1935 г. № 124

ИЗВЕСТИЯ

ГЛАВНОЙ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ В ПУЛКОВЕ

Том XV, 1

BULLETIN

DE L'OBSERVATOIRE CENTRAL A POULKOVO

Vol. XV, 1

LA COMETE D'ENCKE EN 1924—1934

par N. IDELSON

L'étude du mouvement de la comète d'Encke a été poursuivie à l'Observatoire de Poulkovo depuis de bien longues années; son célèbre directeur, O. Backlund, consacra à ce difficile objet de longs et persévérants efforts; après sa mort, survenue en 1916, les calculs ont été continués à l'Observatoire et des éphémérides ont été données pour toutes les apparitions de la comète, à commencer par celle de 1918. Or, il advint malheureusement que l'éphéméride pour 1931, comparée aux observations de Johannesbourg,[1] présenta des écarts extrêmement forts, qu'on ne pouvait attribuer, sauf erreur de calcul, qu'à une augmentation énorme de l'accélération du mouvement moyen, bien peu probable en elle même. Comme vers l'automne 1933 la cause de ces divergences n'était encore pas établie et comme le périhélie de Septembre 1934 approchait, je fus chargé par l'Observatoire de faire un contrôle des perturbations de la comète pour l'intervalle de 1924—1934, en premier lieu de celles par Jupiter; de déduire par un calcul indépendant la valeur de l'accélération pour cette période et de préparer une éphéméride pour l'apparition de 1934.

J'étais assisté de calculateurs expérimentés et remarquablement habiles: m-lles R. Massejewa, N. Boëwa et M. Frolowa. A notre immense regret m-lle Massejewa succomba en Avril 1934 à une maladie incurable. Néanmoins, j'ai pu terminer ce travail à temps, [2] et j'en donne maintenant un exposé succinct, renvoyant pour certains détails d'ordre technique à l'Appendice; une étude de l'apparition de 1934 a pu être jointe à cet exposé, vu la publication récente de deux séries d'observations de la comète à l'Observatoire d'Athènes. [3]

1. Le système de départ.—Ce système, qui constitue la base de tous mes calculs, me fut communiqué par M. L. Matkiewicz; en voici les éléments (système A_{24}):

T	1924 X 31.9583 (T. U.)	
M	0° 0′ 0″.0	
φ	57 48 21 .3	1924.0
☊	334 37 13 .7	1924.0
ω	184 43 56 .8	1924.0
i	12 30 15 .7	1924.0
n'	1073″,92670	
$\varkappa$	22,19	

Outre les six éléments habituels, il y figure l'accélération $\varkappa$; c'est le coefficient de t^2 dans l'expression de l'anomalie moyenne, le temps t étant compté, comme l'a déjà pratiqué Encke, en unités de 1200 jours; comme la période de la comète est elle-même à peu près égale à 1200 jours, on voit que l'effet de l'accélération sur l'anomalie après m périodes sera d'une manière approchée $\varkappa m^2$. Nous poserons toujours:

$$\tau = \frac{t}{1200},$$

et nous aurons pour l'expression de l'anomalie moyenne et du moyen mouvement perturbés et accélérés:

$$M = M_0 + Nt + \varkappa\tau^2 + \delta M \qquad (1)$$

$$n' = N + \frac{\varkappa\tau}{600} + \delta n, \qquad (2)$$

[1] A. N., № 5819, p. 243; A. N., № 6020, p. 251.
[2] Voir l'Éphéméride au „Poulkovo Observatory Circular", № 10 (Appendix), publiée en Juin 1934.
[3] J. O., vol. XVII, 12, p. 195; A. N., № 6076, p. 254.

en désignant par N le moyen mouvement osculateur de départ, par δM et δn la somme des perturbations. Or ni le moyen mouvement n', ni l'anomalie M, qui figurent au système A_{1924}, ne sont pas du tout des éléments elliptiques; ce sont des éléments accélérés pour le périhélie de 1924; leur définition présume une certaine valeur à une époque (inconnue) de départ et une certaine valeur de l'accélération; mais dans ce qui suit nous allons les traiter d'abord comme s'ils étaient des éléments élliptiques, plus ou moins approchés; nous ne tiendrons aucun compte de l'accélération $\varkappa$, qui figure à la table A_{1924}, en nous imposant la tache de déduire le mouvement elliptique osculateur pour 1924 ainsi que son accélération pour les périodes suivantes d'après l'ensemble des observations dont nous disposons.

2. Les perturbations.—Les perturbations de la comète par Jupiter ont été très fortes de 1924 à 1928 et bien moins grandes pour les deux périodes suivantes. Je me suis servi pour leur calcul des excellentes tables du Dr. A. C. Crommelin; [1] mais j'ai du calculer à nouveau les coefficients pour $e = 0.85$ et $e = 0.86$; il a fallu encore subdiviser en quatre parties le premier intervalle (de 0° á $7^1/_2$°) et le dernier (de $352^1/_2$° à 360°); on a aussi modifié l'ensemble des formules pour le calcul de la distance de la comète à Jupiter; nous renvoyons pour ces détails à l'Appendice, en ne donnant ici que les résultats généraux des calculs. La période 1924—1928 a été divisée en 6 parties; la suivante en 3; on a fait osculation à la fin de chaque division [2]. Les perturbations, dues aux autres planètes (Mercure, la Terre, Venus, Mars et Saturne) n'ont pas été calculées à nouveau; elles nous furent fournies par M. Matkiewicz, qui a fait un contrôle soigné de ses résultats. Voir tables I et II.

TABLE I

Période 1924—1928

Perturb. par Jupiter	M	$\delta\varphi$	$\delta\Omega$	$\delta\omega$	δi
(1)	0° — 97½°	+ 109″.7	— 87″.9	+ 1″.1	+ 55″.5
(2)	97½ —142½	+ 171 .1	— 28 .4	— 37 .4	+ 70 .6
(3)	142½ - 180	+ 241 .6	+ 10 .2	— 27 .6	+ 71 .7
(4)	180 —232½	+ 482 .1	+ 22 .3	+ 130 .0	— 42 .7
(5)	232½ — 300	+ 273 .1	— 203 .4	+ 528 .4	— 120 .0
(6)	300 —360	— 4 .4	— 69 .7	+ 136 .2	— 20 .8
Somme, Jupiter		+ 1273 .2	— 357 .0	+ 730 .7	+ 99 .8
Autres planètes		- 6 .8	— 2 .5	— 3 .5	— 3 .9
Somme des perturbations		+ 1266 .4	— 359 .5	+ 727 .2	+ 95 .9
Précession 1924 - 1928			+ 203 .9	— 2 .8	+ 1 .8

	δn	n	δM	θ	$\delta n\,(T-\theta)$
(1)	+ 0″.13655	1073″.92670	— 23″.1	326j.8608	+ 120″.1
(2)	+ 0 .43295	1074 .06325	+ 46 .8	150 .7855	+ 315 .3
(3)	+ 0 .53749	1074 .49620	— 15 .7	125 .6549	+ 323 .9
(4)	+ 1 .38289	1075 .03369	— 343 .1	176 .1276	+ 589 .8
(5)	+ 2 .52933	1076 .41658	— 601 .3	226 .3076	+ 506 .4
(6)	+ 0 .91964	1078 .94591	— 14 .2	200 .2086	—
Somme, Jupiter	+ 5 .93885		— 951 .8	1205 .9450	+ 1855 .5
Autres planètes	— 0 .08087		+ 25 .3	— 0 .0061	— 18 .8
Somme	+ 5 .85798		— 926 .5	1205 .9389	+ 1836 .7

Perturb. en anomalie	— 926″.5
„Termes rectangles" [3]	+ 1836 .7
Somme	+ 910 .2
360°—Somme	1295089 .8
n (192)	1073 .92670
Période, contrôle	1205 .9387 jours.

Eléments A_{1928}

T	1928 II 19.8972 T U.	
M_0	0° 0′ 0″,0	
φ	58 9 27″.7	
Ω	334 34 38 .1	1928.0
ω	184 56 1 .2	1928.0
i	12 31 53 4	1928.0
n	1079″.78468	

---

[1] Mem. Roy. Astr. Soc. vol. LXIV, p V.

[2] C'est en comparant nos données pour les perturbations par Jupiter qu'on a découvert la déplorable erreur qui a vicié l'éphéméride pour 1931 (voir aux A. N., 251, № 6020, p. 307).

[3] V. à l'Appendice,

TABLE II

Période 1928–1931

Perturb. par Jupiter	M	$\delta\varphi$	$\delta☊$	$\delta\omega$	δi
(1)	0°—120°	— 4″.2	— 4″.0	— 25″.8	+ 4″.4
(2)	120 —240	+ 69 .8	+ 12 .7	- 31 .5	+28 .5
(3)	240 —360	+ 42 .8	+ 21 .8	— 3 .5	+11 .8
Somme, Jupiter		+108 .4	+ 30 .5	— 60 .8	+44 .7
Autres planètes		+ 2 .7	— 3 4	— 1 .3	+ 2 .7
Somme des perturbations		+111 .1	+ 27 .1	— 62 .1	+47 .4
Précession 1928—1931			+152 .9	— 2 .3	+ 1 .3

	δn	n	δM	θ	$\delta n\,(T-\theta)$
(1)	+0″.41496	1079″.78468	+196″.2	399j.8981	+331″.8
(2)	+0 .18464	1080 .19964	+178 .6	399 .7608	+ 73 .8
(3)	—0 .05744	1080 .38428	+ 38 .9	399 .8218	—
Somme, Jup.	+0 .54216		+413 .7	1199 .4807	+405 .6
Planètes	+0 .08119		+ 73 2	— 0.0911	+ 25 .3
Somme	+0 .62335		+486 .9	1199 .3896	+430 .9

Perturbations en anomalie	+486″.9
Termes rectangles	+430 .9
Somme	+917 .8
360° — Somme	1295082 .2
n (1928)	1079 .78468
Période (contrôle)	1199 .3894 jours

Éléments A_{1931}

T	1931 VI 3,2868 T. U.	
M_0	0° 0′ 0″.0	
φ	58 11 18 .8	
☊	334 37 38 .1	1931.0
ω	184 54 56 .8	1931.0
i	12 32 42 .1	1931.0
n	1080″ .40803	

Le point le plus délicat du calcul des perturbations est le calcul de la période perturbée; mais il comporte un contrôle très efficace, que nous avons appliqué à chaque révolution (v. à l'Appendice); nous fixons la durée des deux périodes à 1205.9389 et à 1199.3896 jours respectivement; on obtient de cette façon les systèmes A_{28} et A_{31}; certes, on ne peut les considérer comme des systèmes d'éléments elliptiques, puisque le système A_{24} ne l'est pas, comme il a été dit plus haut; mais, quoiqu'il en soit, l'accélération du moyen mouvement n'entre pour rien dans les systèmes A.

3. Premières comparaisons.—C'est ce système A qu'il s'agit de comparer maintenant aux observations de la comète. Elles ne sont pas bien nombreuses; en 1924 il y en a eu 79; en 1927/1928—39; et de l'apparition de 1931 nous n'avons que 21, faites par M. Wood à Johannesbourg dans des conditions très difficiles. Toutes ces observations ont été comparées individuellement aux éléments A, c. à. d. qu'on n'a pas calculé des éphémérides (qui sont toujours d'une interpolation assez difficile pour un astre à φ de 58°), mais chaque lieu a été calculé séparément; tous ces calculs furent faits à cinq décimales, à la 1″ ronde, et l'on n'a pas tenu compte des perturbations entre les époques des périhélies (pour lesquelles nos éléments sont pour ainsi dire osculateurs) et le moment de l'observation donnée. D'après la marche des écarts nous avons groupé toutes ces observations en 13 lieux normaux, dont la liste est donnée dans la table III.

TABLE III

Lieux normaux

№	Date	Nombre des observations α	Nombre des observations δ	Périhélie
I	1924, Août 31.50	9	5	
II	1924, Sept. 20.86	5	4	
III	1924, Sept. 28.50	9	10	
IV	1924, Oct. 8.90	46	45	
V	1924, Oct. 20.92	10	10	
				1924, Oct. 31.96
VI	1927, Oct. 20.06	3	3	
VII	1927, Dec. 18.07	7	7	
VIII	1928, Janv. 22.68	15	16	
IX	1928, Fevr. 4.65	7	7	1928, Fevr. 19.90
X	1928, Mars 29.10	6	6	
				1931, Juin 6.29
XI	1931, Juin 19.68	10	10	
XII	1931, Juill. 2.69	6	6	
XIII	1931, Juill. 15.31	5	5	

La table suivante IV, fondamentale pour notre travail, contient dans sa première colonne les écarts primitifs $O-C$; ils sont exprimés pour les deux coordonnées en secondes d'arc; ceux en α sont multipliés par $\cos\delta$; on donne pour chaque apparition d'abord les écarts $\Delta\alpha\cos\delta$ et puis les $\Delta\delta$ (ce qui est désigné pour les différents lieux normaux par les abréviations I_α, II_α; I_δ, II_δ etc.); les nombres qui figurent dans les colonnes suivantes trouveront leur explication au cours de notre exposition.

IV. TABLE FONDAMENTALE.

	Lieu normal	(1) $O-C$ primitifs	(2) Effet de $\varkappa = 37''.80$	(3) Effet de $\Delta M = +25''.0$	(4) Somme	(5) $O-C$ corrigés	(6) Résidus après corr. avec $\varkappa = 37''.80$
1924	Iα	+ 85″.2		+ 80″.6	+ 80″.6	+ 4″.6	— 1″.2
	IIα	+144 .2		+114 .6	+114 .6	+ 29 .6	— 0 .3
	IIIα	+142 .6		+108 .4	+108 .4	+ 34 .2	— 0 .3
	IVα	+121 .0		+ 83 .5	+ 83 .5	+ 37 .5	+ 8 .9
	Vα	+ 90 .4		+ 69 .8	+ 69 .8	+ 20 .6	+ 8 .1
	Iδ	+ 59 .4		+ 0 .2	+ 0 .2	+ 59 .2	— 1 .9
	IIδ	+ 11 .8		— 50 .1	— 50 .1	+ 61 .9	+ 1 .2
	IIIδ	— 19 .1		— 74 .4	— 74 .4	+ 55 .3	+ 3 .1
	IVδ	— 42 .7		— 85 .9	— 85 .9	+ 43 .2	+ 6 .9
	Vδ	— 52 .4		— 78 .8	— 78 .8	+ 26 .4	+ 8 .9
1927—1928	VIα	— 6 .8	+ 13″.4	+ 11 .9	+ 25 .3	— 32 .1	+ 3 .8
	VIIα	— 57 .9	— 28 .1	— 18 .0	— 46 .1	— 11 .8	+19 .9
	VIIIα	—150 .9	— 77 .3	— 50 .4	—127 .7	— 23 .2	+ 4 .4
	IXα	—324 .8	—169 .7	—110 .6	—280 .3	— 44 .5	—19 .0
	Xα	— 15 .8	— 21 .8	— 14 .4	— 36 .2	+ 20 .4	+ 2 .5
	VIδ	+ 84 .3	+ 22 .1	+ 17 .4	+ 39 .5	+ 44 .8	—16 .9
	VIIδ	+ 64 .6	+ 2 .9	+ 3 .0	+ 5 .9	+ 58 .7	+ 9 .1
	VIIIδ	— 3 .0	— 28 .7	— 18 .3	— 47 .0	+ 44 .0	+ 5 .9
	IXδ	—128 .7	— 93 .7	— 60 .8	—154 .5	+ 25 .8	— 1 .9
	Xδ	— 34 .0	+ 0 .3	— 0 .4	— 0 .1	— 33 .9	— 2 .8
1931	XIα	— 212 .2	—159 .8	— 24 .9	— 184 .7	— 27 .5	—14 .0
	XIIα	— 131 .8	— 57 .7	— 7 .5	— 65 .2	— 66 .6	—21 .2
	XIIIα	+1076 .3	+987 .0	+158 .8	+1145 .8	— 69 .5	+ 9 .2
	XIδ	— 640 .4	— 476 .3	— 77 .2	— 553 .5	— 86 .9	—35 .8
	XIIδ	—1275 .1	— 1011 .9	—162 .9	—1174 .8	—100 .3	— 6 .5
	XIIIδ	—1810 .0	— 1488 .2	—236 .9	—1725 .1	— 84 .9	+27 .1

En examinant les écarts primitifs, nous constatons d'abord que les éléments A_{1924} ne sont pas d'une très grande précision, vu qu'ils ne représentent les lieux de cette même apparition qu'à 1′ ou 2′ près; puis, que ces écarts, devenant de plus en plus forts en 1928, acquièrent des valeurs tout-à-fait inadmissibles de $+1076''$ et $-1810''$ pour le dernier lieu normal en 1931; nous remarquons enfin que l'allure de ces écarts est assez capricieuse et parfois, comme pour les δ en 1928, tout-à-fait déconcertante.

4. Valeur approchée de l'accélération et les écarts corrigés.—C'est de l'ensemble des écarts dans la colonne (1) de la table IV que nons devons tirer la valeur de l'accélération du moyen mouvement; car il est de toute évidence qu'on ne parviendrait jamais à représenter les lieux normaux ci-dessus par un système d'éléments elliptiques.

La marche que nous allons suivre pour obtenir cette accélération sera celle-ci: faisons d'abord une correction d'orbite, en combinant les apparitions de 1924 et de 1928, mais en laissant de coté celle de 1931; faisons ensuite une seconde correction d'orbite en combinant les observations de 1924 et de 1931, mais en laissant de coté celles de 1928. Nous obtiendrons ainsi deux systèmes de corrections aux éléments A; si l'orbite était elliptique, ces deux systèmes devraient coincider aux erreurs d'observations près; en particulier nous devrions obtenir des corrections égales pour le moyen mouvement.

Mais supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soient dn_1 et dn_2 les valeurs inégales de ces corrections.

Je dis qu'elles vont nous fournir la valeur de l'accélération.

Et de fait, nous obtiendrons, après ces corrections, les valeurs:

$$n' + dn_1 \quad \text{et} \quad n' + dn_2,$$

n' étant le moyen mouvement du système A_{24}. Quelle est la signification de ces nombres? Soit N le mouvement elliptique pour 1924, qui nous est inconnu; supposons qu'il subisse une accélération; alors le $n' + dn_1$ sera le mouvement effectif pour la période 1924—1928, ou bien, en se rappelant une règle élémentaire de cinématique, d'après laquelle un mouvement uniformément accéléré équivaut à un mouvement uniforme à vitesse pour le moment moyen, le $n' + dn_1$ sera le mouvement N, accéléré jusqu'au milieu de l'intervalle 1924—1928 (une demi-période); de même, le $n' + dn_2$ sera égal à ce même mouvement N, accéléré jusqu'au milieu de l'intervalle 1924—1931 (ou bien pour une période entière); soit donc τ la durée d'une période ($\tau = 1200$ jours); on aura alors, d'après (2):

$$n' + dn_1 = N + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa}{600}$$
$$n' + dn_2 = N + \frac{\varkappa}{600}$$

ou bien, en résolvant:

$$\varkappa = 1200\,(dn_2 - dn_1)$$
$$N = n' + 2\,dn_1 - dn_2, \qquad (3)$$

Telles sont les formules bien simples qui nous permettront d'obtenir les éléments N et $\varkappa$; pour les appliquer il a fallu faire les deux corrections d'orbite qui viennent d'être indiquées; à cet effet, on a calculé les coefficients différentiels pour tous les lieux normaux d'après les formules dans Bauschinger, ed. 1906, p. 442, et l'on a formé un groupe de 20 équations de condition avec les 10 lieux normaux:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X (1924 et 1928),

et puis un groupe de 16 équations avec les 8 lieux normaux:

I, II, III, IV, V, XI, XII, XIII (1924 et 1931).

En résolvant par moindres carrés ces deux systèmes surabondants pour les éléments de Bauschinger dM_0, dn, $d\varphi$, ds, dp, dq, (ces trois derniers permettant d'obtenir les $d\Omega$, $d\omega$, et di), nous obtenons les deux systèmes de corrections que voici (table V):

TABLE V

Corrections des éléments

	1924 et 1928	1924 et 1931
dM_0	$+25''.06$	$+24.72$
dn	$+\ 0\ .03361$	$+\ 0.06511$
$d\varphi$	$-\ 2\ .11$	$-\ 1.05$
ds	$+\ 1\ .48$	$+\ 6.75$
dp	$-66\ .84$	-58.76
dq	$-\ 9\ .85$	$+22.59$
$d\Omega$	$+70\ .85$	-81.61
$d\omega$	$-69\ .17$	$+79.68$
di	$+65\ .80$	$+60.41$
$d\pi$	$+\ 1\ .68$	$-\ 1.93$
$dn_2 - dn_1$	$+\ 0''.03150$	
$2dn_1 - dn_2$	$+\ 0\ .00211$	

Arrêtons nous à ces résultats et déduisons-en d'abord les éléments qui nous intéressent le plus pour le moment, notamment N et $\varkappa$; en calculant d'après (3), on a immédiatement:

$$N = 1073''.92670 + 0''.00211 = 1073''.92881$$
$$\varkappa = 0''.0315 \times 1200 = 37''.80.$$

La valeur de l'accélération $\varkappa$ ainsi obtenue n'a, heureusement, rien d'invraisemblable; on sait que cette quantité, depuis sa découverte par Encke, a varié entre les limites de 60″ à 20″; mais elle est apparemment trop forte, vu que Backlund a fixé sa valeur pour 1918 à 22″.19 et que M. Matkiewicz a pu retenir cette même valeur jusqu'en 1924. Il est d'ailleurs évident que la méthode qui nous a servi pour sa détermination est d'une précision assez modique, car les valeurs de dn peuvent être erronées de 0″.005 au moins, et cela donnerait 12″ de différence sur $\varkappa$; c'est donc une approximation bien grossière de la réalité. Notons encore que les corrections dM_0, $d\varphi$ et di résultent presque identiques de nos deux sulutions; il en est tout autrement de $d\omega$ et $d\Omega$, qui se séparent évidemment très mal, mais qui semblent indiquer que la longitude du périhélie $\pi = \Omega + \omega$ qui résulte du système A_{24}, n'avait pas besoin de correction sensible.

Quoiqu'il en soit, nous allons nous tenir à nos corrections et nous chercherons l'effet des principales d'entre elles sur nos lieux normaux; ce sont évidemment la correction dM_0, égale à très peu près à 25″.0, et l'accélération qui sont les plus importantes, et avant d'aller plus loin il y a lieu de débarrasser de leur effet les écarts primitifs de la table IV. Cela doit nous donner des écarts beaucoup plus réguliers et de valeur moindre, qui permettront d'appliquer les méthodes de corrections différentielles à l'ensemble des observations. Ce calcul est bien facile avec dM_0; par exemple le coefficient différentiel pour le lieu normal $XIII_\alpha$ est 6.352; en multipliant 25″.0 par ce nombre on a 158″.8, et c'est précisément cet effet de la correction de 25″.0 en anomalie moyenne de l'époque qu'on trouve sur la ligne $XIII_\alpha$, colonne (3) de la table IV. Pour obtenir l'effet de l'accélération on peut raisonner ainsi: le temps écoulé depuis l'origine (fixé à 1924, Oct. 20,9) jusqu'à l'époque du lieu normal XIII est de 2458,3 jours; donc $\tau = 2{,}0486$; l'effet de l'accélération sur n pour le moment moyen entre ces deux époques sera:

$$dn = 37'',8 \cdot \frac{2.0486}{1200} = 0''.06453;$$

le coefficient defférentiel de dn pour le lieu normal $XIII_\alpha$ est égal à $+15296.0$; donc la correction en question est de

$$+0''.06453 \times 15296.0 = +987''.0,$$

et c'est précisément ce nombre qu'on trouvera sur la ligne $XIII_\alpha$ de la table IV, colonne (2). La somme des deux corrections obtenues est donc $+1145''.8$, et comme l'écart primitif est égal pour ce lieu normal à $+1076''.3$, la différence, que j'appelle *l'écart O—C corrigé*, est $-69''.5$; et la colonne (5) de notre table contient précisément ces écarts corrigés. En parcourant la suite de ces écarts, on constate immédiatement que leur marche est de beaucoup plus régulière que celle des écarts primitifs; les différences énormes en 1931 ont disparu; et sur les 26 écarts de la colonne (5) il n'y a que 6 qui dépassent 1′. Il semble donc possible de procéder dès ce moment à une correction un peu plus précise des éléments.

5. **Première correction d'ensemble à $\varkappa$ fixe.** — Avec les coefficients différentiels, calculés en première approximation, nous formons les 26 équations de condition, cette fois pour tous les lieux normaux de 1924, 1928 et 1931, les membres tout connus étant les écarts corrigés de la table IV; un nouveau système d'équations normales à 6 inconnues nous donne maintenant les corrections suivantes des éléments (v. table VI).

TABLE VI

Correction d'ensemble 1924, 1928 et 1931

dM_0	$+\ 0''.44$
dn	$+\ 0\ .00047$
$d\varphi$	$-\ 1\ .55$
ds	$+\ 1\ .20$
dp	$-58\ .54$
dq	$+\ 7\ .09$
$d☊$	$-10\ .4$
$d\omega$	$+11\ .3$
di	$+58\ .9$
$d\pi$	$+\ 0\ .9$

Mais n'oublions pas que la correction de l'anomalie M_0 comporte déjà $25''.0$; la correction totale sera $+25''.44$; le moyen mouvement de départ doit subir une correction egale à $0''.00211+0''.00047=0''.00258$; nous obtiendrons ainsi le mouvement corrigé N; enfin nous remarquerons que les corrections des éléments ☊ et ω tendent de nouveau à laisser le périhélie sur place, tandis que l'inclinaison obtient une correction assez notable, à peu près égale à celle qui fut trouvée avec les combinaisons 1924—1928 et 1924—1931.

En appliquant les corrections de la table VI aux éléments A, nous obtenons les systèmes que nous nommerons B, avec l'année de l'apparition comme indice (v. table VII).

TABLE VII

Système B

	B_{24}	B_{28}	B_{31}
T	1924 Oct. 31.9347	1928 Févr. 19.8707	1931, Juin 3.2575
T'	— — —	19.8343	3.1156
φ	57°18'19".7	58° 9'26".1	58°11'17".2
☊	334 37 3 .3	334 34 27 .7	334 37 27 .7
ω	184 44 8 .1	184 56 12 .5	184 55 8 .1
i	12 31 14 .6	12 32 52 .3	12 33 41 .0
Équin.	1924.0	1928.0	1931.0
N	1073".92928	1079".78726	1080".41061
n'	1073 .92986	1079 .85026	1080 .53661

$M=0°0'0''.0$ pour $t=T'$ (périhélies accélérés)

$\varkappa=+37''.80$

Époque de l'accélération: 1924. Oct. 20.92

Il ne nous reste qu'à ajouter un mot à propos des mouvements n' et des périhélies T; les premiers ont été obtenus en ajoutant aux mouvements non accéléres N la correcton de l'accélération, c. à. d. la correction

$$dn'=\frac{37''.80}{600}\tau;$$

quant aux périhélies, ils obtiennent d'abord une correction qui provient des corrections dM_0 et dn, soit

$$\begin{aligned}\delta T_{24} &= -25''.44 : n'_{24} &&= -0.0236\\ \delta T_{28} &= [-25''.44+0''.00258\ (t_{28}-t_0)] : n'_{28} &&= -0.0265\\ \delta T_{31} &= [-25''.44+0''.00258\ (t_{31}-t_0)] : n'_{31} &&= -0.0293;\end{aligned}$$

puis, pour tenir compte de l'accélération, il faut introduire les corrections

$$\delta T=-\frac{37'',80\cdot\tau^2}{n},$$

ce qui donne en jours moyens -0.0360 pour 1928 et -0.1419 pour 1931; avec ces dernières corrections on obtient les périhélies accélérés T' de la table VII. Enfin, soulignons ce fait que tous les systèmes B reposent sur la valeur de $\varkappa=37''.80$, trovée en première approximation et dont nous avons constaté déjà le manque de précision. Remarquons encore, qu'on peut garder inaltérables les éléments T des systèmes A, en appliquant aux anomalies M, calculées avec les éléments T et n des systèmes A, une correction globale:

$$\delta M=+25''.44+0'',00258\ (t-t_0)+37'',80\ \tau^2;$$

les éléments N (on bien n') ne serviront alors qu'au calcul des grands axes a.

6. **Nouvelle représentation des observations.**—Arrivés à ce point, nous devons pousser un peu plus loin l'approximation de nos calculs. Vu le manque de rigueur de la détermination de $\varkappa$, qui n'a servi qu'à faire disparaitre les écarts énormes de la table IV, nous allons prendre maintenant les éléments B comme système de départ, comme si tous les calculs précédents n'existaient point. Nous représenterons donc une certaine quantité des observations choisies à ce système. Cette fois-ci le calcul se fait à 6 décimales; les anomalies moyennes de la première approximation obtiennent la correction δM, que nous venons d'ndiquer; on résout l'équation de Kepler et on calcule pour chaque observation les x, y, z. Mais ici une question délicate se pose. Quel mouvement moyen devra-t on prendre pour le calcul du grand axe a? Est-ce le mouvement N, que nous nous efforçons de considérer comme elliptique? Est-ce le mouvement accéléré n', lequel, entaché d'une origine

obscure (telle, par exemple, la résistance du milieu), semble n'avoir aucun rapport avec les lois de Kepler et de Newton? Par exemple, pour 1931 on trouve:

$$\text{avec } N \ldots \log a = 0.3443885$$
$$\text{,, } n' \ldots \log a = 0.3442446$$

Je pose cette question sans pouvoir, évidemment, la résoudre; ce que l'on peut dire ici, c'est que les calculs deviendraient pratiquement inextricables si l'on allait faire tomber la dépendance mutuelle des éléments a et n'; car, n'oublions pas, ce sont les mouvements n' qui permettent de représenter les lieux de la comète, tandis que l'on n'y parvient pas du tout avec les mouvements non accélérés N; nous calculerons donc les a avec les n', n'y voyant pas d'autre issue.

TABLE VIII

Comparaison aux éléments *B*

III	α	δ
1924, Sept. 21, Yerkes	−4″.6	+3″.0
,, 23, ,,	−1 .1	+3 .8
,, 30, Berged.	−1 .5	+4 .5
Oct. 1, Pulk.	+2 .8	+6 .3
,, 2, Kopenh.	+3 .8	+13 .4
,, 5, ,,	+0 .6	+12 .0
Moyenne:	0 .0	+7 .2

V	α	δ
1924, Oct. 15, Washington	+3″.6	+9″.8
,, 17, ,,	+5 .3	+9 .3
,, 19, Greenwich	+1 .4	+8 .2
,, 20, Washington	+2 .3	+7 .9
,, 21, ,,	+1 .3	+8 .6
Moyenne:	+2 .7	+8 .8

VIII	α	δ
1928, Janv. 18, Pulkovo	+0″.8	+6″.0
,, 18, ,,	−1 .3	0 .0
,, 18, ,,	−0 .8	+3 .1
,, 20, ,,	−2 .9	+2 .5
,, 20, ,,	+5 .6	+3 .0
,, 22, ,,	+1 .2	+7 .1
,, 22, ,,	+4 .6	+1 .5
,, 22, ,,	+3 .6	+3 .9
,, 23, ,,	+7 .2	+3 .3
,, 27, Yerkes	+8 .6	+5 .0
Moyenne:	+2 .7	+3 .5

IX	α	δ
1928, Fevr. 2, Yerkes	+12″.7	+12″.2
,, 5, Kazan	+13 .3	+23 .3
,, 6, ,,	+25 .4	+17 .4
,, 6, ,,	+9 .9	+21 .1
Moyenne:	+15 .3	+16 .0

X	α	δ
1928, Mars 20, Johannesb.	+12″.8	+3″.7
,, 22, ,,	+14 .0	+2 .9
,, 25, ,,	+5 .0	−2 .1
,, 29, ,,	+6 .2	−6 .1
,, 31, ,,	+6 .3	0 .0
Avril 3, ,,	+10 .3	−1 .2
Moyenne:	+9 .1	−0 .5

XI	α	δ
1931, Juin 16, Johannesb.	−10″.1	−0″.6
,, 17, ,,	−6 .3	−9 .0
,, 18, ,,	−11 .2	−8 .5
,, 19, ,,	−10 .5	−4 .4
,, 20, ,,	−7 .0	−8 .9
,, 22, ,,	−8 .7	−14 .3
,, 23, ,,	−7 .7	−8 .6
,, 24, ,,	−4 .7	−15 .5
Moyenne:	−8 .3	−8 .7

XIII	α	δ
1931, Juillet 12, Johannesb.	0″.0	−27 .6
,, 14, ,,	+2 .5	−38 .1
,, 15, ,,	+15 .2	−34 .9
,, 16, ,,	−9 .1	−32 .6
Moyenne:	+2 .2	−33 .3

En procédant maintenant à la formation des lieux normaux, nous avons rejeté toutes les observations pour lesquelles les écarts $O-C$ s'écartaient trop de la moyene générale, en tachant d'obtenir des corrections acceptables pour ces lieux; la liste des observations retenues figure a la table VIII; cette fois-ci on a formé 7 lieux normaux, englobant 43 observations; ce sont les mêmes lieux normaux qui figurent sous les numéros III, V, VIII, IX, X, XI et XIII de la table fondamentale; nous leur conservons la même désignation. Les moyennes que l'on trouve ainsi pour tous les lieux normaux seront les termes connus des équations de condition pour une correction ultérieure de l'orbite (v. table IX). On voit que ces moyennes sont de grandeur bien modeste à comparer à celles de la table fondamentale IV.

7. Seconde correction; éléments *C*.—Que les éléments *B* ont besoin d'être corrigés, cela apparait évident si l'on se rapporte, par exemple, aux observations de Johannesbourg, qui accusent pour le lieu normal XIII une correction en δ de $-33''$, avec dispersion presque nulle. Or, cette nouvelle correction, que nous allons entreprendre, ne servirait à rien, si l'on se tenait à la valeur $37''.8$ de l'accélération acquise en première approximation. Il faut donc introduire la correction $d\varkappa$ comme septième inconnue; son coefficient différentiel s'obtient aisément en partant du coefficient de dn; on voit dans Bauschinger, p. 442, que ce coefficient se compose de deux termes, dont le premier répond à l'effet direct de dn, c. à. d. à son effet sur l'anomalie M; le second correspond à l'effet indirect de dn, c. à. d. en tant qu'il influe sur le grand axe; soient donc μ_1 et μ_2 ces deux termes, de sorte que

$$\text{Coeff. de } dn = \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

On aura alors, comme on pourra le voir à l'Appendice:

$$\text{Coeff. de } d\varkappa = (\mu + \mu_2)\frac{\tau}{1200} = (\mu_1 + 2\mu_2)\frac{\tau}{1200}.$$

On ne s'est pas contenté de calculer ce nouveau coefficient, mais on a recalculé pour la seconde approximation tous les anciens; nous obtenons ainsi le système des équations de condition pour notre nouvelle approximation; les termes connus sont naturellement les moyennes de la table VIII, celles en α étant multipliées par $\cos\delta$ (v. table IX).

TABLE IX

Equations de condition en seconde approximation

Coefficient de:	dM_0	dn	$d\varkappa$	$d\varphi$	ds	dp	dq	Termes connus
IIIα	+4.336	+ 25.54	—	−0.811	+0.132	−0.517	+0.159	+ 0″.0
Vα	+2.797	+ 48.18	—	+0.460	+0.015	−0.219	−0.131	+ 2 .7
IIIδ	−2.977	+ 2.394	—	+1.019	−0.258	−0.911	+0.281	+ 7 .2
Vδ	−3.154	− 31.34	—	+0.086	−0.108	−0.316	−0.188	+ 8 .8
VIIIα	−2.028	− 2490.0	− 2.119	−0.402	+0.182	+0.440	−0.098	+ 2 .7
IXα	−4.445	− 5408.0	− 4.568	+0.099	−0.092	+0.365	+0.085	+15 .3
Xα	−0.574	− 660.3	− 0.523	+0.818	+0.367	−0.347	−0.152	+ 8 .5
VIIIδ	−0.739	− 931.4	− 0.810	−0.665	+0.238	−0.624	+0.140	+ 3 .5
IXδ	−2.450	− 2992.0	− 2.536	−0.234	+0.010	−0 521	−0.121	+16 .0
Xδ	−0.018	+ 9.78	+ 0 036	+0.712	+0.291	+0.547	+0.240	− 0 .5
XIα	−1.044	− 2619.0	− 4.557	−2.530	−0.567	+0.257	−0.041	− 8 .2
XIIIα	+6.358	+15309.0	+25.59	−0.320	−0.611	+1.622	+0.839	+ 1 .8
XIδ	−3.090	− 7465.0	−12.52	−0.117	−0.062	+0.787	−0.126	− 8 .7
XIIIδ	−9.504	−23124.0	−39.07	−4.838	−1.415	+1.884	+0.974	−33 .3

La résolution du système normal correspondant nous fournit alors un système de corrections, que nous ajoutons immédiatement à celles de la table VI; les corrections nouvelles sont appelées $C-B$, les anciennes — $B-A$; les nouvelles orbites seront dites C; on obtient donc par sommation les corrections $C-A$ (v. table X).

TABLE X

Corrections des éléments

	$C-B$	$B-A$	$C-A$
dM_0	− 0″.35	+ 25.00 + 0.44	+ 25″.09
dn	− 0 .00674	+ 0.00047 + 0.00211	− 0 .00416
$d\varphi$	+ 2 .25	− 1.55	+ 0 .70
ds	− 3 .08	+ 1.20	− 1 .88
dp	− 5 .57	− 58.54	− 64 .11
dq	− 1 .14	+ 7.09	+ 5 .95
$d☊$	+ 7 .4	− 10.4	− 3 .0
$d\omega$	− 10 .3	+ 11.3	+ 1 .0
di	+ 5 .5	+ 58.9	+ 64 .4
$d\pi$	− 2 .9	+ 0.9	− 2 .0
$d\varkappa$	+ 4 .48	$\varkappa = +37.80$	+ 42 .28

Faisons quelques remarques au sujet de cette table. Nous constatons d'abord que le système A_{24} n'exigeait presque pas de correction pour les éléments ☊ et ω; au contraire — et ce qui est bien surprenant — il en exigeait une assez forte pour l'inclinaison. L'élément énigmatique $\varkappa$ devient encore plus grand pour les orbites C que pour les orbites B; il s'éloigne à notre étonnement encore plus de la valeur de Backlund; le moyen mouvement conserve sa valeur à 0″.004 près, ce qui est tout à fait insignifiant. Mais c'est bien ici qu'il convient de discuter une question bien grave pour ce qui va suivre: les corrections de $\varkappa$ et de N que nous venons de trouver, ont elles une valeur intrinsèque réelle? Je dis que non, et voici pourquoi: pour passer des anomalies moyennes, calculées avec les éléments B, à celles du système C, il faut appliquer une correction:

$$\delta M = -0''.35 - 0''.00674\,(t-t_0) + 4''.48\ \tau^2.$$

En calculant cette correction pour les diverses apparitions ($\tau = 0$, puis 1, puis 2) on trouve qu'elles se réduisent à:

$$-0''.4\ (1924); \qquad -3''.2\ (1928), \qquad \text{et} \qquad +1''.4\ (1931).$$

Ce n'est pas grande chose. Pour voir un peu plus clair je suppose $\delta M = 0$; c. à d., je vais calculer les lieux normaux de la table VIII comme si les éléments M, n et $\varkappa$ n'avaient besoin d'aucune correction. Les résultats sont alors ceux de la table XI; on lit dans la première colonne les écarts du système B, c. à. d. les termes connus de la table IX; dans la seconde, les résidus après substitution des corrections $C-B$ (table X); enfin, dans la troisième, les mêmes résidus, mais après substitution de $dM = dn = d\varkappa = 0$, les autres corrections $d\varphi$, ds, dp, dq gardant naturellement leurs valeurs.

TABLE XI

		(1) Ecarts $O-C$	(2) Résidus après corr. $C-B$	(3) Résidus avec $dM_0 = dn = = d\varkappa = 0$
1924	IIIα	0″.0	+1.2	− 0″.5
	Vα	+ 2 .7	+1.6	+ 0 .5
	IIIδ	+ 7 .2	−1.7	− 0 .7
	Vδ	+ 8 .8	+5.0	+ 6 .3
1928	VIIIα	+ 2 .7	−1.4	+ 6 .6
	IXα	+15 .3	−0.4	+17 .1
	Xα	+ 8 .5	+3.4	+ 5 .7
	VIIIδ	+ 3 .5	−0.4	+ 2 .5
	IXδ	+16 .0	+4.0	+13 .7
	Xδ	− 0 .5	+2.0	+ 2 .1
1931	XIα	− 8 .2	−0.4	− 2 .8
	XIIIα	+ 1 .8	+0.8	+10 .0
	XIδ	− 8 .7	+0.6	− 4 .1
	XIIIδ	−33 .3	+1.5	−14 .3

Les résidus de la colonne (3) de la table XI sont ils donc inadmissibles? Non, certes; ils correspondent plutôt à une représentation habituelle des lieux de la comète d'Encke; il n'y en a que deux qui surpassent 10″. Tout cela nous prouve qu'on pourrait trouver bien d'autres systèmes de corrections de dM, dn et $d\varkappa$ qui représenteraient presqu'aussi bien les observations; sous ce rapport nos systèmes B et C sont à peu près équivalents. Cela prouve enfin que les éléments M, n et $\varkappa$ ne peuvent être séparés dans une étude de trois apparitions de la comète, que les valeurs obtenues pour eux ne sont que des résultats de calcul formel et qu'il faut attendre au moins l'apparition de 1934 pour pouvoir juger de leur réalité.

Quoiqu'il en soit, nous ne pouvons que former pour le moment les systèmes C par application des corrections $C-B$ aux éléments B; on passera de N à n' et de T à T', comme il a été expliqué plus haut (v. table XII).

TABLE XII

Orbites C

	C_{24}	C_{28}	C_{31}
T	1924, Oct. 31.9350	1928, Fevr. 19.8787	1931, Juin 3.2730
T'	— — —	19.8385	3.1145
φ	57°48′22″.0	58° 9′28″.4	58°11′19″.5
☊	334 37 10 .7	334 34 35 .1	334 37 35 .1
ω	184 43 57 .8	184 56 2 .2	184 54 57 .8
i	12 31 20 .1	12 32 57 .8	12 33 46 .5
Equin.	1924.0	1928.0	1931.0
N	1073″.92254	1079″.78052	1080″.40387
n'	1073 .92319	1079 .85192	1080 .54573

$M = 0°0'0''.0$ pour $t = T'$ (périhélies accélérés)

$\varkappa = 42''$, 28. Epoque de l'accélération: 1924, Oct. 20.92

8. **Comparaisons finales.**—Pour apprécier la qualité des éléments C on les a comparé directement à 43 observations, qui forment les 7 lieux normaux de la table VIII. Les écarts sont réellement insignifiants, et les moyennes semblent indiquer qu'il est impossible d'obtenir une représentation meilleure pour ces trois apparitions (v. table XIII).

TABLE XIII

Comparaison aux éléments C.

	α	δ
III 1924, Sept. 21	−1″.6	−6″.2
23	+0 .2	−4 .9
30	−2 .4	−2 .7
Oct. 1	+2 .0	−2 .4
2	+0 .8	+6 .3
5	−1 .8	+5 .4
VIII 1928, Janv. 18	−0″.5	+3″.8
18	−2 .7	−2 .2
18	−1 .6	+0 .8
20	−4 .9	0 .0
20	+4 .0	+0 .2
22	−1 .3	+3 .7
22	+2 .3	−1 .8
22	+0 .3	+0 .6
23	+4 .0	0 .0
27	+3 .4	+0 .1
XI 1931, Juin 16	−3″.4	+7″.1
17	−0 .1	−0 .8
18	−3 .6	+0 .8
19	−0 .7	+4 .3
20	−0 .2	−4 .1
22	+1 .0	−3 .3
23	+3 .8	+2 .9
24	+4 .7	−2 .8

	α	δ
V 1924, Oct. 15	+ 1″.6	+5″.3
17	+ 3 .4	+5 .4
19	− 0 .6	+4 .7
20	0 .0	+5 .3
21	− 0 .2	+5 .7
IX 1928, Fevr. 2	+ 1″.7	+3″.2
5	− 1 .8	+0 .9
6	+ 7 .6	+1 .3
6	− 3 .3	+7 .7
X 1928, Mars 20	+ 5″.4	+5″.6
22	+ 7 .2	+5 .0
25	− 1 .9	+0 .4
29	− 0 .3	−3 .7
31	+ 0 .1	+2 .6
Avril. 3	+ 4 .2	+1 .5
XIII 1931, Juill. 12	+ 4″.9	+3″.8
14	+ 0 .3	−2 .6
15	+12 .5	−0 .1
16	−12 .6	−1 .0

On peut donc procéder à la préparation d'une éphéméride pour 1934; mais on ne devra pas en attendre une grande précision, vu l'incertitude qui reste encore sur les éléments M_0, N et $\varkappa$, comme il a été expliqué plus haut.

9. L'Éphéméride pour 1934. — Les perturbations par Jupiter ont été très faibles pendant la révolution 1931—1934, le Δ^2 variant entre 25 et 90; nous n'avons pas fait d'osculation intermédiaire. Aux perturbations par Jupiter nous joignons celles par les autres planètes, telles qu'elles nous furent communiquées par M. Matkiewicz (v. table XIV).

TABLE XIV

Période 1931—1934

	Jupiter	Autres planètes	Somme des perturb.	Précession
$\delta\varphi$	$-$ 15″.8	$+$22″.7	$+$ 6″.9	
$\delta\Omega$	$-$ 47 .1	$-$ 9 .9	$-$ 57 .0	$+$152″.9
$\delta\omega$	$+$106 .1	$+$15 .7	$+$121 .8	$-$ 2 .2
δi	$-$ 20 .0	$+$ 7 .0	$-$ 13 .0	$+$ 1 .3
δn	$-$ 0 .10009	$-$ 0 .06883	$-$ 0 .16892	
δM	$-$729 .5	$-$87 .6	$-$817 .1	

La durée de la période (non accélérée) sera donc:

$$(360^\circ + 817''.1) : N_{1931} = 1200.3077 \text{ jours}.$$

Il reste à calculer l'effet de l'accélération sur le moyen mouvement N et la période T; pour l'époque du périhélie (1934, Sept. 15), on a $\tau = 3.0132$, ce qui nous donne:

$$\delta_1 n = \frac{42''.28}{600}\tau = +0''.21232$$

$$\delta_1 T = -\frac{42{,}28 \cdot \tau^2}{N_{34}} = -0.3554 \text{ jour}.$$

En appliquant ces diverses corrections aux éléments de l'orbite C_{1931}, nous obtenons pour l'apparition de 1934 les éléments suivants (table XV):

TABLE XV

Orbite C_{1934}

T 1934, Sept. 15.5807 T. U.
T' 15.2253 T. U.
φ 58°11′26″.4
Ω 334 39 11 .0
ω 184 56 57 .4 } 1934.0
i 12 33 34 .8
N 1080″.23495
n' 1080 .44727
$M = 0°0'0''.0$ pour $t = T'$
$\varkappa = +42''.28$
Époque de l'accéleration:
1924 Oct. 20.92

$e = 0.8198068$
$e^{(0)} = 48°.690343$

$x = [0.323472] \sin (E + 259°13'\ 3''.6) + 1.758150$
$y = [0.056803] \sin (E + 140\ 23\ \ 4\ .4) - 0.617580$
$z = [9.850784] \sin (E + 157\ 37\ 15\ .7) - 0.229468$

Ce sont ces éléments mêmes que nous avons publiés au „Poulkovo Observatory Circular", № 10 (Appendix), avec l'éphémeride qui en résultait.

10. L'apparition de 1934; correction empirique de l'anomalie. — Lors de sa dernière apparition en été 1934 la comète semble avoir été fort peu observée. Nous ne possédons, à l'heure de terminer notre travail, qu'une observation à Yerkes, trois — à Lick, quatre — à Kazan et 30 — à Athènes.

Dès la découverte de la comète à Yerkes le 8 Juillet, il fut évident que notre éphéméride aura besoin de fortes corrections. Il était naturel de chercher à réduire les écarts (qui s'élevèrent à $-4'$ en α et $+2'$ en δ vers le 20 Août) par une correction empirique de M. Cette correction se détermina aisément: en prenant $\delta M = -1'$ on parvient à représenter les observations de 1934 avec une précision satisfaisante. On peut s'en assurer par la table suivante, qui contient la comparaison de 8 observations avec notre éphéméride, puis avec la meme éphéméride après correction de M (v. table XVI).

TABLE XVI

Observations de 1934

1934		Observ. – Ephem. $\Delta\alpha$	Observ. – Ephem. $\Delta\delta$	Après corr. $\Delta M = -60''$ $\Delta\alpha$	Après corr. $\Delta M = -60''$ $\Delta\delta$
Yerkes, Juill.	8.35	$-$1′35″.0	$-$0′13″.3	$+$ 7″.7	$+$6″.2
Lick „	11.44	$-$1 36 .7	$-$0 19 .0	$+$14 .4	$-$0 .4
Kazan, Août	9.95	$-$3 44 .5	$+$0 33 .6	$-$ 2 .8	$+$2 .3
„ „	13.95	$-$3 47 .0	$+$0 56 .9	$+$ 8 .8	$+$9 .6
„ „	17.97	$-$4 0 .2	$+$1 11 .1	$+$ 6 .5	$+$4 .9
Athènes „	28.11	$-$4 13 .7	$+$1 57 .8	$+$ 7 .3	$-$3 .7
„ „	29.10	$-$4 18 .4	$+$2 6 .9	$+$ 3 .1	$+$1 .6

La diminution des écarts est frappante, et l'on voit que cette correction de $-60''$ (ou à peu près) s'impose. Mais il est évident qu'on ne pourrait l'atteindre sans bouleverser profondément les valeurs de M_0, dn et $d\varkappa$, tirées des trois apparitions précédentes. Pour voir ce qu'il en est, cherchons les valeurs grossièrement approchées des corrections dM_0. dM et $d\varkappa$, — celles de l'anomalie de l'époque, du moyen mouvement pour une période (1200 jours) et de l'accélération, — qu'il faudrait introduire pour obtenir en 1934 une correction de $-60''$ en anomalie, sans déranger celles de 1924, 1928 et 1931.

Pour obtenir ces corrections, on n'a que à écrire les quatre équations de condition:

$$\begin{aligned} &\delta M_0 &&= 0 \quad &&(\text{pour } 1924)\\ &\delta M_0 + \delta\mu + \delta\varkappa &&= 0 &&(\;\text{»}\; 1928)\\ &\delta M_0 + 2\,\delta\mu + 4\,\delta\varkappa &&= 0 &&(\;\text{»}\; 1931)\\ &\delta M_0 + 3\,\delta\mu + 9\,\delta\varkappa &&= -60'' &&(\;\text{»}\; 1934). \end{aligned}$$

La résolution par moindres carrés donne:

$$\delta M_0 = -3''.0; \qquad \delta\mu = +27''.0, \qquad \delta\varkappa = -15''.0$$

ou bien, en divisant $\delta\mu$ par 1200:

$$\delta M = -3''.0 + 0''.0225\,(t - t_0) - 15{,}0 \cdot \tau^2.$$

Ce résultat, d'une importance capitale, nous apprend que nos orbites B ou C, obtenues par combinaison des révolutions 1924/1928 et 1928/1931, devront subir de très fortes modifications pour être adaptées à la période 1931/1934; en particulier, on voit avec satisfaction que la vraie valeur de l'accélération sera beaucoup moindre que la valeur de 42″ obtenue pour les orbites C. Naturellement, ces conclusions ne sont que provisoires; pour arriver à une solution plus satisfaisante, nous allons tenter maintenant à représenter les apparitions de 1924, 1928, 1931 et 1934 par un système d'éléments unique.

11. L e s o r b i t e s D; c o n c l u s i o n s.—Les observations de 1934, dont nous disposons pour le moment, sont, comme nous l'avons déjà dit, celles de Lick, Yerkes, Athènes et Kazan.

Nous en formons trois lieux normaux:

Lieu normal	Date	$O-C$ $\Delta\alpha\cos\delta$	$O-C$ $\Delta\delta$	Nombre des observations
XIV	1934, Juillet 11.44	— 85″.3	—17″.7	3;3
XV	1934, Août 14.09	—188 .4	+50 .4	16;19
XVI	1934, » 25.11	—225 .3	+98 .6	17;16

Tout d'abord, on a cherché à combiner ces trois lieux normaux avec les lieux anciens:

III et V (1924); VIII, IX, X (1928); XI, XIII (1931).

Ceci nous donnait en tout dix lieux normaux, soit 20 équations de condition pour nos sept inconnues. Les résultats de ce calcul, dont nous ommettons les détails, ont été déplorables; malgré de maintes tentatives (par exemple, en prenant pour base les orbites B au lieu de C), nous n'avons jamais réussi à représenter tous ces lieux normaux avec des résidus tolérables; ces résidus s'élevaient pour certains lieux normaux, notamment les plus éloignés des périhélies correspondants, à 30″ et 50″; de cette façon on s'est heurté à la même difficulté que B a c k l u n d a déjà signalée; il n'est presque jamais possible de représenter tous les lieux normaux d'une seule apparition d'une manière satisfaisante: il semble que les observations de la comète, faites à une certaine distance du Soleil, sont entachées d'erreurs systématiques; il convient de ne s'appuyer dans ces recherches que sur les lieux normaux les moins éloignés des périhélies.[1] Nous fûmes donc conduits à ne garder que 6 lieux normaux en tout, à savoir les lieux III et V en 1924; X en 1928; XI en 1931; XV et XVI en 1934. Le système des équations conditionelles était alors celui de la table XVII. Cette fois-ci la solution fut beaucoup plus satisfaisante; en examinant la dernière colonne de cette table, on voit que la représentation des lieux normaux, auxquels nous nous sommes bornés, est excellente; les résidus ne dépassent pas 4″.0, et les écarts très grands pour 1934 ont disparu.

TABLE XVII

Équations de condition

Lieu normal	dM_0	dn	$d\varkappa$	$d\varphi$	ds	$d\rho$	dq	$O-C$	Résidus
IIIα	+4.3356	+ 25.535	0	−0.8109	+0.1315	−0,5166	+0.1594	− 0″.45	−1″.40
Vα	+2.7970	+ 48.185	0	+0.4597	+0.0151	−0.2189	−0.1306	+ 0 .84	+3 .08
IIIδ	−2.9773	+ 2.3944	0	+1.0187	−0.2580	−0.9110	+0.2810	− 0 .75	+0 .23
Vδ	−3.1535	− 31.338	0	+0.0862	−0 1080	−0.3158	−0.1884	+ 5 .28	+0 .51
Xα	−0.5745	− 660.33	− 0.5226	+0.8178	+0.3669	−0 3474	−0.1524	+ 2 .79	+2 .63
Xδ	−0.0177	+ 9.7840	+ 0.0364	+0 7121	+0.2912	+0.5466	+0 2398	+ 1 .90	+2 .01
XIα	−1.0440	− 2618.6	− 4.5570	−2.5304	−0.5666	+0.2567	−0.0412	+ 0 .19	+2 ,51
XIδ	−3.0895	− 7464.8	−12.5250	−0 1172	−0.0625	+0.7872	−0.1262	+ 0 .51	−1 .13
XVα	+3.3935	+12221.6	+30.5661	−1.4465	+0.3964	−0.1374	+0 0439	−188 .40	+0 .64
XVIα	+3.8788	+13991.0	+35.0462	−1.0495	+0 2753	−0.2040	+0.0046	−225 .30	−1 .97
XVδ	−0.7959	− 2868.9	− 7.1806	+0.2862	−0.0737	−0.5812	+0.1855	+ 50 .40	+3 .00
XVIδ	−1.7238	− 6218.4	−15.5779	+0.4520	−0.1185	−0.4563	+0.0103	+ 98 .60	−3 .99

Mais ce résultat, remarquable en lui-même, n'est atteint qu'au prix de très fortes corrections aux éléments; voici les valeurs de ces corrections:

dM_0	$-\ 1''.78$	ds	$+25''.53$	$d\Omega$	$+34''.8$
dn	$+\ 0.03258$	dp	$-\ 5.94$	$d\omega$	$-\ 8.5$
$d\varkappa$	$-\ 19.51$	dq	$-\ 7.08$	di	$+\ 5.3$

Le fait le plus frappant c'est incostestablement une diminution très prononcée de l'accélération; nous avions 42″.28 pour les orbites C; nous revenons maintenant avec notre correction à la valeur

$$\varkappa = 22''.77,$$

[1] B a c k l u n d, Vergleichung etc. Mem. Acad. de Pétersb., XVI. № 3, p. 18

c. à d. que nous retrouvons pratiquement la même valeur que **Backlund** avait fixé pour l'intervalle 1904—1914 (notamment 22″.5). Ceci pose devant nous un problème de beaucoup plus étendu que celui qui fut l'objet de ce travail: il convient de rechercher si les dix apparitions de la comète qui eurent lieu entre 1904 et 1934 peuvent être représentées avec un seul et même système d'éléments. Mais nous nous garderons d'aborder ce problème pour le moment; nous nous contenterons de donner ici les systèmes définitifs, auxquels nous sommes parvenus et qui seront appelés „systèmes D". Par application aux systèmes C des corrections que nous venons d'écrire, on obtient les éléments suivants de ces systèmes nouveaux (table XVIII):

TABLE XVIII

Orbites D

	D_{24}	D_{28}	D_{31}	D_{34}
T	1924, Oct. 31.9363	1928, Fevr. 19.8436	1931, Iuin. 3.2018	1934, Sept. 15.4778
T'	31.9363	19.8220	3.1163	15.2863
φ	57°48′18″.9	58° 9′25″.3	58°11′16″.4	58°11′23″.3
☊	334 37 45 .5	334 35 9 .9	334 38 9 .9	334 39 45 .8
ω	184 43 49 .3	184 55 53 .7	184 54 49 .3	184 56 48 .9
i	12 31 25 .4	12 33 3 .1	12 33 51 .8	12 33 40 .1
Equin.	1924.0	1928.0	1931.0	1934.0
N	1073″.95512	1079″.81310	1080″.43645	1080″.26753
n'	1073 .95547	1079 .85159	1080 .51287	1080 .38190

$M = 0°0'0''.0$ pour $t = T'$.

$\varkappa = 22''.77$

Epoque de l'accélération: 1924, Oct. 20.92.

Rappelons pour terminer que nous avons obtenu ces systèmes en partant de celui qui nous fut communiqué par M. **Matkiewicz** pour 1924. Quelles sont donc les corrections définitives à apporter aux éléments de ce système? Nous les obtenons immédiatement en combinant les corrections $C—A$ (table X) avec celles que nous avons obtenues en dernier lieu et que nous nommerons $D—C$; les corrections $D—A$, fruit de tout ce travail, figurent à la table XIX:

TABLE XIX

Corrections des éléments primitifs A_{24}

	$C-A$	$D-C$	$D-A$	
dM_0	+25″.09	— 1″.78	+23″.31	(1924, Oct 20.92)
dn	— 0 .00416	+ 0 .03258	+ 0 .02842	
$d\varphi$	+ 0 .70	— 3 .13	— 2 .43	
d☊	— 3 .0	+34 .8	+31 .8	
$d\omega$	+ 1 .0	— 8 .5	— 7 .5	
$d\pi$	— 2 .0	+26 .3	+24 .3	
di	+64 .4	+ 5 .3	+69 .7	
$d\varkappa$	+20 .09	—19 .51	+ 0 .58	

Correction de T en 1924 — 0,0217 jour.

Comme nous l'avons déjà remarqué, c'est l'incertitude des éléments ☊ et i qui est la plus étonnante; on pourrait s'attendre à voir ces éléments beaucoup mieux déterminés par l'étude du mouvement de la comète depuis 1818. Ce fait pourrait donner lieu à des remarques intéressantes; mais nous n'y insistons pas pour le moment.

Il convient de formuler, en terminant ce travail, les conclusions auxquelles il donne lieu: 1) il est de toute évidence qu'on ne peut représenter le mouvement de la comète d'Encke sans introduire dans l'anomalie moyenne un terme proportionnel à t^2; 2) le coefficient de ce terme, dit l'„accélération", ne peut être déterminé par combinaison de deux révolutions de la comète, il s'y sépare mal du moyen mouvement; 3) la valeur la plus probable de ce coefficient pour les quatre dernières apparitions parait être égale à 23″ environ, c. à. d. identique à celle pour 1904—1914, comme elle résulte des recherches de **Backlund**; cet élément ne semble donc pas avoir changé par un saut brusque pendant les trente dernières années. — Pour s'en convaincre définitivement il est indispensable de comparer toutes les apparitions de la comète depuis 1904 à notre système D; et pour effectuer cette comparaison on n'aura qu'à former les lieux normaux avec les observations les moins éloignées des périhélies.

APPENDICE.

I. **Sur le calcul des perturbations.** — Avec les tables de **Crommelin**, dont nous nous sommes servis dans ce travail, ce n'est que le calcul des composantes de la force perturbatrice S, T, W qui est d'une certaine longueur. — Pour le rendre aussi court et simple que possible il semble utile de rapporter la comète et Jupiter à un système d'axes **fixes**, dont celui des X sera dirigé vers le périhélie de la comète, celui des Y dans le plan de son orbite, vers $v = 90°$, enfin celui des Z sera pris perpendiculaire à ce plan.

On aura alors pour la comète:

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v$$

et pour Jupiter:

$$x' = a'r'\sin(l' + A')$$
$$y' = b'r'\sin(l' + B')$$
$$z' = c'r'\sin(l' + C'),$$

l' étant la longitude de Jupiter dans son orbite et r' — son rayon vecteur; ces deux quantités pourront être prises dans les tables de C o m r i e; la longitude sera réduite à l'orbite. Tout revient donc au calcul des constantes de Gauss a', b', c', A', B', C', qui dépendent des éléments du plan de l'orbite de la comète et qu'on devra changer à chaque osculation.

Pour donner à ce calcul une forme simple, partons du triangle formé par l'écliptique et les deux orbites; soit I l'angle de leur inclinaison mutuelle et N et N' les distances de leur noeud commun à l'écliptique, comptées à partir des noeuds ascendants ☊ et ☊'; posons alors, en rapportant tous les éléments à l'équinoxe de 1950:

$$\omega' = \omega_{1950} - N; \qquad ☊'' = -(☊' + N') \qquad (1)$$

Si l'on prend pour Jupiter

$$☊' = 99°.9016; \qquad i' = 1°.3064 \text{ (équin. 1950)}$$

et pour le plan de la comète les valeurs rondes:

$$\left.\begin{aligned} ☊ &= 334°56'00''.0 \\ i &= \ \ 12\ 32\ \ 0\ \ .0 \end{aligned}\right\} 1950.0$$

on aura pour le calcul des angles I, ω' et ☊'' les formules différentielles très commodes:

$$\begin{aligned} I &= \ \ 13°.3244 + [8_n.6890]\,\delta☊ + [0.\,4423]\,\delta i \\ \omega' &= 184\ .6498 + [9.\,2427]\,\delta☊ + [9_n.9781]\,\delta i + \omega_{1950} \qquad (2) \\ ☊'' &= 209\ .5989 + [0_n.4161]\,\delta☊ + [9_n.9900]\,\delta i. \end{aligned}$$

Dans ces formules $\delta☊$ et δi désignent les variations des éléments respectifs à partir des valeurs rondes ci dessus, exprimées en secondes d'arc; mais les corrections aux valeurs de I etc. seront obtenues en 0°.0001

S'il s'agit d'un calcul de perturbations, on obtiendra les valeurs de ces trois angles au commencement de la période, et puis on leur apportera à chaque osculation les corrections différentielles:

$$\begin{aligned} dI &= [8_n\,6890]\,d☊ + [0.\ 4423]\,di \\ d\omega' &= [9.\ 2427]\,d☊ + [9_n\,9781]\,di + d\omega \\ d☊'' &= [0_n\,4161]\,d☊ + [9_n\,9900]\,di, \end{aligned}$$

en appelant $d☊$, di et $d\omega$ les perturbations de ces éléments entre deux osculations consécutives.

Les angles I, ω' et ☊'' étant déterminés, on trouvera les constantes de Gauss pour Jupiter à l'aide des formules suivantes:

$$\begin{array}{lll} a' \sin A = \cos \omega'; & b' \sin B = -\sin \omega'; & c' = \sin I \\ a' \cos A = \sin \omega' \cos I; & b' \cos B = \cos \omega' \cos I; & C' = ☊'' \qquad (3) \\ A' = A + ☊''; & B' = B + ☊''; & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 2. \end{array}$$

E x e m p l e 1. On donne les éléments de la comète:

$$\left.\begin{array}{ll} ☊ & 334°59'19''.0 \\ \omega & 184\ 43\ 38\ .0 \\ i & \ \ 12\ 30\ 27\ .3 \end{array}\right\} 1950.0.$$

Alors, appliquant les formules (2) avec

$$\delta☊ = +199''.0; \qquad \delta i = -92''.7$$

on trouve d'abord:

$$I = 13°.2977; \qquad \omega' = 9°.3893; \qquad ☊'' = 209°.5561;$$

les formules (3) donneront alors les constantes de Gauss, et on aura pour les coordonnées de Jupiter les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} x' &= [9.99969]\,r' \sin(l' + 290°.414) \\ y' &= [9.98852]\,r' \sin(l' + 199\ .913) \\ z' &= [9.36175]\,r' \sin(l' + 209\ .556). \end{aligned}$$

R e m a r q u e s. 1. La précession des éléments de la comète de 1925 à 1950 est:

$$\Delta☊ = +21'14''.3; \qquad \Delta\omega = -18''.2 \qquad \Delta i = +11''.1.$$

2. Avec les notations de B a c k l u n d on a:

$$\begin{array}{ll} \Phi = N + 180°; & \psi + ☊' = 180° - ☊'' \\ \Phi' = N' + 180; & \Pi = 180 + \omega'. \end{array}$$

Supposons donc les coordonnées de Jupiter obtenues pour une époque, qui correspond à une valeur ronde de M de la comète, telle que 0°, 7½°, 15° etc. (voir les tables de Crommelin). Pour avoir les coordonnées de la comète pour les mêmes valeurs de son anomalie moyenne, nous avons dressé une table des quantités:

$$\frac{x}{a}, \quad \frac{y}{a}, \quad v, \quad \lg\frac{r}{a}$$

avec l'excentricité e comme argument ($e = 0.84$; 0.85 et 0.86). En interpolant dans cette table pour la valeur donnée de l'excentricité, et en multipliant les deux premières quantités par le grand axe, on aura les deux coordonnées de la comète (z étant égal à 0) pour les mêmes moments.

En posant alors

$$\Delta^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z'^2$$

on calcule les projections de la force perturbatrice sur les axes introduits plus haut (en mettant à part le facteur k^2m'):

$$\begin{aligned} X &= \frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \\ Y &= \frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \qquad\qquad (4) \\ Z &= \frac{z' - z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r'^3}. \end{aligned}$$

Le facteur $1:r'^3$ sera pris dans les tables de Comrie pour les moments correspondants.

Mais, pour appliquer les tables de Crommelin nous avons besoin des projections de la force perturbatrice sur le rayon vecteur de la comète (S), sur la transversale (T) et la perpendiculaire au plan de l'orbite (W); or pour passer des projections X, Y à S et T on n'aura qu'à faire tourner les axes des X et Y de l'angle v, c. à. d. de l'anomalie vraie de la comète dont on a déjà trouvé la valeur dans la table des coordonnées x/a et y/a. Si donc on pose:

$$Y = F\sin\theta; \qquad X = F\cos\theta$$

on aura

$$S_0 = F\cos(\theta - v); \quad T_0 = F\sin(\theta - v); \quad W_0 = Z$$

ou bien, pour la machine à calculer:

$$\begin{aligned} S_0 &= X\cos v + Y\sin v \\ T_0 &= -X\sin v + Y\cos v \\ S_0^2 + T_0^2 &\doteq X^2 + Y^2. \end{aligned}$$

D'après la disposition des tables de Crommelin ces composantes doivent être encore multipliées par a^2, ce qui nous donne définitivement:

$$\begin{aligned} S &= Xa^2\cos v + Ya^2\sin v \\ T &= -Xa^2\sin v + Ya^2\cos v \qquad\qquad (5) \\ W &= Za^2. \end{aligned}$$

Exemple 2. Nous donnons à titre d'exemple le calcul complet des composantes S, T, W pour $M = 97½°$ (période 1924—1928). Les données fondamentales sont:

$$n = 1073''.927; \qquad e = 0.84625.$$

On trouve pour cette valeur de M dans la table des coordonnées:

$$\frac{x}{a} = -1.5280; \qquad \frac{y}{a} = +0.3898$$

$$v = 165°.688; \qquad \sin v = 0.24720; \qquad \cos v = -0.96896;$$

puis avec la valeur de n, dans une table spéciale:

$$a = 2.21830; \qquad a^2 = 4.9208.$$

Les constantes de Gauss pour Jupiter sont précisément celles qu'on a trouvées dans l'exemple 1. Le calcul des composantes se présente alors sous la forme du schéma suivant (table XX), dont l'usage nous a paru commode et sûr. Les nombres qui y sont précédés d'un * sont pris dans les tables de Comrie; il n'y a des logarithmes que sur la 2-me et 3-me lignes; les nombres sur la 10-me sont: $a^2\cos v$, $a^2\sin v$ et a^2; la première colonne ne renferme que des quantités qui se rapportent à la première coordonnée et ainsi de suite; on a S, T, W sur la ligne 11.

TABLE XX

Calcul des composantes S, T, et W

1	M	97°·5	$l' + A'$	224°.732	134°.231	143°.874
2	$I{\cdot}D$	2424417,296	sin	9_n 84745	9.85523	9 99369
3	T. U.	1925 Sept. 23.296	$a'r'$	0.71145	0.70028	0.07351
4*	r'^{-3}	0.0073234	x'	− 3.6216	+ 3.5934	+ 0.6983
5*	$\lg r'$	0.71176	x	− 3.3894	+ 0.8647	0.0000
6	Δ^{-3}	0.0442996	$x' - x$	− 0.2322	+ 2 7287	+ 0.6983
7	Δ^2	7.9873	$(x' - x) : \Delta^3$	− 0.010286	+ 0.120880	+ 0.030934
8*	L'	294°.3142	$x' : r'^3$	− 0.026522	+ 0.026316	+ 0 005114
9	*Red.*	+ 35	X	+ 0.016236	+ 0.094564	+ 0.025820
10	l'	294.318	$a^2 \cos v$	− 4.7681	+ 1.2164	+ 4.9208
11	v	165.688	$S,\ T,\ W$	+ 0.037616	− 0 47064	+ 0.12706

Après avoir déterminé les composantes S, T et W pour tous les moments, on procède au calcul des perturbations à l'aide des facteurs I, II, ..., etc. de Crommelin; nous ne nous arrêterons pas sur certains détails qui pourraient en faciliter l'application; rappelons seulement que nous avons du étendre les tables de ces coefficients pour les valeurs $e = 0.85$ et $e = 0.86$; c'est indispensable pour pouvoir les interpoler dans le cas de la comète d'Encke.

II. **Calcul de la période.** — Supposons que pendant une révolution de la comète on ait osculé aux valeurs rondes (non perturbées) de l'anomalie moyenne M_1, M_2, ... M_{i-1}, M_i, ..; soient t_1, t_2, ... les moments (non perturbés) qui correspondent à ces anomalies; δM_1, δM_2, ..—les perturbations de l'anomalie pour chacune de ces divisions; enfin, soient n_1, n_2, ... les moyens mouvements perturbés pour les mêmes époques; alors on aura pour la durée réelle que la comète a mis pour parcourir ces différentes parties de son orbite:

$$\theta_i = \frac{M_i - M_{i-1} - \delta M_i}{n_{i-1}}. \tag{6}$$

On devra donc appliquer à chaque moment t_i, ou l'on fait osculation, une correction:

$$\delta t_i = -\frac{\delta M_i}{n_{i-1}}. \tag{7}$$

Enfin, la durée de la révolution entière sera:

$$\theta = \Sigma\, \theta_i. \tag{8}$$

C'est cette formule que nous avons appliquée au calcul de la période (v. tables I et II), mais elle est susceptible d'une transformation utile. Supposons, pour simplifier, qu'il n'y a eu qu'une seule osculation intermédiaire entre les deux périhélies, de sorte que les trois anomalies d'osculation sont 0°, M_1 et 360°; si l'on appelle δM_1 et δM_2 — les perturbations, n_0 et n_1—les mouvements de départ, on aura:

$$n_1 = n_0 + \delta n_1$$

$$\theta_1 = \frac{M_1 - \delta M_1}{n_0}; \qquad \theta_2 = \frac{360° - M_1 - \delta M_2}{n_0 + \delta n_1}.$$

Mais il vient, en rejetant les puissances de δn_1 supérieures à la première:

$$\theta_2 = \frac{360° - M_1 - \delta M_2}{n_0} - \frac{\delta n_1}{n_0}\,\frac{360° - M_1 - \delta M_2}{n_0} =$$

$$= \frac{360° - M_1 - \delta M_2}{n_0} - \frac{\theta_2 \delta n_1}{n_0},$$

d'où

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{360° - (\delta M_1 + \delta M_2 + \theta_2 \delta n_1)}{n_0}.$$

En généralisant cette formule, on posera:

$$\begin{aligned} \delta M_1{}^* &= \delta M_1 + \delta n_1 (\theta - \theta_1) \\ \delta M_2{}^* &= \delta M_2 + \delta n_2 (\theta - \theta_1 - \theta_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta M_k{}^* &= \delta M_k, \end{aligned}$$

c. à d. qu'on ajoutera à chaque perturbation de l'anomalie le produit de la perturbation en moyen mouvement par le nombre de jours qui restent de l'osculation en question jusqu'à la fin de la période entière (ces produits étaient dits „termes rectangles" par Backlund). On aura alors, conformément à la formule précédente, pour la durée de la révolution entière:

$$\theta = \frac{360° - \Sigma\, \delta M^*}{n_0}, \tag{9}$$

n_0 **étant le moyen mouvement non perturbé au périhélie de départ.** Dans le calcul des périodes 1924—1928 et 1928—1931 nous nous sommes servis de (9) pour le contrôle de la durée de la révolution perturbée (v. tables I et II). Il est évident que quand il n'y a pas d'osculation intermédiaire, les formules (8) et (9) coïncident.

Avec la comète d'Encke il faut encore tenir compte de l'accélération pour le contrôle de la période. Soient T_1' et T_2' deux périhélies „accélérés", N_1 le moyen mouvement non accéléré pour le périhélie de départ, δM^* la perturbation complète en anomalie, y compris les termes rectangles, τ_2 et τ_1 les intervalles, comptés en unités de 1200 jours depuis l'époque de l'accélération t_0 jusqu'à nos deux périhélies; on aura alors la formule de contrôle:

$$360^\circ = N_1 (T_2' - T_1') + \delta M^* + \varkappa (\tau_2^2 - \tau_1^2). \tag{10}$$

Exemple 3. Appliquer la formule (10) au contrôle de la période 1928 — 1931. On a ici, par la table (II) $\delta M^* = +917''.8$; on trouve alors avec les données de la table XII:

TABLE XXI

Contrôle de la période

τ_2	2.0125	T_2' *J.D.*	2426496.1145
τ_1	1.0133	T_1'	2425296.8385
τ_2^2	4.0502	Différence	1199.2760
τ_1^2	1.0268	N	1079″.78052
Différence	3.0234	Produit	1294954″.8
$\varkappa$	42.28	Accélération	+ 127.8
Produit	127″.80	δM^*	+ 917.8
		Somme	1296000.4
		Erreur	0.4

III. Le coefficient différentiel pour l'accélération. — Supposons qu'on ait apporté à l'anomalie moyenne de l'époque, au moyen mouvement et au coefficient de l'accélération des corrections, que nous désignerons par dM_0, dn_0 et $d\varkappa$; il en résultera, pour un moment éloigné de t jours de l'époque, des corrections suivantes pour l'anomalie et le mouvement:

$$dM = dM_0 + t\, dn_0 + \tau^2 d\varkappa$$

$$dn = dn_0 + \frac{\tau}{600} d\varkappa.$$

Supposons de plus qu'on ait calculé pour le moment t les dérivées de $\cos\delta \cdot d\alpha$ et de $d\delta$ par rapport à dM_0 et dn_0, ces dernières étant prises à t constant, c. à d. en ne faisant varier avec n que le grand axe a. Posons:

$$\frac{d\delta}{dM_0} = q; \qquad \frac{d\delta}{dn_0} = p$$

$$\cos\delta \frac{d\alpha}{dM_0} = q'; \qquad \cos\delta \frac{d\alpha}{dn_0} = p'.$$

On aura alors pour la d fférentielle de δ pour le moment t:

$$d\delta = q\,(dM_0 + t\, dn_0 + \tau^2 d\varkappa) + p\left(dn_0 + \frac{\tau}{600} d\varkappa\right),$$

ce qui peut s'écrire:

$$d\delta = q\, dM_0 + (qt + p)\, dn_0 + (qt + 2p)\frac{\tau}{1200} d\varkappa.$$

Il vient ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dn_0} &= qt + p \\ \frac{d\delta}{d\varkappa} &= \left(\frac{d\delta}{dn_0} + p\right)\frac{\tau}{1200} \end{aligned} \tag{11}$$

et d'une manière analogue:

$$\cos\delta \frac{d\alpha}{d\varkappa} = \left(\cos\delta \frac{a\alpha}{dn_0} + p'\right)\frac{\tau}{1200}. \tag{12}$$

Mais on remarque immédiatement que p et p' ne sont autre chose que les seconds termes des coefficients différentiels $\frac{d\delta}{dn_0}$ et $\cos\delta \frac{d\alpha}{dn_0}$, je veux dire les termes qui ne dépendent pas de $(t - t_0)$ dans les formules de Bauschinger ou autres; l'application des formules (11) et (12) est donc bien simple.

Pour le calcul des termes p et p', Backlund se servait d'autres formules un peu plus compliquées; il posait:

$$\beta_1 = - x \sin\alpha; \qquad \beta_2 = + y \cos\alpha$$

$$\beta_3 = - x \sin\alpha \sin\delta; \qquad \beta_4 = - y \sin\alpha \sin\delta; \qquad \beta_5 = z \cos\delta$$

$$\gamma = -\frac{2}{3n}\frac{1}{\sin 1''},$$

ce qui lui donnait:

$$p' = \frac{\gamma}{\rho}(\beta_1 + \beta_2); \qquad p = \frac{\gamma}{\rho}(\beta_3 + \beta_4 + \beta_5), \tag{13}$$

ρ désignant la distance de la comète à la Terre et x, y, z — ses coordonnées équatoriales.

On obtient aisément ces formules en partant des expressions:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y+Y}{x+X}; \qquad \operatorname{tg} \delta = \frac{z+Z}{\sqrt{(x+X)^2+(y+Y)^2}};$$

on les différentie par rapport à a en remarquant que

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} \cdots$$

Pour faire une comparaison numérique de ces formules avec celles qui ont été appliquées au cours de mes calculs, j'ai choisi le lieu normal IX, 1928, 11, 4.64. On a pour ce lieu, avec les éléments du système B:

$$x = +0.06172 \qquad \alpha = 343^\circ 16'.4$$
$$y = +0.41739 \qquad \delta = +1\ 18.5$$
$$z = +0.29729 \qquad \lg \rho = 9.89622$$
$$\lg n = 3.03334.$$

Les formules de Backlund donnent alors, en accord parfait avec les notres:

$$p' = -67.52 \qquad p = -48.29.$$

En ajoutant ces termes aux coefficients différeniels par rapport à n_0, notamment -5407.66 et -2991.92 et en multipliant les sommes par $\tau/1200 = 0.0008343$, j'obtiens les coefficients de $d\varkappa$ pour le moment considéré:

$$\cos\delta \frac{d\alpha}{d\varkappa} = -4.5679 \qquad \frac{d\delta}{d\varkappa} = -2.5364;$$

on trouvera ces différents coefficients à la table IX, lieu normal IX.

Pour le système B nous avions $\varkappa = 37''.80$; en multipliant cette valeur de $\varkappa$ par les coefficients que nous venons d'écrire, on obtiendra l'effet de l'accélération ur les coordonnées du lieu IX, à savoir:

$$\cos\delta \cdot \Delta\alpha = -172''6; \qquad \Delta\delta = -95''.9.$$

Pour voir s'il en est bien ainsi, on a recalculé le coordonnées de ce lieu, sans introduire l'accélération — ni dans M, ni dans a, par l'intermédiaire de n, — et on les a comparées à celles qui ont été obtenues antérieurement avec accélération; les différences ont été précisément de $-172''.6$ et de $-95''.9$. L'accord a été aussi satisfaisant avec d'autres lieux normaux.

P. S. L'Observatoire de Madrid vient de publier (v. Boll. II, 1935 № 1) une liste de 7 observations de la comète, faites depuis le 22 Août jusqu'à Sept 3. — La comparaison de ces observations aux éléments D fait apparaitre des écarts extrêmement irréguliers et assez notables; la dernière de ces observations seulement est bien représentée par nos éléments (1934, IX 3; $\Delta\alpha = +11''$; $\Delta\delta = -6''$).

Poulkovo,
Mai 1935

Н. ИДЕЛЬСОН

КОМЕТА ЭНКЕ в 1924—1934 г.

Резюме

В виду значительных расхождений наблюдений кометы Энке в 1931 г. с вычисленной для этого появления эфемеридой была поставлена задача произвести контрольное вычисление возмущений с 1924 по 1931 г., вывести совершенно независимо величину ускорения среднего суточного движения кометы за этот период и подготовить эфемериду на 1934 г. Исходные элементы на 1924 г. были сообщены нам Л. Л. Маткевичем; они представляют собой систему элементов, полученную О. А. Баклундом при подготовке эфемериды на 1918 г., с учетом возмущений с 1918 по 1924 г., но не подвергшуюся с тех пор улучшению. Ускорение, определенное Баклундом к 1918 г. составляло $+22''.19$ за (период) [2].

Для этих элементов нами были вычислены, с помощью таблиц Crommelin'a, возмущения от Юпитера за оба оборота 1924—1928 и 1928—1931 гг. Полученные системы (которые мы называем A) были сравнены с наблюдениями 1924, 1928 1931 года, причем ускорение не вводилось вовсе; при этом сравнении обнаружились (табл. IV, столб. 1) весьма значительные расхождения, ясно указывавшие, что без ускорения представить движение за два оборота невозможно. Для независимого определения значения этого элемента было произведено уравнивание появлений 1924 и 1928 гг., затем 1924 и 1931 гг.; сравнив увеличение среднего суточного движения в обеих системах полученных поправок, мы вывели для ускорения значение $+37''.8$. После этого было произведено уравнивание всех трех появлений совместно, при неизменной величине ускорения $37''.8$; это дало нам систему элементов B (табл. VII), которая и была непосредственно сравнена с наблюдениями (табл. VIII). Наконец было произведено вторичное уравнивание, причем в качестве седьмой неизвестной в условные уравнения была введена поправка полученной в первом приближении величины ускорения. Условные уравнения для этого уравнивания даны в табл. IX; полученные поправки

к элементам — табл. X. Самые элементы, которые обозначаем C, приведены в табл. XII; ускорение для этой системы оказалось еще больше, чем для системы B, оно получилось теперь равным $+42''.3$. Элементы C на 1931 г. и были положены в основу предвычисления эфемериды к появлению 1934 г. (см. Pulkovo Observatory Circular, № 10, Append.). В 1934 г. комета Энке была открыта 8 июля на обсерватории Yerkes; она наблюдалась затем до 30 августа; всего имеется около 40 наблюдений; расхождения нашей эфемериды с наблюдениями оказались довольно значительными; к концу августа они достигли $-4'$ по α и $+2'$ по δ. Эти расхождения ясно указывали на то, что полученное нами значение ускорения (которое, кстати сказать, при изучении движения только за два оборота и не может быть определено с точностью) должно быть значительно уменьшено и принято гораздо более близким к величине, данной Баклундом.

Произведенное затем общее уравнивание появлений 1924, 1928, 1931 и 1934 г. подтвердило это указание. После нескольких попыток связать все нормальные места вместе, что не приводило к достаточному уничтожению остающихся погрешностей, мы ограничились двумя местами в 1924 г., по одному в 1928 и 1931 гг. и двумя в 1934 г. (см. табл. XVII). В результате уравнивания мы получили систему D (табл. XVIII), поправки которой в отношении исходной системы A даны в табл. XIX; представление сохраненных нами нормальных мест в этой системе оказалось вполне удовлетворительным (см. табл. XVII, столбец Résidus). Весьма замечательно, что в этой системе ускорение действительно, имеет величину, весьма близкую к той, которая, по исследованиям Баклунда, установилась к 1904 г., именнно $22''$ (значение, полученное нами есть $+22''.77$). Это обстоятельство, естественно, вызывает предположение, что за последние 30 лет, начиная с 1904 г., величина ускорения кометы Энке не подвергалась изменениям. Для окончательного уяснения этого обстоятельства надлежит произвести сравнение наших элементов D со всеми наблюдениями кометы за ее 10 последних поялений, начиная с 1904 г. — В приложении (Appendice) даны некоторые технические указания, относящиеся к вычислению возмущений, к контролю величины возмущенного периода и к вычислению дифференциального коэффициента координат по ускорению.

Напечатано по распоряжению Главной Астрономической Обсерватории

Директор *Б. П. Герасимович*

Ответственный редактор *Б. П. Герасимович*

Технический редактор *Е. В. Пулькина*

Сдано в набор 25/VII — 1935 г. Подписано к печати 1/X — 1935 г.

Формат бум. 62 × 94. — 2 печ. л. — 115.870 тип. зн. в п. л. — Тираж 600.

Ленгорлит № 27222. Заказ № 4987.

Типография „Советский Печатник“, Моховая, 40.