiefe zu gegebenem T und P_g bleibt der Faktor R^2/r^2 dagegen zu berücksichtigen.

Bemerkenswert ist vielleicht noch, daß an der unteren Begrenzung der Konvektionszone der Übergang von ∇_{ad} zu ∇_{Str} nicht langsam, sondern bei $\log P_g = 11,44$ ganz plötzlich stattfindet. Das liegt zum kleinen Teil an der geringen Abstrahlung wegen der großen optischen Dicke der

Turbulenzelemente, zum wesentlichen Teil aber an der großen Dichte: wenn überhaupt Konvektion vorhanden ist, dann wird gleich sehr viel Energie konvektiv transportiert im Gegensatz zur oberen Grenze der Konvektionszone.

Bei der Untersuchung der unteren Konvektionszonengrenze taucht aber noch ein weiteres Problem auf: Nach dem RAYLEIGHschen Kriterium kann Konvektion erst einsetzen oder nur dann bestehen, wenn $\bar{v}$ einen bestimmten Grenzwert überschreitet, da sonst der Temperaturunterschied der Turbulenzelemente gegenüber der Umgebung zu schnell ausgeglichen wird, so daß der Auftrieb nicht ausreicht, um die Reibung zu überwinden. Ist das nach den obigen Gleichgewichtsbedingungen (6a), (9a) und (10) berechnete $\bar{v}$ zu klein, um die RAYLEIGHsche Bedingung zu erfüllen, so muß die Konvektion aufhören, obgleich $\nabla_{Str} > \nabla > \nabla_{ad}$. Dadurch fällt dann aber der konvektive Energietransport fort; die von unten angelieferte Energie bleibt stecken und die Temperatur steigt. ∇ muß wachsen bis zu einem größeren ∇ , bei dem die Instabilität gegenüber Konvektion groß genug ist, um einem einmal in Gang gesetzten Turbulenzelement eine größere Geschwindigkeit als die Grenzgeschwindigkeit zu geben. Dann startet die Konvektion wieder. Mit dem zu großen ∇ wird aber zu viel Energie transportiert, es muß eine Abkühlung eintreten, ∇ wird kleiner, $\bar{v}$ muß kleiner werden, d. h. die Konvektion bricht plötzlich wieder ab und das Spiel beginnt von neuem. Wenn also das RAYLEIGHsche Kriterium zur Auswirkung kommt, so müssen dadurch Fluktuationen im gesamten Energiestrom auftreten.

Wir wollen im folgenden versuchen, die Größenordnung dieser Fluktuationen abzuschätzen.

Die Mindestgröße von $\bar{v}$ ist bestimmt durch die RAYLEIGHsche Zahl

$$A = C \cdot \frac{\bar{v} \cdot l}{\nu}$$

dabei ist C eine reine Zahl von der Größenordnung 100, l eine für das Problem charakteristische Länge, die wir hier mit der Äquivalenthöhe gleichsetzen und ν die kinematische Viskosität, die bei Gasen gleich $1/3 \cdot \lambda \cdot v_k$ ist, wobei v_k die mittlere thermische Geschwindigkeit: $v_k^2 = \frac{8RT}{\pi \mu}$, und λ die mittlere freie Weglänge der an der Wärmeleitung beteiligten Teilchen ist. (Unter unseren Bedingungen dürften das im wesentlichen die Elektronen sein.)

Die RAYLEIGHsche Zahl A muß einen bestimmten Grenzwert A_0 überschreiten, damit Konvektion einsetzen kann. Im allgemeinen ist A_0 von der Größenordnung 1000 [8]. (In den Sternatmosphären kann der Wert vielleicht etwas größer sein, da hier der Temperatúrausgleich nicht nur durch Wärmeleitung, sondern im wesentlichen durch Strahlung erfolgt.) Die Geschwindigkeit, bei der A gerade gleich A_0 ist, wollen wir mit v_0 bezeichnen. Dann kann also Konvektion erst einsetzen, wenn

$$\bar{v} > v_0 = \frac{A_0}{C} \cdot \frac{\nu}{l} \approx 10 \cdot \frac{\nu}{l} = \frac{10}{3} \cdot \frac{\lambda}{H} \cdot v_k$$

ist.

v_k ist in der Nähe der Konvektionszonengrenze von der Größenordnung 10^7 cm/sec. H ergibt sich zu etwa $2 \cdot 10^9$ cm. Zu bestimmen bleibt das λ , die freie Weglänge der Elektronen. Sie wurde von GVOSDOVER berechnet [6] und von H. MAECKER u. T. PETERS [9] experimentell bestimmt und ist danach etwa

$$\lambda = \frac{1}{Z^2 \cdot Q_+ \cdot N_+},$$

wobei

$$Q_r = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^4}{(kT)^2} \cdot \ln \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{kT}{e^2 \cdot N_+^{1/3}} \right)$$

dem Wirkungsquerschnitt eines einfach geladenen Teilchens gegenüber den freien Elektronen entspricht. (e = Elementarladung, N_+ = Anzahl der positiven Ionen pro cm^3 und $\bar{Z}^2$ = deren mittleres Ladungsquadrat.)

Für die untere Grenze der Konvektionszone ergab sich so $\lambda \sim 10^{-5}$ cm und damit $v_0 = 10^{-14}$ $v_k = 10^{-7}$ cm/sec. Dieses winzig kleine $\bar{v}$ gehört zu einem $V_{Str} - V_{ad} \approx 10^{-34}$. Da in der Nähe der Konvektionszonengrenze $\gamma_0 \approx 1$ ist, so wird $\gamma \approx 10^{-7}$.

Für kleine γ ist $V_{Str} - V = a \gamma^2 (V_{Str} - V_{ad}) \sim 10^{-48}$. Da nun $\frac{\pi F - \pi F_{Str}}{\pi F} = \frac{\pi F_k}{\pi F} = \frac{V_{Str} - V}{V_{Str}}$ ist, so ist auch $\frac{\pi F_k}{\pi F} = 10^{-48}$. Das ist also der Anteil der konvektiv transportierten Energie an der Stelle, wo die Konvektion infolge des RAYLEIGH-Kriteriums absterben sollte. Von dieser Größenordnung dürften auch die Energiestromschwankungen sein, sie sind also praktisch bedeutungslos. Im übrigen ist das in Frage kommende Gebiet auch schon geometrisch so klein, daß die von oben herunterfallenden Turbulenzelemente wahrscheinlich in dem ganzen Bereich genügend große Geschwindigkeiten erzeugen, um die Konvektion im Gang zu halten. Ob in irgendwelchen anderen Sternatmosphären Bedingungen gegeben sind, die diesen Effekt merklich werden lassen, möge dahingestellt bleiben.

3. Die obere Begrenzung der Konvektionszone.

Bei der Anwendung der in Abschnitt 1 beschriebenen Rechenmethode tun wir in jedem einzelnen Punkt unseres Modelles so, als ob auch in seiner Umgebung die benötigten Größen wie $\bar{x}$, c_p , V_{Str} , V_{ad} usw. so wären, wie an dem betrachteten Punkt. Das erscheint berechtigt, solange die Größen etwa einen Mittelwert über $\pm l/2$ darstellen, und im Mittel gleich viele Turbulenzelemente von oben und von unten kommen. Ganz in der Nähe der oberen Konvektionszonengrenze stimmt das aber sicher nicht mehr. Oberhalb ist $V_{Str} < V_{ad}$, unterhalb dagegen $V_{Str} > V_{ad}$. Es können deshalb von oben gar keine Turbulenzelemente heruntersommen. Wäre in der ganzen Schicht $V_{Str} = V_{ad}$ wie an der Grenze, so müßte $\bar{v} = 0$ sein, wie wir es mit obiger Methode ausgerechnet haben. Tatsächlich ist natürlich $\bar{v}$ viel größer, da ja *alle* Elemente aus größerer Tiefe kommen und eine bestimmte Geschwindigkeit mitbringen. Ganz grob dürfen wir wohl annehmen, daß das $\bar{v}$ wieder durch die Geschwindigkeit *der* Elemente bestimmt wird, die gerade $l/2$ zurückgelegt haben. Wie wir unten sehen werden, haben diese eine Geschwindigkeit von etwa 2 km/sec. Für $\log P_g = 5,1$ erhalten wir nun z. B. nach Abb. 6 ein $\bar{v}$ von etwa 0,4 km/sec, während wir, wie gesagt, tatsächlich mit $\bar{v} = 2$ km/sec rechnen müßten. Das $\bar{v}$ kommt also mit unserer obigen Rechenmethode an dieser Stelle um einen Faktor 5 kleiner heraus als die durch Integration für ein einzelnes Element gewonnene mittlere Geschwindigkeit, dadurch wird auch das mit dem ursprünglichen $\bar{v}$ berechnete γ um etwa einen Faktor 5 zu klein. Mit dem richtigen $\bar{v}$ von

2 km/sec würde πF_k etwa 10mal größer werden, aber immer noch sehr klein bleiben. Im ganzen kann man also sagen, daß ganz in der Nähe der oberen Konvektionszonengrenze die Schichtung sich der Adiabaten stärker annähert, als wir oben angegeben hatten. Das dürfte aber kaum viel ausmachen, da sich hier $\bar{V}$ und $\bar{V}_{ad}$ ohnehin nur wenig unterscheiden wegen des geringen Unterschiedes von $\bar{V}_{Str}$ und $\bar{V}_{ad}$. Außerdem sind hier die Geschwindigkeiten, wie sie in der Abb. 6 angegeben sind, nicht mehr zuverlässig. Diese Überlegungen sind wichtig für die Deutung der Beobachtungen an der Granulation, der wir uns nunmehr zuwenden.

4. Die Granulationselemente.

Von der Turbulenz können wir direkt nur die Granulationselemente beobachten. Da sie noch bis sehr weit an den Sonnenrand heran verfolgt werden können, so müssen sie mindestens bis $\bar{\tau} = 0,3$ heraufkommen. RICHARDSON und SCHWARZSCHILD [14] beobachten Geschwindigkeiten von 0,37 km/sec für die Turbulenzelemente, die man photographisch noch auflösen kann und deren Durchmesser ein Vielfaches der Äquivalenthöhe ist. Sie schließen daraus, unter Zuhilfenahme der Statistik, daß die

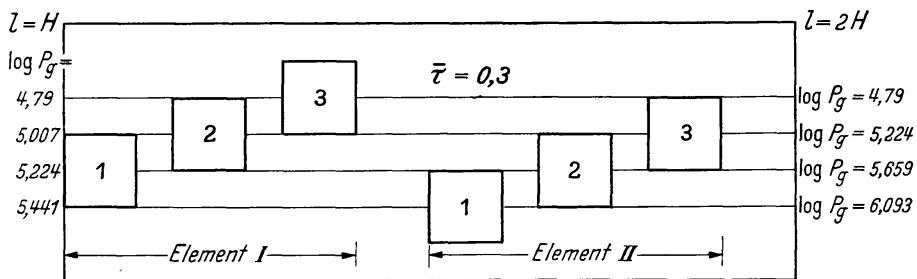


Abb. 8. Zeigt schematisch den Weg und die jeweilige Lage der Turbulenzelemente I und II. Für $l = H$ Skala links, für $l = 2H$ Skala rechts. Die Elemente starten in der Lage 1, haben in der Lage 2 den halben Weg zurückgelegt und lösen sich in der Lage 3 auf, nachdem sie einen Mischungsweg zurückgelegt haben.

schnellsten Turbulenzelemente, die etwa von der Größe einer Äquivalenthöhe sind, Geschwindigkeiten von $\sim 2,5$ km/sec haben. THIESSEN [16] beobachtet weiter an den teleskopisch noch auflösbaren Granulationselementen Temperaturdifferenzen gegenüber der Umgebung von $300-400^\circ$. Für die Lebensdauer dieser Granulationselemente, die also etwa einen Durchmesser von 4–5 Äquivalenthöhen haben, ergaben die Beobachtungen 3–4 Min. Um zu sehen, wie weit unsere Rechnungen über die Konvektionszone mit diesen Beobachtungen verträglich sind, haben wir den Weg zweier Turbulenzelemente rechnerisch verfolgt, und zwar eines, das gerade eine Äquivalenthöhe zurückgelegt hat, wenn sein Mittelpunkt sich bei $\bar{\tau} = 0,3$ befindet (Element I) (vgl. Abb. 8, Lage 3), und eines, das gerade eine Äquivalenthöhe zurückgelegt hat, wenn sein „oberer Rand“ bei $\bar{\tau} = 0,3$ angekommen ist (Element II) (vgl. Abb. 8, Lage 3). Das Element I ist gerade mit seinem „oberen Rand“ bei $\bar{\tau} = 0,3$,

wenn es seinen halben Weg zurückgelegt hat (Abb. 8, Lage 2). Es dürfte deshalb etwa einem mittleren Granulationselement entsprechen, während das Element II fast aus der größtmöglichen Tiefe kommt. Nur in der Sonnenmitte werden wir noch einige wenige Elemente sehen können, die aus noch größeren Tiefen aufgestiegen sind.

Berechnung des Temperaturüberschusses. Wir wollen die mittlere Temperatur¹ dieser einzelnen von uns verfolgten Elemente mit T'' bezeichnen im Gegensatz zum T' , das einen Mittelwert für sämtliche durch eine Schicht laufenden Elemente darstellte. Dann wollen wir das $\frac{d \log T''}{d \log P_g}$ für ein einzelnes Element mit ∇'' bezeichnen. Dieses müssen wir zunächst ausrechnen. Wenn keine Abstrahlung stattfinden würde, müßte das Element mit $\nabla'' = \nabla_{ad}$ aufsteigen. Tatsächlich ist aber in den höheren Schichten die Abstrahlung durchaus wesentlich, so daß ein aufsteigendes Element mit einem steileren Gradienten als dem adiabatischen aufsteigt. Es ist demnach $\nabla'' = \nabla_{ad} + \alpha$, wobei α eine sogleich zu bestimmende Größe ist. (Die Temperatur nimmt rascher ab als beim adiabatischen Aufstieg.) Nun ist weiter

$$\frac{d \ln T''}{dx} = \nabla'' \cdot \frac{d \ln P_g}{dx} = \nabla_{ad} \cdot \frac{d \ln P_g}{dx} + \alpha \cdot \frac{d \ln P_g}{dx}.$$

Der zweite Teil ist der durch die Abstrahlung bedingte, wir wollen ihn mit $\Delta \frac{d \ln T''}{dx}$ bezeichnen.

Andererseits ist der Energieinhalt eines Turbulenzelementes $E = c_p \rho T'' \times \text{Volumen}$ und die Abstrahlung pro sec $= 4 \sigma T''^3 \cdot \Delta T [\bar{\kappa} \cdot l] \times \text{Oberfläche} = \frac{dE}{dt} \cdot c_p \cdot \rho \cdot \Delta \frac{dT''}{dt} \cdot \text{Volumen}$. Dabei haben wir $\Delta \frac{dT''}{dt}$ geschrieben, um zu kennzeichnen, daß es sich um die zusätzliche Temperaturänderung durch die Abstrahlung handelt neben der gleichzeitig stattfindenden adiabatischen. Aus dieser Gleichung erhalten wir $\Delta \frac{dT''}{dt} = \frac{\Delta T}{\gamma_0 \cdot l}$, mit γ_0 wie in (8a). Per definitionem war $\Delta \frac{dT''}{dx} = \alpha \cdot \frac{d \ln P_g}{dx}$. Andererseits ist aber auch $\Delta \frac{dT''}{dx} = \frac{1}{T''} \cdot \Delta \frac{dT''}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ und damit gleich $\frac{\Delta T}{T''} \cdot \frac{1}{\gamma \cdot l} = \alpha \cdot \frac{d \ln P_g}{dx}$. Daraus bestimmt sich α zu $\alpha = \frac{\Delta T}{T''} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{H}{l}$ und also² $\nabla'' = \nabla_{ad} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\Delta T}{T''} \cdot \frac{H}{l}$, wobei wir jetzt $\frac{H}{l} = 1$ setzen müssen. Das γ und ΔT müssen wir nach Gleichung (8a) und (4) — mit v anstelle von $\bar{v}$ — mit den Zustandsgrößen im Element berechnen, desgleichen das ∇_{ad} .

Damit haben wir nun für die Zustandsgrößen eines einzelnen Elementes ganz die entsprechenden Formeln wie für die Mittelwerte bei

¹ Die wir näherungsweise dem Mittelpunkt des Elementes zuordnen.

² Analog zu Formel (8). ΔT ist proportional zu $\nabla' - \nabla$.

der Berechnung des Modelles. Wir können deshalb jetzt für ein einzelnes Turbulenzelement die Temperaturdifferenz gegenüber seiner Umgebung und seine Geschwindigkeit als Funktion des Abstandes von der Ausgangslage und des Ausgangsniveaus selbst ganz analog unseren früheren Rechnungen für die Mittelwerte durch schrittweise Integration erhalten. Im einzelnen haben wir die Wege der beiden oben beschriebenen Elemente I und II von ihrem Startpunkt 1 bis zu ihrer Auflösung im Punkt 3 verfolgt (siehe Abb. 8).

Dem $\bar{\tau} = 0,3$ entspricht ein $\log P_g = 4,79$. Das Element I soll dort einen Weg von einer Äquivalenzhöhe zurückgelegt haben, muß also eine Äquivalenzhöhe tiefer starten, d. h. bei $\log P_g = 4,79 + \log e = 5,224$. Das Element II startet noch eine halbe Äquivalenzhöhe tiefer, nämlich bei $\log P_g = 5,441$, löst sich aber schon bei $\log P_g = 5,007$ auf, wo das Element I erst seinen halben Weg zurückgelegt hat (vgl. Abb. 8).

Die Ergebnisse unsrer Rechnungen zeigt die Abb. 9. Dort sind auch die Ergebnisse für $l = 2H$ eingezeichnet, auf die wir aber erst später eingehen werden. — In der Abb. 9 sind sowohl das T des oben berechneten Modelles (—) als auch die T'' der betrachteten Granulationselemente I und II als Funktion von $\log P_g$ aufgetragen, d. h., praktisch

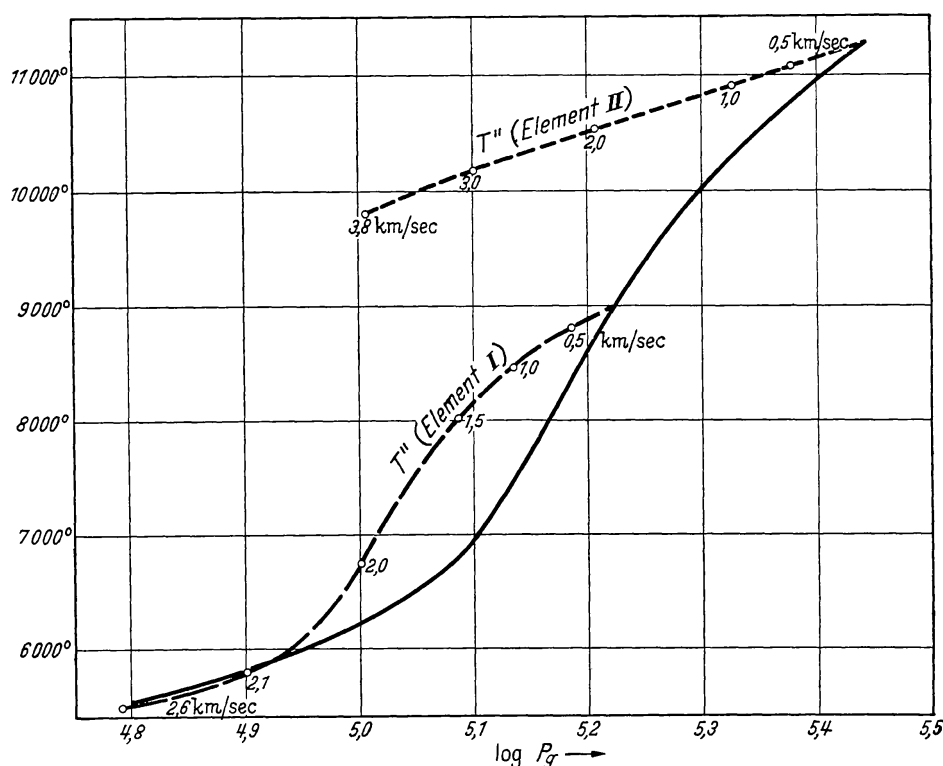


Abb. 9. In Abhängigkeit von $\log P_g$ ist eingezeichnet zunächst die Temperatur T für das Modell mit $l = H$; außerdem die mittlere Temperatur T'' des Granulationselementes I (— — —) von seinem Startpunkt $\log P_g = 5,224$ ab zu seinem Auflösungspunkt $\log P_g = 4,79$ sowie T'' für das Element II (— — —) von seinem Startpunkt $\log P_g = 5,441$ bis zu seinem Auflösungspunkt $\log P_g = 5,007$. Die Werte der Aufstiegsgeschwindigkeit v sind an die entsprechenden Punkte der T'' -Kurven angeschrieben. (Links unten lies 2.06 statt 2.6 km/sec).

gesprochen, als Funktion der geometrischen Tiefe nur in einem etwas verzerrten Maßstab. Man sieht, daß für das Element I von seinem Startpunkt $\log P_g = 5,224$ ab, wo definitionsgemäß $T'' = T$ ist, bis $\log P_g = 4,92$ stets $T'' > T$ ist. Erst ganz oben in der Strahlungsgleichgewichtszone, wo ja $\nabla_{ad} > \nabla_{str}$ ist, und sich das aufsteigende Element deshalb relativ zur Umgebung abkühlt, wird T'' etwas kleiner als T . Die negativen Temperaturdifferenzen werden aber nie größer als 50° , da die Strahlung für einen raschen Temperatúrausgleich sorgt. In größeren Tiefen jedoch treten erstaunlich hohe Temperatur-Differenzen auf, bis zu 1200° bei $\log P_g = 5,1$ (etwa entsprechend $\bar{\tau} = 2$ für die Mittelwerte) bei einer mittleren Temperatur von etwa 6800° . Noch größere Temperaturdifferenzen erhalten wir für das Element II, dessen Startpunkt tiefer liegt als beim Element I. Hier erhalten wir Temperaturdifferenzen bis zu 3500° bei einer mittleren Temperatur von 6300° . Wenn wir bedenken, daß es auch noch negative Temperaturdifferenzen gibt für die absteigenden Elemente, so kommen wir hier bei diesem Extremfall zu Temperaturdifferenzen, die schon von der Größe der Temperatur selbst sind. Wenn wir auch in Betracht ziehen müssen, daß unsere Rechnungen direkt an der Konvektionszonengrenze nicht mehr ganz zuverlässig sind, so dürfte nach den obigen Bemerkungen eine genauere Rechnung doch eher zu noch größeren ΔT führen als zu kleineren. Allerdings müssen wir bedenken, daß wir in unseren Rechnungen die Turbulenzreibung ganz vernachlässigt haben. Es scheint uns jedoch, daß sich durch ihre Berücksichtigung die Größenordnung der Temperaturdifferenzen nicht ändern wird, so daß wir demnach in der Sonnenatmosphäre mit maximalen Temperaturdifferenzen von etwa 3000° rechnen müssen.

Für das Element I erreicht man die maximale Temperaturdifferenz gegenüber der Umgebung kurz vor der Zonengrenze. Daran schließt sich ein steiler Abfall an, da in dieser Gegend die optische Dicke bereits merklich kleiner geworden ist, und deshalb der relative Energieverlust ziemlich groß wird¹. Demgegenüber ist der „Temperaturgewinn“ relativ klein, da sich ∇_{ad} und ∇ nur noch wenig unterscheiden. Wie wir oben bereits erwähnten, erhalten wir oberhalb der Zonengrenze dann sogar negative Temperaturdifferenzen, da sich hier ein adiabatisch aufsteigendes Element relativ zur Umgebung abkühlt. Die Zustrahlung von außen verhindert aber große negative Temperaturdifferenzen. Qualitativ sind die Verhältnisse beim Element II ganz ähnlich. Hier hat sich jedoch das Element bereits aufgelöst, ehe der Temperaturabfall einsetzen kann.

¹ Wir haben den Durchmesser der Turbulenzelemente stets gleich l gesetzt; er nimmt also dementsprechend nach oben hin ab. Ob es richtiger gewesen wäre, mit einem konstanten Durchmesser zu rechnen, mag dahingestellt bleiben; im Rahmen dieser relativ groben Betrachtungen schien es uns belanglos.

Die berechneten hohen Temperaturdifferenzen scheinen zunächst nicht mit den von THIESSEN beobachteten $300\text{--}400^\circ$ übereinzustimmen. Bei diesem Vergleich muß man jedoch bedenken, daß es für die Beurteilung der Beobachtungen darauf ankommt, den Verlauf der Temperatur als Funktion der *optischen* Tiefe einerseits im Element und andererseits in der Umgebung zu kennen, denn bei der Beobachtung vergleichen wir gleiche *optische* Tiefen miteinander. Wir müssen demnach versuchen, den Verlauf der Temperatur in einem Element zu einem gegebenen Zeitpunkt als Funktion der optischen Tiefe zu berechnen. Den Mittelwert der Temperatur in dem Element hatten wir mit T'' bezeichnet, die Temperatur in den einzelnen Punkten im Element wollen wir im Gegensatz dazu mit T''' bezeichnen¹. — Haben wir bisher die Ausdehnung des Elementes als infinitesimal klein betrachtet im Hinblick auf die viel größere Ausdehnung der Konvektionszone, so kommt es uns jetzt auf die Ausdehnung des Elementes an. — Die zu T''' gehörende optische Tiefe wollen wir mit $\bar{\tau}'''$ bezeichnen². Wir berechnen dann zunächst das $T'''(\log P_g)$ und dazu das $\bar{\tau}'''(\log P_g)$. Durch Kombination erhalten wir das $T'''(\bar{\tau}''')$. Wir betrachten also nun ein gegebenes Element zu einem bestimmten Zeitpunkt, zu dem es sich an einem bestimmten Punkt, gekennzeichnet durch das zugehörige $\log P_g$, das wir dem Mittelpunkt des Elementes zuordnen, befindet. Dann kennen wir aus unseren obigen Rechnungen das zugehörige T'' , das wir auch näherungsweise dem Mittelpunkt des Elementes zuordnen. Um nun die Temperaturschichtung innerhalb des Elementes zu berechnen, machen wir die Annahme, daß innerhalb des Granulationselementes Strahlungsgleichgewicht herrsche. Das ist sicher eine sehr grobe Näherung, die aber für die sichtbaren Granulationselemente, die ja schon in der Nähe der Oberfläche sind, doch einigermaßen brauchbar sein sollte. Wir setzen also vom Mittelpunkt des Granulationselementes, zu dem die oben berechneten $\log P_g$ und T'' gehören mögen, nach oben um $l/2$ mit Strahlungsgleichgewicht fort. Das $\left(\frac{d \log T}{d \log P_g}\right)_{Str}$ berechnen wir aus unserem empirischen Modell³.

¹ Dann wird demnach $\overline{T'''}$, gemittelt über das Element gleich T'' . $\overline{T''}$, gemittelt über alle aufsteigenden oder absteigenden Elemente einer bestimmten Schicht gleich T' , und der Mittelwert von T' für auf- und absteigende und ruhende Materie gibt das T unseres Modelles. (Genau genommen hätten wir T''' gemittelt über eine bestimmte Schicht gleich dem T zu setzen. Aber bei diesen Rechnungen haben wir im Grunde das Element als infinitesimal klein betrachtet.

² $\bar{\tau}'$ und $\bar{\tau}''$ gibt es nicht.

³ Da nach (2b) in großen Tiefen das $\nabla_{Str} \sim \frac{\bar{\kappa} \cdot P_g}{T^4}$ geht, so rechnen wir das „empirische“ $\nabla_{Str}(\kappa_0 P_{g0}, T_0)$ um auf $\nabla_{Str}(\kappa P_g T)$ indem wir mit $\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_0} \cdot \frac{P_g}{P_{g0}} \cdot \frac{T_0^4}{T^4}$ multiplizieren. Da wir das $\bar{\tau}'''$ zunächst nicht kennen, ist etwas anderes kaum möglich.

Wir betrachten als erstes das Element I zu dem Zeitpunkt, an dem es gerade den halben Weg zurückgelegt hat, also mit seinem Schwerpunkt bei $\log P_g = 5,007$ ist (Abb. 8, Lage 2). Nach Abb. 9 hat es dort eine mittlere Temperaturdifferenz von 580° gegenüber seiner Umgebung. Die sich ergebenden Verhältnisse sind in Abb. 10 dargestellt. Sie zeigt

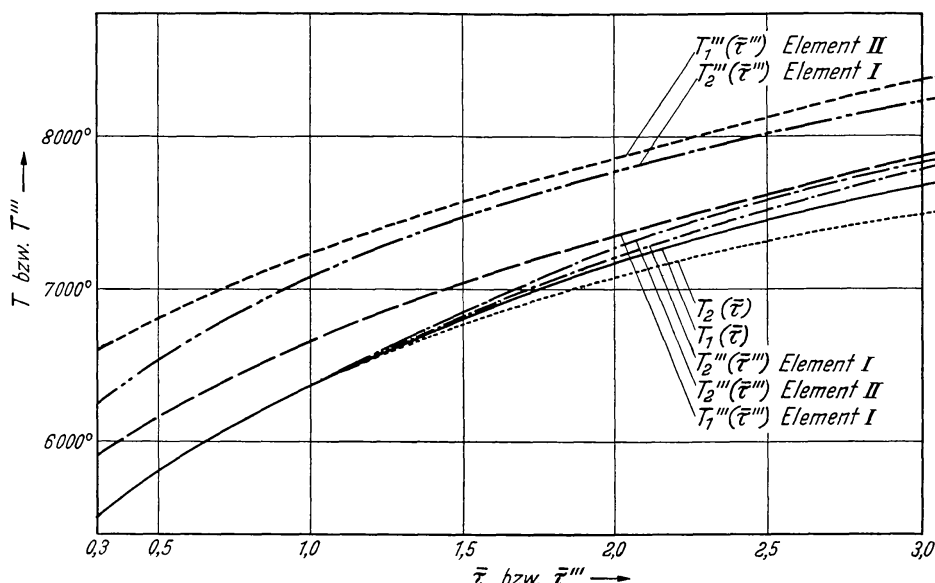


Abb. 10. Aufgetragen ist die Temperaturschichtung $T_1(\bar{\tau})$ für das Modell mit $l = H$ (Index 1) (—), außerdem die Temperaturschichtungen $T_1'''(\bar{\tau}''')$ in den Granulationselementen I und II zu den Zeitpunkten, in denen sie mit ihrem „oberen Rand“ gerade bei $\bar{\tau} = 0,3$ sind. Das Entsprechende ist auch für das Modell mit $l = 2H$ eingezeichnet, gekennzeichnet durch den Index 2. Für das Element I sind hier die Temperaturschichtungen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten eingezeichnet, einmal wenn sein „oberer Rand“ bei $\bar{\tau} = 0,3$ entsprechend $\log P_g = 4,79$ liegt (— · — · —) und sodann, wenn sein oberer Rand bei $\log P_g = 4,566$ liegt (— · — · — · —).

einerseits das $T(\bar{\tau})$ (—) und andererseits das $T'''(\bar{\tau}''')$ für das Element I zum Zeitpunkt 2 (— · — · —). Wir sehen, daß wir in $\bar{\tau}''' = \bar{\tau} = 2/3$, d. h. in gleicher optischer Tiefe, nur noch eine Temperaturdifferenz von 310° haben. Wir würden also von außen eine Temperaturdifferenz von 310° beobachten. Das dürfte nach dem oben Gesagten etwa eine mittlere Temperaturdifferenz zwischen einem Granulationselement und seiner Umgebung sein. Daß wir statt der „wirklichen“ Differenz von 580° nur eine von 310° beobachten, liegt natürlich daran, daß das $\bar{\tau}$ mit T wächst. Deshalb gehört in dem Element zum gleichen P_g ein größeres $\bar{\tau}$ als in der Umgebung des Elementes. Die höhere Temperatur rückt dadurch scheinbar nach innen.

Noch viel krasser liegen die Verhältnisse beim Element II, das wir zum Zeitpunkt 3 untersuchen, also in derselben Höhe, wo wir das Element I untersucht haben (s. Abb. 8). Wir haben das $T'''(\bar{\tau}''')$ für dieses Element ebenfalls in die Abb. 10 eingezeichnet. Nach Abb. 9 hat es bei gleichem Druck eine mittlere Temperaturdifferenz von 3510° gegenüber seiner Umgebung. Nach Abb. 10 hat es, wenn man es bei gleichem

$\bar{\tau} = 2/3$ mit der Umgebung vergleicht, nur noch eine Differenz von 940° gegenüber der Umgebung. Das aber scheint mit den Beobachtungen durchaus verträglich zu sein; denn man muß ja bedenken, daß die beobachteten Granulationselemente etwa einen fünfmal so großen Durchmesser haben wie die hier untersuchten. Die beobachteten Elemente stellen also schon Mittelwerte dar über eine ganze Reihe unserer Elemente samt ihrer Umgebung. Wenn nun im Mittel über ein solches Gebiet Temperaturschwankungen von $300\text{--}400^\circ$ beobachtet werden, so ist es durchaus vernünftig anzunehmen, daß einzelne der beobachtungsmäßig nicht mehr auflösbaren Einzelemente Temperaturdifferenzen bis zu 1000° haben. Wir sehen also, daß die beobachteten Helligkeitsschwankungen durchaus nicht im Widerspruch stehen zu den hier rechnerisch gefundenen Temperaturschwankungen, die in gleicher *geometrischer* Tiefe bis zu 3500° gehen können.

Wie steht es nun mit der Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Geschwindigkeiten? Wir haben die errechneten Geschwindigkeiten in die Abb. 9 mit eingezeichnet. Bei einem Start in $\log P_g = 5,224$ erhalten wir oben eine Geschwindigkeit von etwa 2 km/sec, bei einem Start in $\log P_g = 5,441$ erhalten wir $v = 3,8$ km/sec. Das ist in guter Übereinstimmung mit den oben erwähnten empirischen Ergebnissen von R. S. RICHARDSON und M. SCHWARZSCHILD, die für Elemente von der Größe einer Äquivalenthöhe (100—200 km) auch auf Geschwindigkeiten von durchschnittlich etwa 2,5 km/sec kommen.

Für die Lebensdauer eines Elementes darf man wohl etwa die Aufstiegszeit eines Elementes einsetzen. Man findet dann $t = \int_{\Delta T = 100^\circ} 1/v \, dx = 2$ Min für das Element I¹. Die Beobachtungen ergaben etwa 3—4 Min. Dabei muß man aber wiederum bedenken, daß es sich bei den Beobachtungen um Aggregate der hier behandelten Elemente handelt, die deshalb im allgemeinen eine etwas längere Existenz haben werden als ein mittleres Einzelement.

Es scheint demnach, daß unsere Rechnungen mit $l = H$ auf eine so gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen führen, wie man es nur erwarten kann.

Um jedoch den Bereich der Unsicherheit der Theorie einigermaßen übersehen zu können, haben wir die ganzen Rechnungen auch noch für $l = 2 H$ durchgeführt.

5. Berechnung der Temperaturschichtung der Sonne unter der Annahme, daß der Mischungsweg gleich der doppelten Äquivalenthöhe ist.

Bei der Berechnung der Temperaturschichtung mit $l = 2 H$ müssen wir nun unsere Ausgangsformeln entsprechend ändern. Aus (8a) sehen wir,

¹ Wir nehmen an, daß das Element etwa sichtbar wird, wenn es einen durchschnittlichen Temperaturüberschuß von 100° hat.

daß unser $\gamma_0 \sim l/H$ wächst, also doppelt so groß wird. Der Energieverlust wird kleiner. (Geringere Abstrahlung wegen größerer optischer Dicke.) Aus der Ableitung von (10) sehen wir, daß β sich in derselben Weise ändert und deshalb die Beziehung $\beta = 3/2 \gamma$ erhalten bleibt. Damit bleibt auch (9a) erhalten. Nach (6a) geht $\bar{v}^2 \sim \left(\frac{l}{H}\right)^2 \cdot \pi F_k$ ist proportional $\bar{v} \cdot \frac{l}{H}$. Die Reihenentwicklungen für $\bar{v}$ ergeben, daß für kleine γ das $\bar{v} \sim \left(\frac{l}{H}\right)^2 \cdot \gamma_0$ wird, während für große γ das $\bar{v}^3 \sim \left(\frac{l}{H}\right)^2 \cdot \frac{1}{\gamma_0}$ wird. Das heißt für kleine γ wird das $\pi F_k \sim \bar{v} \cdot \frac{l}{H}$ oder $\sim \left(\frac{l}{H}\right)^4$ und für große γ das $\pi F_k \sim \left(\frac{l}{H}\right)^{\frac{4}{3}}$, abgesehen von der Änderung des $\nabla - \nabla'$. Bei kleinen γ (in den höheren Schichten) wächst also πF_k mit $\frac{l}{H}$ viel stärker an als bei großen γ (in etwas tieferen Schichten). Größeres πF_k bedeutet aber größere Annäherung an die adiabatische Schichtung. Wir werden also bei dem Modell mit $l = 2H$ eine größere Abweichung von der Strahlungsgleichgewichtsschichtung erwarten als bei dem Modell mit $l = H$. Das sehen wir in der Abb. 2, wo wir das $T(P_g)$ für $l = 2H$ mit eingezeichnet haben (-----). (Allgemein ist das Modell mit $l = 2H$ in den Zeichnungen durch punktierte oder gestrichelte Linien gekennzeichnet.) Dasselbe sehen wir auch in Abb. 3, wo bei der Schichtung mit $l = 2H$ die Abweichungen vom Strahlungsgleichgewicht schon bei $\tau = 2$ merklich werden. Noch klarer sieht man die stärkere Annäherung an die Adiabate in der Abb. 4, wo wir den gesamten Verlauf der Schichtung übersehen können. Der Übergangsteil der Kurve verläuft hier viel flacher und die schließlich erreichte Adiabate liegt viel tiefer als bei $l = H$. Das hat zur Folge, daß erst bei sehr viel höheren $\log P_g$ das $\nabla_{Str} = \nabla_{ad}$ wird. Deshalb ergibt sich in diesem Fall die Dicke der Konvektionszone viel größer als im Falle $l = H$, nämlich gleich 165000 km.

Den Verlauf des πF_k selbst, das ja diese Veränderungen hervorruft, sehen wir in der Abb. 5. Wir können natürlich nicht erwarten, genau die oben angeführte Proportionalität wiederzufinden, da sich ja durch die Änderung des πF_k auch das $\nabla - \nabla'$ ändert. Wie es sich ändert, sehen wir an der Abb. 7. Bei $\log P_g = 5,2$ ist das $\nabla - \nabla'$ für $l = 2H$ so viel kleiner als dasjenige für $l = H$, daß das πF_k für $l = 2H$ bei größeren Gasdrucken sogar kleiner wird als für $l = H$. Die Änderungen der Zustandsgrößen gegenüber der Schichtung mit $l = H$ machen sich hier auch schon bemerkbar.

In der Abb. 6 haben wir auch den Verlauf von $\bar{v}$ für $l = 2H$ noch wiedergegeben. Hier, wo das $\nabla - \nabla'$ nicht eingeht, sehen wir das Anwachsen mit l/H sehr deutlich. Lediglich durch die Änderung der Zustandsgrößen wird die oben angeführte Proportionalität mit $(l/H)^3$ bzw. mit (l/H)

etwas gestört. Wir kommen demnach bei unserem jetzigen Modell zu wesentlich höheren Geschwindigkeiten als bei dem ersten.

6. Die Granulationselemente in der Schichtung mit $l = 2H$.

Bei der Untersuchung eines Granulationselementes auf seinem Wege vom Startpunkt bis zum Auflösungspunkt müssen wir bedenken, daß das Element jetzt einen Weg von 2 Äquivalenthöhen zurücklegt und daß es eine Höhe von ebenfalls zwei Äquivalenthöhen hat. Unser Element I muß also nun bei $\log P_g = 5,659$ starten, damit es bei $\bar{\tau} = 0,3$ entsprechend $\log P_g = 4,79$ seinen Weg von zwei Äquivalenthöhen zurückgelegt hat.

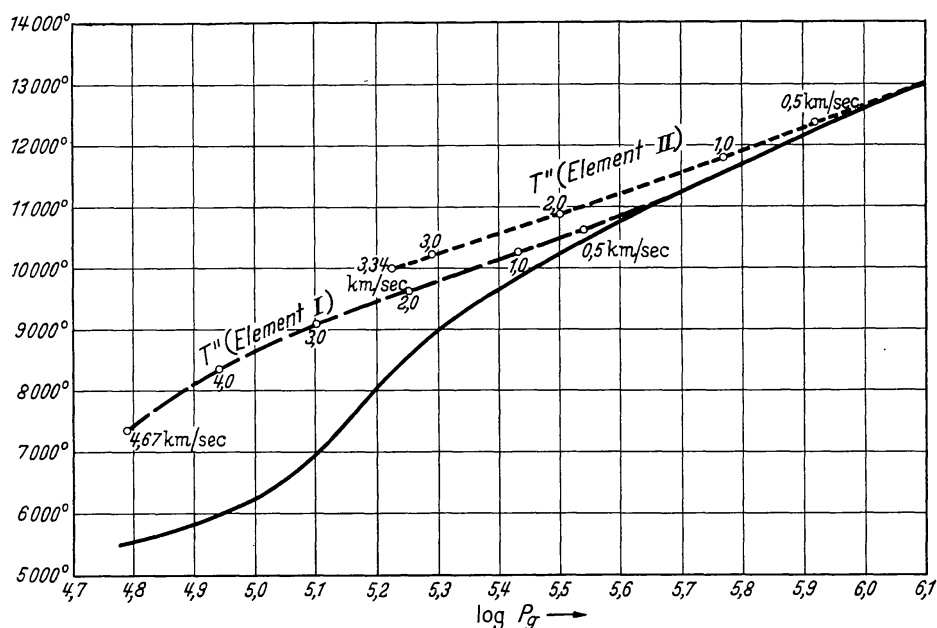


Abb. 11. Entspricht der Abb. 9, nur ist hier alles für $l = 2H$ eingezeichnet. Das Granulationselement I (— — — —) startet jetzt bei $\log P_g = 5,659$, und löst sich auf bei $\log P_g = 4,79$, das Element II (-----) startet jetzt bei $\log P_g = 6,093$ und löst sich bei $\log P_g = 5,224$ auf.

Das Element II muß bei $\log P_g = 6,093$ starten und löst sich dann bei $\log P_g = 5,224$ auf, wo es mit seinem „oberen Rand“ bei $\bar{\tau} = 0,3$ angelangt ist. Die Ergebnisse, die wir dann für diese Elemente erhalten, sind in der Abb. 11 wiedergegeben. Man sieht, daß trotz des langen Weges der Elemente die Temperaturdifferenzen der Elemente gegenüber ihrer Umgebung kleiner werden — wir kommen nur bis etwas über 2000° — da, wie wir oben sahen, das $\nabla - \nabla'$ wesentlich kleiner ist als bei dem Modell mit $l = H$. (Das ΔT ist ja ein Integral über $\nabla - \nabla'$). Dagegen werden die Geschwindigkeiten gegen Ende des Weges ziemlich viel größer als bei der ersten Schichtung, da die Auftriebsbeschleunigung über eine längere Zeit auf die Elemente wirkt.

Wir haben dann noch die Temperaturschichtung T''' ($\bar{\tau}'''$) in den Elementen zu untersuchen, um zu sehen, welche Temperaturdifferenzen wir in

diesem Fall beobachten sollten. Dabei zeigt sich eine Schwierigkeit. Die beiden Elemente liegen nämlich jetzt in den Lagen 2 bzw. 3 so tief, daß in ihrem Mittelpunkt, von wo wir bei der Berechnung der Temperaturschichtung ausgehen, der Strahlungsgleichgewichtsgradient so viel höher ist als der adiabatische, daß wir auch innerhalb der Elemente sicher kein Strahlungsgleichgewicht mehr haben. Das ∇ in dem Element auf eine ähnliche Weise auszurechnen, wie wir es für das Modell getan haben, geht nicht, da wir nicht wissen, wieviel Energie durch das Element transportiert wird. Uns fehlt also der Energiesatz und damit eine unserer notwendigen Gleichungen. Man kann aber sagen, daß der gesamte Strahlungsstrom auf jeden Fall durch die Elemente hindurchgehen muß. Da nun andererseits der prozentuale Anteil des Strahlungsstromes am gesamten Energiestrom proportional $\frac{\nabla}{\nabla_{Str}}$ ist, so erscheint es vernünftig, den Wert $\frac{\nabla}{\nabla_{Str}}$ in dem Element gleich dem Wert von $\frac{\nabla}{\nabla_{Str}}$ der Umgebung, d. h. gleich dem Mittelwert von $\frac{\nabla}{\nabla_{Str}}$ zu setzen, wie wir ihn bei der Berechnung unseres Modelles erhalten haben. Mit dieser Annahme für die Schichtung in dem Element haben wir die beiden in Abb. 10 eingezeichneten Kurven T_2''' (τ''') für die Elemente I (— · · — · · — · · —) und II (— · — · — · —) erhalten. (Der Index 2 soll andeuten, daß es sich um das Modell mit $l = 2H$ handelt.) Wir haben außerdem das $T_2(\bar{\tau})$ hier eingezeichnet, also die Temperaturschichtung für $l = 2H$. Man sieht, daß in diesem Fall bei $\bar{\tau} = 2/3$ gar keine bemerkbare Temperaturdifferenz mehr vorhanden ist. In dieser Lage würde man also die Elemente gar nicht sehen. Wir haben deshalb das Element I noch zu einem späteren Zeitpunkt untersucht, zu dem es mit seinem Mittelpunkt bei $\log P_g = 5000$, d. h. an der Grenze der Konvektionszone angelangt ist. Dann ist es mit seinem „oberen Rand“ etwa bei $\bar{\tau} = 0,12$. Die sich für diesen Zeitpunkt ergebende Schichtung haben wir in die Abb. 10 ebenfalls eingezeichnet (— · · — · · — · · — · · — · ·). Hier kommt man bei $\bar{\tau} = 2/3$ zu einer Temperaturdifferenz von etwa 700° . Man kann daraus etwa folgendes schließen: Bei dem Modell mit $l = 2H$ werden die Elemente erst sichtbar, wenn sie schon sehr weit aufgestiegen sind. In den hohen Schichten haben sie dann wesentlich höhere Temperaturdifferenzen gegenüber der Umgebung als in dem Modell mit $l = H$. Da aber nur Elemente aus ganz bestimmten Schichten mit einem entsprechend hohen Temperaturüberschuß oben ankommen, so werden wir wenige, aber heiße Elemente haben. Das Erscheinungsbild der Granulation könnte sich dann von der Mitte zum Rand hin nur ganz unwesentlich ändern. Ob sich hierbei wieder mittlere Temperaturdifferenzen von $300\text{--}400^\circ$ ergeben, läßt sich ohne eine eingehendere Untersuchung der aus verschiedenen Schichten aufsteigenden Elemente, die sich hier aber kaum

lohnend dürfte, nicht sagen. Es will uns jedoch scheinen, als ob man in dieser Hinsicht zu keinen Widersprüchen mit den Beobachtungen kommt. Lediglich die beobachtete Mitte-Rand-Variation der Granulation scheint darauf hinzudeuten, daß der Mischungsweg wohl kleiner ist als $l = 2H$. Wir möchten deshalb annehmen, daß die für $l = H$ berechnete Schichtung der Wirklichkeit am nächsten kommt.

7. Ein Modell mit doppelt so großer Wärmeabgabe der Turbulenzelemente.

Um auch die durch die Unsicherheit des γ eventuell entstehenden Abweichungen von unseren bisherigen Ergebnissen übersehen zu können, haben wir in das Entropiediagramm der Abb. 4 noch die Schichtung für $l = 2H$, aber mit einem halb so großen γ eingezeichnet ($\cdot - - \cdot$). Dies würde also einer doppelt so starken seitlichen Abstrahlung der Turbulenzelemente entsprechen; der konvektive Energietransport würde entsprechend geringer. Die Schichtung muß sich also in der gleichen Richtung ändern wie bei einer Verkleinerung von l/H . Man sieht aber, daß eine Verkleinerung von γ um einen Faktor 2 die Adiabate nur etwa $1/3$ so weit verschiebt wie eine Verkleinerung von l/H um einen Faktor 2. Ein etwas größerer oder kleinerer Energieverlust des Elementes unterwegs beeinflußt also die Schichtung in der Konvektionszone weit weniger als ein etwas größerer oder kleinerer Mischungsweg, so daß demnach die wesentliche Unsicherheit unserer Rechnungen in der Annahme über die Größe des Mischungsweges liegt.

8. Übergang zur Turbulenz der Chromosphäre.

In der mittleren Chromosphäre mißt man Turbulenzgeschwindigkeiten bis zu 15 km/sec. Diese Turbulenz scheint ihren Ursprung in der Wasserstoffkonvektionszone zu haben. A. UNSÖLD [19] meint, daß man die hohen Geschwindigkeiten verstehen kann, wenn man die Turbulenz als ein Aggregat von Schallwellen auffaßt. Dann muß — sofern man die Energiedissipation vernachlässigen darf — der Energiestrom $\sim \rho v^2$ konstant bleiben und deshalb $v^2 \sim 1/\rho$ anwachsen. Der Übergang vom Turbulenzfeld zum Schallwellenfeld läßt sich, was die Größenordnung der transportierten Energie anbelangt, folgendermaßen vollziehen: Die konvektiv pro cm^2 und sec transportierte Energie ist

$$\pi F_k = \rho \bar{v} c_p \cdot \Delta T. \quad (11)$$

Andererseits ist die in einer Schallwelle transportierte Energie

$$\rho v^2 c_s, \quad (12)$$

wobei c_s die Schallgeschwindigkeit darstellt. Den Zusammenhang der beiden Ausdrücke zeigt eine kurze Rechnung. Zunächst ist $\frac{v}{c_s} = \frac{1}{\kappa - 1} \times \frac{\Delta T}{T}$, wo $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem

Druck bzw. Volumen bedeutet. Andererseits gilt $c_s^2 = \frac{d p}{d \varrho} = \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{RT}{\mu}$, woraus man erhält $c_p = c_s^2 \cdot c_v \cdot \frac{\mu}{RT}$. Das in πF_k eingesetzt ergibt $\pi F_k = \varrho v c_s^2 \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot c_v \cdot \frac{\mu}{R}$ und mit $\frac{v}{c_s} = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot \frac{\Delta T}{T}$ sowie $c_p - c_v = \frac{R}{\mu}$ nach elementarer Umformung gerade wieder die Gl. (12).

In dynamischer Hinsicht hat M. SCHWARZSCHILD (Diskussionsbemerkung auf der I. A. U. 1952) folgende Schwierigkeit betont: Geht man von dem Geschwindigkeitsfeld der (von den Theoretikern bis jetzt fast ausschließlich studierten) isotropen Turbulenz inkompressibler Medien aus, so ist dieses ein quellenfreies Wirbelfeld. Eine Schallwelle andererseits stellt gerade umgekehrt ein wirbelfreies Quellen-(Potential)-feld dar, so daß der Übergang vom einen zum anderen nicht ohne weiteres möglich ist. Das Dilemma dürfte sich im wesentlichen auflösen, wenn man bedenkt, daß in einer Sternatmosphäre die Kompressibilität der Gase auch bei Unterschallgeschwindigkeiten schon wegen des Gravitationsfeldes notwendig berücksichtigt werden muß (ein auf- bzw. absteigendes Turbulenzelement verkleinert bzw. vergrößert notwendig seine Dichte).

Zusammenfassung.

Es wurde die Temperaturschichtung in der Konvektionszone der Sonne berechnet, wobei berücksichtigt wurde, daß konvektiver und Strahlungsenergietransport zusammen immer den Gesamtenergietransport σT_e^4 liefern müssen. Es ergab sich, daß die Temperaturschichtung in der Nähe der oberen Grenze der Konvektionszone je nach der angenommenen Größe des Mischungsweges der Turbulenzelemente bis etwa $\bar{\tau} = 2$ oder 3 noch praktisch durch das Strahlungsgleichgewicht bestimmt wird. Daran schließt sich eine sehr ausgedehnte Übergangszone an, in der die Temperaturschichtung zwischen der Strahlungsgleichgewichts- und der adiabatischen Schichtung liegt. Praktisch adiabatisch wird die Schichtung erst ab $\log P_g \approx 8$, also in einer Tiefe, die auf die beobachtbaren optischen Phänomene keinen Einfluß mehr hat, denn schon $\log P_g = 5,50$ entspricht eine optische Tiefe von $\bar{\tau} = 450$. In dem Bereich $\bar{\tau} = 3$ bis 5, der für die beobachtbare Ausstrahlung der Sonne gerade noch von Bedeutung ist, beträgt der konvektive Energietransport nur etwa 30 bis 50% des gesamten. Die Dicke der Konvektionszone ergibt sich zu 65000 bis 165000 km je nach Größe des angenommenen Mischungsweges. Ein größerer Mischungsweg ergibt eine größere Dicke.

Die Granulationselemente sind die aus der Konvektionszone aufsteigenden Turbulenzelemente, die an der Konvektionszonengrenze mit relativ großem Temperaturüberschuß und hohen Geschwindigkeiten ankommen und daher ohne Schwierigkeit in die Strahlungsgleichgewichtszone hinein aufsteigen können bis in die Schichten um $\bar{\tau} = 0,3$, wo sie

in der Nähe des Sonnenrandes ja noch beobachtet werden. Vergleicht man die Granulationselemente mit ihrer Umgebung bei gleichem Druck, so können maximale Temperaturdifferenzen bis 3500° auftreten. Beobachtet man die Sonne aber von außen, so vergleicht man die Temperatur der Granulationselemente mit der ihrer Umgebung in derselben *optischen* Tiefe. Unsere Rechnungen führen in diesem Fall auf Temperaturunterschiede von maximal etwa 1000° und im Mittel 300° bis 400° , was gut mit den THIESSENSchen Beobachtungen übereinstimmt. Die von uns berechneten Geschwindigkeiten von etwa 2—3 km/sec und die Lebensdauer von ~ 2 Minuten stimmen ebenfalls befriedigend mit den Beobachtungen überein, wenn man bedenkt, daß diese ja nur noch Elemente erfassen können, die einen fünf- bis sechsmal so großen Durchmesser haben wie die hier von uns betrachteten.

Herrn Professor UNSÖLD möchte ich herzlich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Hinweise und Diskussionen. Desgleichen bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu großem Dank verpflichtet für die Gewährung eines Stipendiums, das mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte.

Literatur.

- [1] BARBIER, D.: Ann. d'Astrophysique **9**, 173 (1946). — [2] BIERMANN, L.: Astr. Nachr. **264**, 359 (1937). — [3] BIERMANN, L.: Z. Astrophysik **21**, 320 (1942). — [4] BIERMANN, L.: Z. Astrophysik **25**, 135 (1948). — [5] CHALONGE, D., et V. KOURGANOFF: Ann. d'Astrophysique **9**, 69 (1946). — [6] GVOSDOVER, S. D.: Physik. Z. Sowjetunion **12**, 164 (1937). — [7] JAGER, C. DE: Proc. Nederl. Akad. Wetensch. **51**, Nr. 6 (1948). — [8] JEFFREYS, H.: Monthly Notices **91**, 121 (1931). — [9] MAEKKER, H., u. T. PETERS: Z. physik. Chem. **198**, 516 (1951). — [10] MORSE, P. M.: Astrophysic. J. **92**, 27 (1940). — [11] ÖPIK, E. J.: Monthly Notices **110**, 559 (1950). — [12] ROSA, A.: Z. Astrophysik **25**, 1 (1948). — [13] ROSA, A., u. A. UNSÖLD: Z. Astrophysik **25**, 20 (1948). — [14] RICHARDSON, R. S., and M. SCHWARZSCHILD: Astrophysic. J. **111**, 351 (1950). — [15] RUDKJÖBING, M.: Ann. d'Astrophysique **9**, 7 (1946). — [16] THIESSEN, G.: Naturwiss. **37**, 427 (1950). — [17] UNSÖLD, A.: Z. Astrophysik **25**, 11 (1948). — [18] UNSÖLD, A.: Z. Astrophysik **25**, 340 (1948). — [19] UNSÖLD, A.: Z. Naturforsch. **7a**, 121 (1952). — [20] VITENSE, E.: Z. Astrophysik **28**, 81 (1951). — [21] VITENSE, E.: Erscheint demnächst in Z. Astrophysik. — [22] WOOLLEY, R. v. D.: Monthly Notices **101**, 52 (1941).

ERIKA VITENSE, z. Z. Lick-Observatory, Mt. Hamilton/Calif. USA.