ASTÉROÏDE (976) BENJAMINA

ORBITE MOYENNE D'APRÈS LES OBSERVATIONS FAITES PENDANT LES OPPOSITIONS DES ANNÉES 1922-23-24-25-26-28. MÉTHODE DE CORRECTION DES ÉLÉMENTS ET MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NORMALES AVEC VÉRIFICATION A L'AIDE DES DIFFÉRENCES DE LOGARITHMES DES COEFFICIENTS.

Par M. Benjamin JEKHOWSKY,
Docteur ès Sciences,
Aide-astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

I. — *Préparation des observations, et les éléments de départ.*

L'astéroïde (976) Benjamina a été découvert par l'auteur le 27 mars 1922. Les observations des mars 27, avril 11 et 26 ont fourni les éléments suivants :

Époque 1922 *Avril* 11,357108 (T. m. Gr.).

$$
(\mathrm{E}_1)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{M} & = 340^\circ.54'.52'',75 \\
\omega & = 305.58.50,78 \\
\Omega & = 245.55.59,49 \\
i & = 7.34.25,41 \\
\varphi & = 7.33.1,67 \\
\mu & = 624'',051884 \\
\log a & = 0.5031906 \\
g & = 9.0
\end{array}
\right.
\quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\ \text{Équinoxe et écliptique } 1922,0
$$

et ces éléments, avec les constantes de Gauss que voici :

$$
\begin{aligned}
x &= r\,[\bar{1}.9968322]\sin(v + 281^\circ 43'35'',37) \\
y &= r\,[\bar{1}.9724549]\sin(v + 189^\circ 10'16'',64) \\
z &= r\,[\bar{1}.5629304]\sin(v + 209^\circ 42'23'',75)
\end{aligned}
$$

ont donné comme représentation des observations faites en 1922 les écarts Observ.-Calcul suivants :

		Mars		Avril						Mai
1922........		27.	28.	1.	5.	11.	13.	16.	26.	11.
O. — C.	$\Delta\alpha$..	$-0'',4$	$+0'',7$	$-0'',2$	$+0'',7$	$-0'',2$	$+0'',7$	$+0'',3$	$0'',0$	$-3'',2$
	$\Delta\delta$..	$+0'',1$	$+0'',1$	$0'',0$	$-0'',4$	$0'',0$	$0'',0$	$+0'',2$	$0'',0$	$-0'',5$

La planète a été observée pendant toutes les oppositions suivantes et les éléments ci-dessus les représentent de moins en moins, les écarts Observ.-Calcul en $\Delta\alpha$ dépassant 1° en 1926 et même 2° en 1928.

La planète ayant accompli un tour complet dans sa révolution autour du Soleil, il y avait lieu de corriger son orbite d'après les observations faites pendant toutes les oppositions et trouver ainsi un système d'éléments moyens, afin que l'on puisse avoir un système d'éléments sûrs pour pouvoir calculer les perturbations et former une éphémeride permettant de retrouver l'astre ultérieurement.

En rapportant les éléments à l'écliptique et à l'équinoxe de 1925,0 on a

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 305^\circ.58'.40'',58 \\ \Omega &= 245.58.40,37 \\ i &= 7.34.24,97 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{Écliptique}\\ \text{et équinoxe}\\ 1925,0\end{array}$$

avec les constantes de Gauss, rapportées au même équinoxe

$$\begin{aligned} \sin a &= [\bar{1}.9968300], & A &= 281^\circ.46'.\ 6'',99, \\ \sin b &= [\bar{1}.9724412], & B &= 189.12.42,74, \\ \sin c &= [\bar{1}.5630368], & C &= 209.44.59,08. \end{aligned}$$

On change ensuite le plan fondamental, en prenant comme tel le plan de l'équateur.

Il vient

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= 209^\circ.44'.59'',08 \\ \Omega_1 &= 340.46.35,01 \\ i_1 &= 21.26.45,94 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{Équateur}\\ \text{et équinoxe}\\ 1925,0\end{array}$$

Enfin on prend pour l'époque, — 1925 janvier 1,0 de sorte que pour cette époque

$$M = 153^\circ 25' 7'',40$$

et pour le calcul proposé, nous avons donc le système d'éléments suivants :

Époque : **1925** ***Janvier*** **1,0** (T. U.).

$$
(E_1)' \quad \left\{ \begin{array}{lll}
M & = 153^\circ.25'.\ 7'',40 & \\
\omega_1 & = 209.44.59,08 & \\
\Omega_1 & = 340.46.35,01 & \text{Équateur et équinoxe 1925,0} \\
i_1 & = \ 21.26.45,94 & \\
\varphi & = \ \ 7.33.\ 1,67 & \\
\mu & = 624'',051884 & \\
\log a & = 0.5031906 &
\end{array} \right.
$$

Avec les constantes de Gauss

$$
\begin{array}{ll}
\sin a = [\bar{1}.9968300], & A = 335^\circ.47'.26'',41 \\
\sin b = [\bar{1}.9724412], & B = 243.14.\ 2,16 \\
\sin c = [\bar{1}.5630368], & C = 263.46.18,50
\end{array} \left.\right\} \text{Equateur 1925,0}
$$

Les observations, qui ont servi à corriger l'orbite, sont celles faites par l'auteur à Alger et une faite par M. Neujmin à l'Observatoire de Simeïs.

Cette observation m'a été obligeamment communiquée par M. Beljawsky.

Observations de la planète (976) Benjamina.

N°.	DATES.	T. M. local.	T. U.	DIFFÉRENCE de longitude.	α_0.	Log fp_α.	δ_0.	Log fp_δ.	LIEU d'observat.	OBSERVATEURS.	Gr.
		h m s	h m s	h m s	h m s		° ′ ″				
1...	1922 Avril 11	9. 3.27		+0.12.9	9.57.50,58	8.668	+ 1.37.34,6	0.703	Alger	M. Jekhowsky (1)	12,8
2...	1923 Juin 20	11.41.41			17. 8.23,34	8.750	—19.50. 9,3	0.963	»	» (2)	12,7
3...	1924 Sept. 26	8.44.46			21.46. 5.65	8.911n	— 2.48.10,3	0.746	»	» (3)	13,9
4...	1925 Oct. 27		20.31.27		1.47.25,24	9.503n	+17.24.34.8	0.530	»	» (4)	13,5
5...	1926 Déc. 31		22.17.17		6.27. 2,85	9.224n	+17.31.25,0	0.477	»	» (5)	13,6
6...	1928 Avril 10		21.20.36		12.26.12,00		—12.53. 0,0		Simeïs	M. Neujmin (6)	12.5

Publication. — (1) *J. O.*, v. VI, p. 19; (2) *J. O.*, v. VIII, p. 48; (3) *J. O.*, v. VIII, p. 107; (4) *J. O.*, v. IX, p. 107; (5) *J. O.*, v. X, p. 52; (6) *B. Z.*, n° 23, 1928.

Ces observations sont rapportées aux commencements des années correspondantes, sauf celle de 1928, qui est rapportée au commencement de l'année 1925,0.

Observations réduites à 1925,0.

N°.	DATES.	TEMPS MOYEN de Greenwich.	T. U.	RÉDUCTION à l'équinoxe 1925 $\Delta\alpha$.	$\Delta\delta$.	α. 1925,0.	δ. 1925,0.
		h m s	h m s	s	″	h m s	° ′ ″
1......	1922 Avril 11	8.51.18		+9,28	—51,8	9.57.59,86	+ 1.36.42, 8
2......	1923 Juin 20	11.29.32		+7,09	— 9.9	17. 8.30,43	—19.50.18, 2
3......	1924 Sept. 26	8.32.37		+3.11	+16.7	21.46. 8,76	— 2.47.53, 6
4......	1925 Oct. 27		20.31.27	0.00	0,0	1.47.25,24	+17.24.34, 8
5......	1926 Déc. 31		22.17.17	—3,49	+ 2.4	6.26.59,36	+17.31.27, 4
6......	1028 Avril 10		21.20.36	0.00	0,0	12.26.12,00	—12.53. 0,00

Errata. — Catalogue de l'Observatoire d'Alger, page 141, à partir de l'étoile 7036-7050, il faut pour la précession le signe — au lieu du signe +.

A partir de l'année 1925 le jour astronomique commence à minuit et non à midi de la journée suivante. Il y a lieu d'ajouter 0,5 jours aux dates qui précèdent 1925, ou de retrancher la même quantité des dates qui suivent l'année 1925.

De sorte que pour trouver le nombre de jours qui séparent deux dates, dont une précède et l'autre suit l'année 1925, on a deux formules simples

$$\tau_{1925+x} - (\tau_{1925-x} + 0,5) = p_j,$$
$$(\tau_{1925+x} - 0,5) - \tau_{1925-x} = p_j.$$

Pour comparer les observations avec les calculs on a effectué la détermination des ascensions droites et des déclinaisons avec les éléments rapportés aux équinoxes correspondants, ayant calculé avec ces éléments les constantes de Gauss.

On obtient ainsi les observations réduites et prêtes pour le calcul qui nous intéresse.

Nos.	Temps d'aberr.	DATES T. U.	α_0.	α_c.	$\alpha_0 - \alpha_c$.
	s m		° ′ ″	° ′ ″	″
1....	—17. 4	1922 Avril 11.86896	149.27.38.70	149.27.38.59	— 0,11
2....	—16.33	1923 Juin 20,97885	257. 5.50,10	257.35.16.73	— 29.26,63
3....	—22. 4	1924 Sept. 26,85599	326.31.24.75	327. 3.18.18	— 31.53,43
4....	—21.28	1925 Oct. 27,85517	26.51.18.60	26.56.36,68	— 5.18.08
5....	—18. 2	1926 Déc. 21,92867	96.45.42.75	95.33. 5.42	— 72.37,33
6....	—14.51	1928 Avril 10.88931	186.33. 0.00	184.24.11.62	+131. 8,18

Nos.	Temps d'aberr.	DATES T. U.	δ_0.	δ_c.	$\delta_0 - \delta_c$.
	s m		° ′ ″	° ′ ″	′ ″
1....	—17. 4	1922 Avril 11.86896	+ 1.37.34, 6	+ 1.37.34. 3	+ 0. 0, 3
2....	—16.33	1923 Juin 20,97885	—19.50. 9. 3	—19.49.14. 6	— 0.54, 7
3....	—22. 4	1924 Sept. 26,85599	— 2.48.10. 3	— 2.36.42. 5	— 11.27. 8
4....	—21.28	1925 Oct. 27,85517	+17.24.34. 8	+17.24.52. 2	— 0.17, 4
5....	—18. 2	1926 Déc. 21,92867	+17.31.25. 0	+17.44.11. 0	— 12.46, 0
6....	—14.51	1926 Avril 10.88931	—12.53. 0, 0	—12. 8.47. 7	— 45.12, 0

II. — *Calcul des coefficients différentiels et formation des équations de condition.*

Dans le choix de la méthode pour trouver les corrections des éléments je me suis arrêté aux méthodes classiques d'Oppolzer (t. 1, édition Pasquier, p. 9) et de Schönfeld (*Astr. Nachr.*, nos 2693-2695), qui donnent le même résultat. Cependant je préfère mettre les formules des méthodes ci-dessus sous une forme, qui me paraît plus simple pour le calcul, surtout lorsque l'on utilise les Tables de logarithmes d'addition et de soustraction.

En effet, au lieu de se servir de formules, qui donnent les quantités a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1, analogues aux constantes de Gauss, en fonction des éléments équatoriaux de la planète et introduire des angles auxiliaires, comme on le fait dans les deux méthodes citées ci-dessus, je prends les formules (H. Andoyer, *Cours de Mécanique céleste*, t. 1, p. 114) qui donnent les mêmes quantités en fonction de constantes de Gauss, proprement dites, savoir :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\sin a_1 \sin A_1 &= \cos\delta\cos\alpha\sin a\sin A + \cos\delta\sin\alpha\sin b\sin B + \sin\delta\sin c\sin C,\\
\sin a_1 \cos A_1 &= \cos\delta\cos\alpha\sin a\cos A + \cos\delta\sin\alpha\sin b\cos B + \sin\delta\sin c\cos C,\\
\cos a_1 &= \cos\delta\cos\alpha\cos a + \cos\delta\sin\alpha\cos b + \sin\delta\cos c,\\
\sin b_1 \sin B_1 &= \sin\alpha\sin a\sin A + \cos\alpha\sin b\sin B,\\
\sin b_1 \cos B_1 &= -\sin\alpha\sin a\cos A + \cos\alpha\sin b\cos B,\\
\cos b_1 &= -\sin\alpha\cos a + \cos\alpha\cos b,\\
\sin c_1 \sin C_1 &= -\sin\delta\cos\alpha\sin a\sin A - \sin\delta\sin\alpha\sin b\sin B + \cos\delta\sin c\sin C,\\
\sin c_1 \cos C_1 &= -\sin\delta\cos\alpha\sin a\cos A - \sin\delta\sin\alpha\sin b\cos B + \cos\delta\sin c\cos C,\\
\cos c_1 &= -\sin\delta\cos\alpha\cos a - \sin\delta\sin\alpha\cos b + \cos\delta\cos c.
\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
l_1 &= \sin a\sin A, & m_1 &= \sin b\sin B, & n_1 &= \sin c\sin C,\\
l_2 &= \sin a\cos A, & m_2 &= \sin b\cos B, & n_2 &= \sin c\cos C,\\
l_3 &= \cos a, & m_3 &= \cos b, & n_3 &= \cos c,
\end{aligned}\right.$$

et soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la direction observée

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda &= \cos\delta\cos\alpha,\\
\mu &= \cos\delta\sin\alpha,\\
\nu &= \sin\delta.
\end{aligned}\right.$$

Avec ces notations, pour déterminer les quantités, $a_1, b_1\, c_1,\, A_1, B_1, C_1$, on a les formules

$$(4)\quad \begin{cases} \sin a_1 \sin A_1 = \lambda\, l_1 + \mu m_1 + \nu n_1, \\ \sin a_1 \cos A_1 = \lambda\, l_2 + \mu m_2 + \nu n_2, \\ \cos a_1 \quad = \lambda\, l_3 + \mu m_3 + \nu n_3, \\ \sin b_1 \sin B_1 = [\lambda m_1 - \mu\, l_1]\ \text{séc}\,\delta, \\ \sin b_1 \cos B_1 = [\lambda m_2 - \mu\, l_2]\ \text{séc}\,\delta, \\ \cos b_1 \quad = [\lambda m_3 - \mu\, l_3]\ \text{séc}\,\delta, \\ \sin c_1 \sin C_1 = -[\lambda\, l_1 + \mu m_1]\,\text{tang}\,\delta + \nu n_1\, \text{cotang}\,\delta, \\ \sin c_1 \cos C_1 = -[\lambda\, l_2 + \mu m_2]\,\text{tang}\,\delta + \nu n_2\, \text{cotang}\,\delta, \\ \cos c_1 \quad = -[\lambda\, l_3 + \mu m_3]\,\text{tang}\,\delta + \nu n_3\, \text{cotang}\,\delta, \end{cases}$$

où les quantités λ, μ, ν, $l_1 \ldots m_1 \ldots n_1 \ldots$ sont déjà connues lorsqu'on prend soin de vérifier la représentation des observations avec les éléments de départ.

Dans la suite, nous avons besoin seulement des six dernières de ces relations.

En posant ensuite dans la formule générale, qui sert de base pour le calcul de corrections des éléments, soit dans la méthode d'Oppolzer, soit dans celle de Schönfeld (H. ANDOYER, *loc. cit.*, p. 112) :

$$(5)\quad \begin{cases} P_{b_1} = \sin b_1 \sin(v + B_1), & P_{c_1} = \sin c_1 \sin(v + C_1), \\ P_{b_2} = \sin b_1 \cos(v + B_1), & P_{c_2} = \sin c_1 \cos(v + C_1), \\ P_{b_3} = \cos b_1 \sin(v + \omega_1), & P_{c_3} = \cos c_1 \sin(v + \omega_1), \\ P_{b_4} = \cos b_1 \cos(v + \omega_1), & P_{c_4} = \cos c_1 \cos(v + \omega_1), \\ Q_{b_1} = -\cos\varphi \sin b_1 \sin B_1, & Q_{c_1} = -\cos\varphi \sin c_1 \sin C_1, \\ Q_{b_2} = \sin\varphi \sin b_1 \cos B_1, & Q_{c_2} = \sin\varphi \sin c_1 \cos C_1, \end{cases}$$

il vient pour les formules, qui déterminent les coefficients différentiels :

$$(6)\quad \begin{cases} R_{b_1} = \dfrac{a}{\rho}\,\text{séc}\,\varphi\,[P_{b_2} + Q_{b_2}], & R_{c_1} = \dfrac{a}{\rho}\,\text{séc}\,\varphi\,[P_{c_2} + Q_{c_2}], \\ R_{b_2} = \tau R_{b_1} - \dfrac{2}{3}\dfrac{ra\sqrt{a}}{k\rho} P_{b_1}, & R_{c_2} = \tau R_{c_1} - \dfrac{2}{3}\dfrac{ra\sqrt{a}}{k\rho} P_{c_1}, \\ R_{b_3} = \dfrac{a}{\rho}[\sin E\, P_{b_1} + Q_{b_1}], & R_{c_3} = \dfrac{a}{\rho}[\sin E\, P_{c_1} + Q_{c_1}], \\ R_{b_4} = \dfrac{r}{\rho} P_{b_2}, & R_{c_4} = \dfrac{r}{\rho} P_{c_2}, \\ R_{b_5} = \dfrac{r}{\rho} P_{b_3}, & R_{c_5} = \dfrac{r}{\rho} P_{c_3}, \\ R_{b_6} = \dfrac{r}{\rho}[\cos i_1\, P_{b_3} - \sin i_1\, P_{b_4}], & R_{c_6} = \dfrac{r}{\rho}[\cos i_1\, P_{c_3} - \sin i_1\, P_{c_4}]. \end{cases}$$

Dans ces formules E désigne l'anomalie excentrique de la planète,

$$\tau = t - t_0 \qquad \text{et} \qquad \log \frac{2}{3k} = [1.588327].$$

Pour déterminer les variations des éléments il vient, comme équations de condition,

$$(7) \qquad \begin{cases} R_{b_1}\, dM + R_{b_2}\, d\mu + R_{b_3}\, d\varphi + R_{b_4}\, d\omega_1 + R_{b_5}\, di_1 + R_{b_6}\, d\Omega_1 = \cos\delta\, d\alpha, \\ R_{c_1}\, dM + R_{c_2}\, d\mu + R_{c_3}\, d\varphi + R_{c_4}\, d\omega_1 + R_{c_5}\, di_1 + R_{c_6}\, d\Omega_1 = \qquad d\delta. \end{cases}$$

Il est facile aussi, en mettant certains termes en facteur, d'obtenir pour les coefficients (6) des relations de la forme

$$A[1 + B]$$

tout à fait appropriée au calcul à l'aide des Tables d'addition et de soustraction.

En appliquant ces formules à notre exemple, on obtient les douze équations de conditions suivantes.

A titre de contrôle les coefficients différentiels ont été recalculés à l'aide de formules des deux méthodes citées ci-dessus.

(8)

En ascension droite.

$[0,18736]\, dM$	$+ [3,20779]_n\, d\mu$	$+ [0,16828]_n\, d\varphi$	$+ [0,08480]\, d\omega_1$	$+ [0,11704]\, d\Omega_1$	$+ [\bar{2},61606]_n\, di_1$	$= [3,26307]$,
$[0,22903]$	$+ [2,98723]_n$	$+ [0,45805]$	$+ [0,17607]$	$+ [0,14610]$	$+ [\bar{2},77789]$	$= [1,44248]_n$,
$[0,00265]$	$+ [2,67144]_n$	$+ [0,16823]$	$+ [0,08452]$	$+ [0,11451]$	$+ [\bar{2},54855]$	$= [1,50322]_n$,
$[0,02235]$	$+ [2,48919]$	$+ [\bar{1},91878]_n$	$+ [0,12619]$	$+ [0,12315]$	$+ [\bar{1},42625]_n$	$= [0,70401]_n$,
$[0,15561]$	$+ [3,01838]$	$+ [0,45519]_n$	$+ [0,15477]$	$+ [0,13499]$	$+ [\bar{1},32348]$	$= [1,83992]$,
$[0,28288]$	$+ [3,35711]$	$+ [\bar{2},63802]_n$	$+ [0,16428]$	$+ [0,18155]$	$+ [\bar{1},41548]_n$	$= [2,10665]$,

En déclinaison.

$[\bar{1},79196]_n\, dM$	$+ [2,80194]\, d\mu$	$+ [\bar{1},71435]\, d\varphi$	$+ [\bar{1},68630]_n\, d\omega_1$	$+ [\bar{2},01805]\, d\Omega_1$	$+ [\bar{1},03109]_n\, di_1$	$= [\bar{3},69897]$,
$[\bar{2},82164]$	$+ [1,46900]_n$	$+ [\bar{1},13125]$	$+ [\bar{2},80138]$	$+ [\bar{2},53206]_n$	$+ [0,17058]_n$	$= [\bar{1},95984]$,
$[\bar{1},54568]$	$+ [2,21973]_n$	$+ [\bar{1},93148]$	$+ [\bar{1},58142]$	$+ [\bar{1},05930]_n$	$+ [\bar{2},98760]_n$	$= [1,05931]$,
$[\bar{1},44444]$	$+ [1,95472]$	$+ [\bar{1},39850]_n$	$+ [\bar{1},54584]$	$+ [\bar{3},99268]$	$+ [0,00743]$	$= [\bar{1},46240]$,
$[\bar{1},37771]_n$	$+ [2,26645]_n$	$+ [\bar{1},66945]$	$+ [\bar{1},36496]_n$	$+ [\bar{3},16531]$	$+ [0,11316]$	$= [1,10608]$,
$[\bar{1},82873]_n$	$+ [2,91316]_n$	$+ [\bar{2},22022]_n$	$+ [\bar{1},71026]_n$	$+ [\bar{2},27110]_n$	$+ [\bar{1},87236]_n$	$= [1,65514]$.

Les quantités numériques placées entre crochets désignent les logarithmes.

L'unité est la minute d'arc.

Pour l'homogénéité, comme il est d'usage on introduit dans les équations de conditions de nouvelles variables définies par les relations (¹)

$$dM = t\frac{[\odot]}{[A]},\qquad d\mu = u\frac{[\odot]}{[B]},\qquad d\varphi = w\frac{[\odot]}{[C]},$$
$$d\omega_1 = x\frac{[\odot]}{[D]},\qquad d\Omega_1 = y\frac{[\odot]}{[E]},\qquad di_1 = z\frac{[\odot]}{[F]},$$

où A, B, C, ..., F, $\odot$ désignent les plus grandes valeurs absolues des coefficients a_i, b_i, ..., de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} t\,[\odot] &= [0,28288]\,dM,\\ u\,[\odot] &= [3,35711]\,d\mu,\\ w\,[\odot] &= [0,45805]\,d\varphi,\\ x\,[\odot] &= [0,17607]\,d\omega_1,\\ y\,[\odot] &= [0,18155]\,d\Omega_1,\\ z\,[\odot] &= [0,17058]\,di_1, \end{aligned}$$

avec

$$[\odot] = [2,10665].$$

Avec ce changement de variables nos équations de condition (8) deviennent :

En ascension droite.

							s.
$[\bar{1},90448]\,t$	$+[\bar{1},85068]_n\,u$	$+[\bar{1},71023]_n\,w$	$+[\bar{1},90873]\,x$	$+[\bar{1},93549]\,y$	$+[\bar{2},44548]_n\,z$	$=[\bar{5},15642]$	$[0,08811]$
$[\bar{1},94615]$	$+[\bar{1},63012]_n$	$+[0,00000]$	$+[0,00000]$	$+[\bar{1},96455]$	$+[\bar{2},60731]$	$=[\bar{1},33583]_n$	$[0,53387]$
$[\bar{1},71977]$	$+[\bar{2},81433]_n$	$+[\bar{1},71018]$	$+[\bar{1},90845]$	$+[\bar{1},93296]$	$+[\bar{2},37797]$	$=[\bar{1},39657]_n$	$[0,42540]$
$[\bar{1},73947]$	$+[\bar{1},13208]$	$+[\bar{1},46073]_n$	$+[\bar{1},95012]$	$+[\bar{1},94160]$	$+[\bar{1},25567]_n$	$=[\bar{2},59736]_n$	$[0,29689]$
$[\bar{1},87273]$	$+[\bar{1},66127]$	$+[\bar{1},99714]_n$	$+[\bar{1},97870]$	$+[\bar{1},95344]$	$+[\bar{1},15290]$	$=[\bar{1},73327]$	$[0,34313]$
$[0,00000]$	$+[0,00000]$	$+[\bar{2},17997]_n$	$+[\bar{1},98821]$	$+[0,00000]$	$+[\bar{1},24490]_n$	$=[0,00000]$	$[0,57777]$

En déclinaison.

$[\bar{1},50908]_n\,t$	$+[\bar{1},44493]\,u$	$+[\bar{1},25630]\,w$	$+[\bar{1},51023]_n\,x$	$+[\bar{3},83650]\,y$	$+[\bar{2},86051]_n\,z$	$=[\bar{5},59232]$	$[\bar{1},40383]_n$
$[\bar{2},53876]$	$+[\bar{2},11189]_n$	$+[\bar{2},67320]$	$+[\bar{2},62531]$	$+[\bar{2},35051]_n$	$+[0,00000]_n$	$=[\bar{3},85319]_n$	$[\bar{1},95973]_n$
$[\bar{1},26280]$	$+[\bar{2},86262]_n$	$+[\bar{1},47343]$	$+[\bar{1},40535]$	$+[\bar{2},87775]_n$	$+[\bar{2},81702]_n$	$=[\bar{2},95266]_n$	$[\bar{1},71679]$
$[\bar{1},16156]$	$+[\bar{2},59761]$	$+[\bar{2},94045]_n$	$+[\bar{1},36977]$	$+[\bar{3},81113]$	$+[\bar{1},83685]$	$=[\bar{3},35575]_n$	$[0,01075]$
$[\bar{1},09483]_n$	$+[\bar{2},90934]_n$	$+[\bar{1},21140]$	$+[\bar{1},18889]_n$	$+[\bar{4},98376]$	$+[\bar{1},94258]$	$=[\bar{2},99943]_n$	$[\bar{1},83237]$
$[\bar{1},54585]_n$	$+[\bar{1},55605]_n$	$+[\bar{2},46217]_n$	$+[\bar{1},53419]_n$	$+[\bar{2},08955]_n$	$+[\bar{1},70178]_n$	$=[\bar{1},54849]_n$	$[0,20357]_n$

(¹) H. Andoyer, *Cours de Mécanique céleste*, t. I, p. 221.

La dernière colonne donne la somme des coefficients de chaque équation de condition écrite sous forme

$$at + bu + cw + dv + ey + fz = g.$$

soit

$$s = a + b + c + d + e + f,$$

qui est nécessaire pour la vérification du calcul.

Les formules de contrôle sont alors

$$aa + ab + ac + ad + ae + af = as,$$
$$ba + bb + bc + bd + be + bf = bs,$$
$$ca + cb + cc + cd + ce + cf = cs,$$
$$da + db + dc + dd + de + df = ds,$$
$$ea + eb + ec + ed + ee + ef = es,$$
$$fa + fb + fc + fd + fe + ff = fs$$

et

$$ga + gb + gc + gd + ge + gf = gs$$

Nos.	*aa.*	*ab.*	*ac.*	*ad.*	*ae.*	*af.*	*ag.*	*as.*
1...	$\bar{1},80896$	$\bar{1},75516_n$	$\bar{1},61471_n$	$\bar{1},81321$	$\bar{1},83997$	$\bar{2},34996_n$	$\bar{5},06090$	$\bar{1},99259$
2...	$\bar{1},89240$	$\bar{1},57627_n$	$\bar{1},94615$	$\bar{1},94615$	$\bar{1},91070$	$\bar{2},55346$	$\bar{1},28198_n$	$0,48002$
3...	$\bar{1},43954$	$\bar{2},53410_n$	$\bar{1},42995$	$\bar{1},62822$	$\bar{1},65273$	$\bar{2},09774$	$\bar{1},11634_n$	$0,14517$
4...	$\bar{1},47894$	$\bar{2},87155$	$\bar{1},20020_n$	$\bar{1}.68959$	$\bar{1}.68107$	$\bar{2},95514_n$	$\bar{2},33683_n$	$0,03636$
5...	$\bar{1},74546$	$\bar{1},53400$	$\bar{1},86987_n$	$\bar{1},85143$	$\bar{1},82617$	$\bar{1},02563$	$\bar{1},60600$	$0,21586$
6...	$0,00000$	$0,00000$	$\bar{2}.17997_n$	$\bar{1},98821$	$0,00000$	$\bar{1},24490_n$	$0,00000$	$0,57777$
7...	$\bar{1},01816$	$\bar{2},95391_n$	$\bar{2},76538_n$	$\bar{1}.01931$	$\bar{3},34558_n$	$\bar{2},36959$	$\bar{5},10140_n$	$\bar{2},91291$
8...	$\bar{3},07752$	$\bar{4},65065_n$	$\bar{3},21196$	$\bar{3},16407$	$\bar{4},88927_n$	$\bar{2},53876_n$	$\bar{4},39195_n$	$\bar{2},49849_n$
9...	$\bar{2},52580$	$\bar{2},12542_n$	$\bar{2},73623$	$\bar{2},66815$	$\bar{2},14055_n$	$\bar{2},07982_n$	$\bar{2},21546_n$	$\bar{2},97959$
10...	$\bar{2},32312$	$\bar{3},75917$	$\bar{2},10201_n$	$\bar{2},53133$	$\bar{4},97269$	$\bar{2},99841$	$\bar{4},51731_n$	$\bar{1},17231$
11...	$\bar{2},18966$	$\bar{2},00417$	$\bar{2},30623_n$	$\bar{2},28372$	$\bar{4},07859_n$	$\bar{1},03741_n$	$\bar{2}.09426$	$\bar{2},92720_n$
12...	$\bar{1}.09170$	$\bar{1},10190$	$\bar{2},00802$	$\bar{1},08004$	$\bar{3}.63540$	$\bar{1},24763$	$\bar{1}.09434$	$\bar{1},74942$
	$0,58619$	$\bar{1},67643$	$\bar{1},29878_n$	$0,64910$	0.61211	$\bar{3},22336$	$0,07171$	$1,10330$

Nos.	ba	bb.	bc.	bd.	be.	bf.	bg.	bs.
1...		$\bar{1},70136$	$\bar{1},56091$	$\bar{1},75941_n$	$\bar{1},78617_n$	$\bar{2}.29616$	$\bar{5},00710_n$	$\bar{1},93879_n$
2...		$\bar{1}.26024$	$\bar{1},63012_n$	$\bar{1},63012_n$	$\bar{1},59467_n$	$\bar{2},23743_n$	$\bar{2},96595$	$0,16399_n$
3...		$\bar{3},62866$	$\bar{2},52451_n$	$\bar{2}.72278_n$	$\bar{2},74729_n$	$\bar{3},19230_n$	$\bar{2},21090$	$\bar{1},23973_n$
4...		$\bar{2},26406$	$\bar{2},59281_n$	$\bar{1},08220$	$\bar{1},07368$	$\bar{2},38775_n$	$\bar{3},72944_n$	$\bar{1},42897$
5...		$\bar{1},32254$	$\bar{1},65841_n$	$\bar{1}.63997$	$\bar{1},61471$	$\bar{2},81417$	$\bar{1},39454$	$0,00440$
6...		$0,00000$	$\bar{2},17997_n$	$\bar{1},98821$	$0,00000$	$\bar{1},24490_n$	$0,00000$	$0,57777$
7...		$\bar{2},88966$	$\bar{2},70113$	$\bar{2},95506_n$	$\bar{3},28133$	$\bar{2},30534_n$	$\bar{5},03715$	$\bar{2},84866_n$
8...		$\bar{4},22378$	$\bar{4},78509_n$	$\bar{4}.73720_n$	$\bar{4},46240$	$\bar{2},11189$	$\bar{5},96508$	$\bar{2},07162$
9...		$\bar{3},72524$	$\bar{2},33605_n$	$\bar{2},26797_n$	$\bar{3},74037$	$\bar{3},67964$	$\bar{3},81528$	$\bar{2},57941_n$
10...		$\bar{3},19522$	$\bar{3},53806_n$	$\bar{3}.96738$	$\bar{4}.40874$	$\bar{2},43446$	$\bar{4},95336_n$	$\bar{2},60836$
11..		$\bar{3},81868$	$\bar{2},12074_n$	$\bar{2},09823$	$\bar{5},89310_n$	$\bar{2},85192_n$	$\bar{3},90877$	$\bar{2},74171_n$
12...		$\bar{1},11200$	$\bar{2},01822$	$\bar{1}.09024$	$\bar{3},64560$	$\bar{1},25783$	$\bar{1},10454$	$\bar{1},75962$
		$0,33003$	$\bar{1},76661_n$	$\bar{1}.70927$	$\bar{1},68330$	$\bar{4},81327$		$0,48054$

Nos.	ca.	cb.	cc.	cd.	ce.	cf.	cg.	cs.
1...			$\bar{1},42046$	$\bar{1},61896_n$	$\bar{1},64572_n$	$\bar{2},15571$	$\bar{6},86665_n$	$\bar{1},79834_n$
2...			$0,00000$	$0,00000$	$\bar{1}.96455$	$\bar{2},60731$	$\bar{1},33583_n$	$0,53387$
3...			$\bar{1},42036$	$\bar{1},61863$	$\bar{1},64314$	$\bar{2},08815$	$\bar{1},10675_n$	$0,13558$
4...			$\bar{2},92146$	$\bar{1},41085_n$	$\bar{1},40233_n$	$\bar{2},71640$	$\bar{2},05809$	$\bar{1},75762_n$
5...			$\bar{1}.99428$	$\bar{1},97584_n$	$\bar{1},95058_n$	$\bar{1},15004_n$	$\bar{1},73041_n$	$0,34027_n$
6...			$\bar{4},35994$	$\bar{2},16818_n$	$\bar{2},17997_n$	$\bar{3},42487$	$\bar{2},17997_n$	$\bar{2},75774_n$
7...			$\bar{2},51260$	$\bar{2},76653_n$	$\bar{3},09280$	$\bar{2},11681_n$	6.84862	$\bar{2},66013_n$
8...			$\bar{3},34640$	$\bar{3},29851$	$\bar{3},02371_n$	$\bar{2},67320_n$	$\bar{4},52639_n$	$\bar{2},63293_n$
9...			$\bar{2},94686$	$\bar{2},87878$	$\bar{2},35118_n$	$\bar{2},29045_n$	$\bar{2},42609_n$	$\bar{1},19022$
10...			$\bar{3},88090$	$\bar{2},31022_n$	$\bar{4},75158_n$	$\bar{2},77730_n$	$\bar{4},29620$	$\bar{2},95120_n$
11...			$\bar{2},42280$	$\bar{2},40029_n$	$\bar{4},19516$	$\bar{1},15398$	$\bar{2},21083_n$	$\bar{1},04377$
12...			$\bar{4},92434$	$\bar{3},99636$	$\bar{4},55172$	$\bar{2},16395$	$\bar{2},01066$	$\bar{2}.66574$
			$0,44012$	$\bar{1}.37046_n$	$\bar{1},42063_n$	$\bar{3}.29565_n$		$0,16792$

Nos.	da.	db.	dc.	dd.	de.	df.	dg.	ds.
1...				$\bar{1},81746$	$\bar{1},84422$	$\bar{2},35421_n$	$\bar{5},06515$	$\bar{1},99684$
2...				$0,00000$	$\bar{1},96455$	$\bar{2},60731$	$\bar{1},33583$	$0,53387$
3...				$\bar{1},81690$	$\bar{1},84141$	$\bar{2},28642$	$\bar{1},30502_n$	$0,33385$
4...				$\bar{1},90024$	$\bar{1},89172$	$\bar{1},20579_n$	$\bar{2},54748_n$	$0,24701$
5...				$\bar{1},95740$	$\bar{1},93214$	$\bar{1},13160$	$\bar{1},71197$	$0,32183$
6...				$\bar{1},97642$	$\bar{1},98821$	$\bar{1},23311_n$	$\bar{1},98621$	$0,56598$
7...				$\bar{1},02046$	$\bar{3},34673_n$	$\bar{2},37074$	$\bar{5},10255_n$	$\bar{2},91406$
8...				$\bar{3},25062$	$\bar{4},97562_n$	$\bar{2},62531_n$	$\bar{4},47850_n$	$\bar{2},58504_n$
9...				$\bar{2},81070$	$\bar{2},28310_n$	$\bar{2},22237_n$	$\bar{2},35801_n$	$\bar{1},12214$
10...				$\bar{2},73954$	$\bar{3},18090$	$\bar{1},20662$	$\bar{4},72552_n$	$\bar{1},38052$
11...				$\bar{2},37778$	$\bar{4},17265_n$	$\bar{1},13147_n$	$\bar{2},18832$	$\bar{1},02126_n$
12...				$\bar{1},06838$	$\bar{3},62374$	$\bar{1},23597$	$\bar{1},08268$	$\bar{1},73776$
				$0,72660$	$0,69068$	$\bar{3},51543$		$1,17528$

Nos.	ea.	eb.	ec.	ed.	ee.	ef.	eg.	es.
1...					$\bar{1},87098$	$\bar{2},38097_n$	$\bar{5},09191$	$0,02360$
2...					$\bar{1},92910$	$\bar{2},57186$	$\bar{1},30038_n$	$0,49842$
3...					$\bar{1},86592$	$\bar{2},31093$	$\bar{1},32953_n$	$0,35836$
4...					$\bar{1},88320$	$\bar{1},19727_n$	$\bar{2},53896_n$	$0,23849$
5...					$\bar{1},90688$	$\bar{1},10634$	$\bar{1},68671$	$0,29657$
6...					$0,00000$	$\bar{1},24490_n$	$0,00000$	$0,57777$
7...					$\bar{5},67300$	$\bar{4},69701_n$	$\bar{7},42882$	$\bar{3},24033_n$
8...					$\bar{4},70102$	$\bar{2},35051$	$\bar{4},20370$	$\bar{2},31024$
9...					$\bar{3},75550$	$\bar{3},69477$	$\bar{3},83041$	$\bar{2},59454_n$
10...					$\bar{5},62226$	$\bar{3},64798$	$\bar{5},16688_n$	$\bar{3},82188$
11...					$\bar{7},96752$	$\bar{4},92634$	$\bar{5},98319_n$	$\bar{4},81613$
12...					$\bar{4},17910$	$\bar{3},79133$	$\bar{3},63804$	$\bar{2},29312$
					$0,69058$	$\bar{1},12526_n$		$1,14579$

Nos.	*fa.*	*fb.*	*fc.*	*fd.*	*fe.*	*ff.*	*fg.*	*fs.*	*gs.*
1...						$\bar{4},89096$	$\bar{7},60190_n$	$\bar{2},53359_n$	$\bar{5},24453$
2...						$\bar{3}.21462$	$\bar{3}.94314_n$	$\bar{1}.14118$	$\bar{1},86970_n$
3...						$\bar{4}.75594$	$\bar{3}.77454_n$	$\bar{2},80337$	$\bar{1}.82197_n$
4...						$\bar{2}.51134$	$\bar{3}.85303$	$\bar{1}.55256_n$	$\bar{2},89425_n$
5...						$\bar{2}.30580$	$\bar{2}.88617$	$\bar{1}.49603$	0.07640
6...						$\bar{2}.48980$	$\bar{1}.24490_n$	$\bar{1},82267_n$	0.57777
7...						$\bar{3},72102$	$\bar{6},45283_n$	$\bar{2},26434$	$\bar{6},99615_n$
8...						0.00000	$\bar{3}.85319$	$\bar{1}.95973$	$\bar{3}.81292$
9...						$\bar{3}.63404$	$\bar{3}.76968$	$\bar{2}.53381_n$	$\bar{2}.66945_n$
10...						$\bar{1}.67370$	3.19260_n	$\bar{1},84760$	$\bar{3}.36650_n$
11...						$\bar{1}.88516$	$\bar{2},94201_n$	$\bar{1}.77495$	$\bar{2}.83180_n$
12...						$\bar{1}.40356$	$\bar{1}.25027$	$\bar{1},90535$	$\bar{1}.75206$
						0.41309		0.39070	0.59619

Equations normales.

$$
\begin{array}{lllllll}
[0,58619]\ t & +[\bar{1},67643]\ u & +[\bar{1},29878]_n w & +[0,64910]\ x & +[0,61211]\ y & +[\bar{3},22336]\ z & =[0,07171]. \\
[\bar{1},67643] & +[0,33003] & +[\bar{1},76661]_n & +[\bar{1},70927] & +[\bar{1},68330] & +[\bar{4},81327] & =[0,17412], \\
[\bar{1},29878]_n & +[\bar{1},76661]_n & +[0,44017] & +[\bar{1},37046]_n & +[\bar{1},42063]_n & +[\bar{3},29565]_n & =[\bar{1},96313]_n, \\
[0,64910] & +[\bar{1},70927] & +[\bar{1},37046]_n & +[0,72660] & +[0,69068] & +[\bar{3},51543] & =[0,05970]. \\
[0,61211] & +[\bar{1},68330] & +[\bar{1},42063]_n & +[0,69068] & +[0,69058] & +[\bar{1},12526]_n & =[0,02094], \\
[\bar{3},22336] & +[\bar{4},81327] & +[\bar{3},29565]_n & +[\bar{3},51543] & +[\bar{1},12526]_n & +[0,41309] & =[\bar{3},65396]_n,
\end{array}
$$

Les formules de contrôle donnent :

$$
\begin{array}{lllllll}
[0,58619] & +[\bar{1},67643] & +[\bar{1},29878]_n & +[0,64910] & +[0,61211] & +[\bar{3},22336] & =[1,10330]. \\
[\bar{1},67643] & +[0,33003] & +[\bar{1},76661]_n & +[\bar{1},70927] & +[\bar{1},68330] & +[\bar{4}.81327] & =[0,48054], \\
[\bar{1},29878]_n & +[\bar{1},76661]_n & +[0,44017] & +[\bar{1},37046]_n & +[\bar{1},42063]_n & +[\bar{3},29565]_n & =[0,16792]. \\
[0,64910] & +[\bar{1},70927] & +[\bar{1},37046]_n & +[0,72660] & +[0,69068] & +[\bar{3},51543] & =[1,17528]. \\
[0,61211] & +[\bar{1},68330] & +[\bar{1},42063]_n & +[0,69068] & +[0,69058] & +[\bar{1},12526]_n & =[1,14579]. \\
[\bar{3},22336] & +[\bar{4},81327] & +[\bar{3},29565]_n & +[\bar{3},51543] & +[\bar{1},12526]_n & +[0,41309]. & =[0,39070]. \\
 & & & & & & \\
[0,07171] & +[0,17412] & +[\bar{1},96313]_n & +[0,05970] & +[0,02094] & +[\bar{3},65396]_n & =[0,59619],
\end{array}
$$

III. — *Résolution des équations normales avec vérification à l'aide des différences de logarithmes des coefficients.*

Considérons un système d'équations normales

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{lllllll}
(aa)\,t & +\,(ab)\,u & +\,(ac)\,w & +\,(ad)\,x & +\,(ae)\,y & +\,(af)\,z & = (ag_1), \\
(ba) & +\,(bb) & +\,(bc) & +\,(bd) & +\,(be) & +\,(bf) & = (bg_2), \\
(ca) & +\,(cb) & +\,(cc) & +\,(cd) & +\,(ce) & +\,(cf) & = (cg_3), \\
(da) & +\,(db) & +\,(dc) & +\,(dd) & +\,(de) & +\,(df) & = (dg_4), \\
(ea) & +\,(eb) & +\,(ec) & +\,(ed) & +\,(ee) & +\,(ef) & = (eg_5), \\
(fa) & +\,(fb) & +\,(fc) & +\,(fd) & +\,(fe) & +\,(ff) & = (fg_6),
\end{array}
\right.
$$

en réservant les crochets pour désigner les nombres qui sont des logarithmes.

Commençons par l'élimination de l'inconnue t et pour cela divisons tous les termes de chaque équation du système (1) par le coefficient de cette inconnue, puis de la première équation ainsi obtenue retranchons chacune des cinq autres.

On obtient un nouveau système, que voici :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(bb)}{(ba)}\right] u + \left[\frac{(ac)}{(aa)} - \frac{(bc)}{(ba)}\right] w + \left[\frac{(ad)}{(aa)} - \frac{(bd)}{(ba)}\right] x \\
&\qquad + \left[\frac{(ae)}{(aa)} - \frac{(be)}{(ba)}\right] y + \left[\frac{(af)}{(aa)} - \frac{(bf)}{(ba)}\right] z = \left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(bg_2)}{(ba)}\right], \\
&\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(cb)}{(ca)}\right] + \left[\frac{(ac)}{(aa)} - \frac{(cc)}{(ca)}\right] + \left[\frac{(ad)}{(aa)} - \frac{(cd)}{(ca)}\right] \\
&\qquad + \left[\frac{(ae)}{(aa)} - \frac{(ce)}{(ca)}\right] + \left[\frac{(af)}{(aa)} - \frac{(cf)}{(ca)}\right] = \left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(cg_3)}{(ca)}\right], \\
&\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(db)}{(da)}\right] + \left[\frac{(ac)}{(aa)} - \frac{(dc)}{(da)}\right] + \left[\frac{(ad)}{(aa)} - \frac{(dd)}{(da)}\right] \\
&\qquad + \left[\frac{(ae)}{(aa)} - \frac{(de)}{(da)}\right] + \left[\frac{(af)}{(aa)} - \frac{(df)}{(da)}\right] = \left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(dg_4)}{(da)}\right], \\
&\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(eb)}{(ea)}\right] + \left[\frac{(ac)}{(aa)} - \frac{(ec)}{(ea)}\right] + \left[\frac{(ad)}{(aa)} - \frac{(ed)}{(ea)}\right] \\
&\qquad + \left[\frac{(ae)}{(aa)} - \frac{(ee)}{(ea)}\right] + \left[\frac{(af)}{(aa)} - \frac{(ef)}{(ea)}\right] = \left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(eg_5)}{(ea)}\right], \\
&\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(fb)}{(fa)}\right] + \left[\frac{(ac)}{(aa)} - \frac{(fc)}{(fa)}\right] + \left[\frac{(ad)}{(aa)} - \frac{(fd)}{(fa)}\right] \\
&\qquad + \left[\frac{(ae)}{(aa)} - \frac{(fe)}{(fa)}\right] + \left[\frac{(af)}{(aa)} - \frac{(ff)}{(fa)}\right] = \left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(fg_6)}{(fa)}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons maintenant que

$$(3) \qquad \left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(cb)}{(ca)}\right] = \left[\frac{(ac)}{(aa)} - \frac{(bc)}{(ba)}\right],$$

car on a d'une façon évidente

$$(4) \quad \log(ab) - \log(aa) - \{\log(cb) - \log(ca)\} = \log(ac) - \log(aa) - \{\log(bc) - \log(ba)\}.$$

De même on trouve sous forme générale

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\log(am) - \log(aa) - \{\log(nm) - \log(na)\} \\ &= \log(an) - \log(aa) - \{\log(mn) - \log(ma)\} \end{aligned}$$

où l'on fait successivement

$$\begin{array}{ll} m = b, & n = c,\ d,\ e,\ f, \\ m = c, & n = d,\ e,\ f, \\ m = d, & n = e,\ f, \\ m = e, & n = f. \end{array}$$

On voit donc que chaque coefficient du système (2), écrit sous cette forme, représente la différence algébrique de logarithmes de deux nombres et si l'on se sert d'une Table d'addition et de soustraction, en retranchant du plus grand le plus petit, elle donne l'argument des Tables, qui sont construites de cette manière (Tables de Zeck, Becker, Seyboth par exemple).

De plus la relation (5) montre que les différences des logarithmes des coefficients sont constituées de la même façon que les coefficients des équations normales.

En désignant par

$$b_j,\quad c_j,\quad d_j,\quad e_j,\quad f_j,\quad g_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

le plus grand en valeur absolue des deux logarithmes qui constituent chaque grand crochet et par

$$s_j^i \qquad \begin{pmatrix} j = 1, & 2, & \dots, & 5 \\ i = 0, & ', & '', & ''', & {}^{\text{IV}} \end{pmatrix}$$

les valeurs algébriques des quantités prises dans les Tables, avec

$$h_j^i = \log(am) - \log(aa) - \{\log(nm) - \log(na)\}$$

comme argument, notre système (2) devient

$$
(2') \left\{
\begin{array}{llllll}
[b_1 + s_1^0]u & +[c_1 + s_2^0]w & +[d_1 + s_3^0]x & +[e_1 + s_4^0]y & +[f_1 + s_5^0]z & = [g'_1 + s_6^0], \\
[b_2 + s_2^0] & +[c_2 + s'_2] & +[d_2 + s'_3] & +[e_2 + s'_4] & +[f_2 + s'_5] & = [g'_2 + s'_6], \\
[b_3 + s_3^0] & +[c_3 + s'_3] & +[d_3 + s''_3] & +[e_3 + s''_4] & +[f_3 + s''_5] & = [g'_3 + s''_6], \\
[b_4 + s_4^0] & +[c_4 + s'_4] & +[d_4 + s''_4] & +[e_4 + s'''_4] & +[f_4 + s'''_5] & = [g'_4 + s'''_6], \\
[b_5 + s_5^0] & +[c_5 + s'_5] & +[d_5 + s''_5] & +[e_5 + s'''_5] & +[f_5 + s^{\text{IV}}_5] & = [g'_5 + s^{\text{IV}}_6],
\end{array}
\right.
$$

les arguments de la Table étant

$$
\begin{array}{ccccc|c}
h_1^0 & h_2^0 & h_3^0 & h_4^0 & h_5^0 & h_6^0 \\
 & h'_2 & h'_3 & h'_4 & h'_5 & h'_6 \\
 & & h''_3 & h''_4 & h''_5 & h''_6 \\
 & & & h'''_4 & h'''_5 & h'''_6 \\
 & & & & h^{\text{IV}}_5 & h^{\text{IV}}_6
\end{array}
$$

et les valeurs algébriques des quantités prises dans les Tables

$$
\begin{array}{ccccc|c}
s_1^0 & s_2^0 & s_3^0 & s_4^0 & s_5^0 & s_6^0 \\
 & s'_2 & s'_3 & s'_4 & s'_5 & s'_6 \\
 & & s''_3 & s''_4 & s''_5 & s''_6 \\
 & & & s'''_4 & s'''_5 & s'''_6 \\
 & & & & s^{\text{IV}}_5 & s^{\text{IV}}_6
\end{array}
$$

En éliminant dans le système (2′) l'inconnue u de la même manière que précédemment on trouve un nouveau système d'équations dans lequel les coefficients donneront encore les différences des logarithmes de deux nombres, c'est-à-dire l'argument de la Table.

En effet on démontre aisément, en se servant de relations (5), que

$$
\begin{aligned}
& [c_1 + s_2^0] - [b_1 + s_1^0] - \{[c_3 + s'_3] - [b_3 + s_3^0]\} \\
= & \{d_1 + s_3^0] - [b_1 + s_1^0] - [[d_2 + s'_3] - [b_2 + s_3^0]\},
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite, en continuant de la même façon.

On aura donc des arguments de la Table, avec les valeurs algébriques des quantités prises dans la Table, constituées de la même façon que les coefficients des équations normales.

On voit maintenant l'avantage sérieux que peut donner ce procédé de résolution des équations normales, au point de vue de vérification des calculs.

Si le calcul, concernant l'élimination de la première inconnue, est exact, les quantités h, ainsi que les valeurs algébriques des quantités s, situées d'un côté et de l'autre côté de la diagonale descendante à partir du premier coefficient, doivent être égales.

Ainsi tous les coefficients, sauf ceux situés sur la diagonale même, se trouvent vérifiés.

L'élimination de la seconde inconnue donnera la vérification non seulement du calcul du système nouveau, mais aussi elle donnera la vérification des coefficients situés sur la même diagonale du système précédent, car dans le système (2′) les coefficients se trouvent divisés par le coefficient du premier terme.

On voit que ce procédé de calcul est moins long et moins fatigant que les procédés de calculs habituels.

Avant d'aller plus loin et de montrer comment, sans beaucoup de peine, on peut vérifier le calcul des seconds membres, appliquons ce qui précède à notre exemple.

Écrivons d'abord

$$\begin{array}{lllllll}
[0,00000]t & +[\bar{1},09024]u & +[\bar{2},71259]_n w & +[0,06291]x & +[0,02592]y & +[\bar{4},63717]z & =[\bar{1},48552], \\
[0,00000] & +[0,65360] & +[0,09018]_n & +[0,03284] & +[0,00687] & +[\bar{3},13684] & =[0,49769], \\
[0,00000] & +[0,46783] & +[1,14139]_n & +[0,07168] & +[0,12185] & +[\bar{3},99687] & =[0,66435], \\
[0,00000] & +[\bar{1},06017] & +[\bar{2},72136]_n & +[0,07750] & +[0,04158] & +[\bar{4},86633] & =[\bar{1},41060], \\
[0,00000] & +[\bar{1},07119] & +[\bar{2},80852]_n & +[0,07857] & +[0,07847] & +[\bar{2},51315]_n & =[\bar{1},40883], \\
[0,00000] & +[\bar{1},58991] & +[0,07229]_n & +[0,29207] & +[1,90190]_n & +[\bar{3},18973] & =[0,43060]_n,
\end{array}$$

d'où l'on tire

$$(2')\left\{\begin{array}{llllll}
[0,64157]_n u & +[0,07158]w & +[\bar{2},88834]x & +[\bar{2},65852]y & +[4,97160]_n z & =[0,45327]_n, \\
[0,44923]_n & +[1,13977] & +[\bar{2},37268]_n & +[\bar{1},41893]_n & +[\bar{3},97748]_n & =[0,63458]_n, \\
[\bar{3},91567] & +[\bar{3},02236] & +[\bar{2},59650]_n & +[\bar{2},59083]_n & +[\bar{4},47913]_n & =[\bar{2},68541], \\
[\bar{3},72284] & +[\bar{2},10560] & +[\bar{2},62782]_n & +[\bar{1},13524]_n & +[\bar{2},51889] & =[\bar{2},69468], \\
[\bar{1},42467]_n & +[0,05290] & +[\bar{1},90487]_n & +[1,90685] & +[\bar{3},18973]_n & =[0,47728],
\end{array}\right.$$

ayant comme arguments h de la Table d'addition

	1,56336	1,37759	0,03007	0,01905	0,49967	1,01217
	1,37759	2,42880	0,00887	0,09593	1,35970	1,17883
(h)	0,03007	0,00887	0,01459	0,01566	0,22916	0,07492
	0,01905	0,09593	0,01566	0,05255	1,87518	0,07669
	0,49967	1,35970	0,22916	1,87518	6,55256	0,94508

et comme valeurs de s correspondant à ces arguments

	0,01203	−0,01860	−1,17457	−1,36740	−0,16524	−0,04442
	−0,01860	−0,00162	−1,69900	−0,70292	−0,01939	−0,02977
(s)	−1,17457	−1,69900	−1,48100	−1,45075	−0,38720	−0,80011
	−1,36740	−0,70292	−1,45075	−0,94323	+0,00574	−0,79084
	−0,16524	−0,01939	−0,38720	+0,00575	0,00000	+0,04668

Remarquons ensuite que nous pouvons écrire :

$$\left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(bg_2)}{(ba)}\right] = -\left\{\log\frac{(ag_1)}{(aa)} + h_6^0 + s_6^0\right\},$$

$$\left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(cg_3)}{(ca)}\right] = -\left\{\log\frac{(ag_1)}{(aa)} + h'_6 + s'_6\right\},$$

$$\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(bb)}{(ba)}\right] = -\left\{\log\frac{(ab)}{(aa)} + h_1^0 + s_1^0\right\},$$

$$\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(cb)}{(ca)}\right] = -\left\{\log\frac{(ab)}{(aa)} + h_2^0 + s_2^0\right\},$$

d'où

$$\left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(bg_2)}{(ba)}\right] - \left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(bb)}{(ba)}\right] = -\log\frac{(ag_1)}{(aa)} + \log\frac{(ab)}{(aa)} - (h_6^0 - h_1^0) - (s_6^0 - s_1^0),$$

$$\left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(cg_3)}{(ca)}\right] - \left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(cb)}{(ca)}\right] = -\log\frac{(ag_1)}{(aa)} + \log\frac{(ab)}{(aa)} - (h'_6 - h_2^0) - (s'_6 - s_2^0),$$

et en faisant la différence

$$\text{(A)}\quad \left[\left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(bg_2)}{(ba)}\right] - \left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(bb)}{(ba)}\right]\right] - \left[\left[\frac{(ag_1)}{(aa)} - \frac{(cg_3)}{(ca)}\right] - \left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(cb)}{(ca)}\right]\right]$$

$$= -(h_6^0 - h_1^0) - (s_6^0 - s_1^0) + (h'_6 - h_2^0) + (s'_6 - s_2^0)$$

$$= -(h_6^0 + h_2^0) + (h'_6 + h_1^0) - (s_6^0 + s_2^0) + (s'_6 + s_1^0).$$

Mais la partie gauche de cette relation n'est rien d'autre que la valeur de h_6^0 après l'élimination de l'inconnue u des équations (2′) et que nous appellerons h_{6w}^0.

La formule (A) convient au cas, si dans le système (2′) le coefficient de u dans la première équation est plus petit en valeur absolue que les coefficients de la même inconnue des quatre équations qui restent, c'est-à-dire si l'on a

$$\left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(bb)}{(ba)}\right] < \left[\frac{(ab)}{(aa)} - \frac{(nb)}{(na)}\right] \qquad (n = c, d, e, f).$$

En cas contraire on a une relation plus simple, savoir :

$$h_{6w}^0 = -(h_6^0 - h_1^0) - (s_6^0 - s_1^0) + (s_6' - s_2^0). \tag{B}$$

Les formules (A) et (B) permettent donc, à l'aide des tableaux (h) et (s) précédents, de trouver d'avance la dernière colonne du nouveau tableau (h).

En effet, on a

h_6^0..............	1,01217			
h_1^0..............	1,56336			
$-(h_6' - h_1^0)$.....	+0,55119	+0,55119	+0,55119	+0,55119
h_6'..............	+1,17883			0,94508
h_2^0..............	1,37759			0,49967
$(h_6' - h_2^0)$.......	−0,19876			+0,44541
s_6^0..............	−0,04442			
s_1^0..............	−0,01203			
$-(s_6^0 - s_1^0)$......	+0,03239	+0,03239	+0,03239	+0,03239
s_6'..............	−0,02977	−0,80011	−0,79084	+0,04668
s_2^0..............	−0,01860	−1,17457	−1,36740	−0,16524
$(s_6' - s_2^0)$.......	−0,01117	+0,37446	+0,57656	+0,21192
h_6^0..............	0,37365	0,95804	1.16014	1,24091

ce qui donne, pour les valeurs de h_{6u},

$$(h_6 u) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0,37365, \\ 0,95804, \\ 1,16014, \\ 1,24091. \end{array} \right.$$

Si maintenant, en éliminant dans le système (2) l'inconnue u, nous trouvons les arguments et les quantités pris dans les Tables d'addition et de soustraction (quatre premières colonnes), formés comme les coefficients des équations normales et les nombres de la dernière colonne du nouveau tableau (h) égaux à h_{6u}, notre calcul concernant l'élimination de la première inconnue pourra être considéré comme exact.

L'élimination de l'inconnue u donne

$$\begin{array}{llllll}
[0,00000]\,u & +[\bar{1},43001]_n w & +[\bar{2},24677]_n x & +[\bar{2},01695]_n y & +[\bar{4},33003]\,z & =[\bar{1},81170], \\
[0,00000] & +[0,69054]_n & +[\bar{3},92345] & +[\bar{2},96970] & +[\bar{3},52825] & =[0,18535], \\
[0,00000] & +[\bar{1},10669] & +[0,68083]_n & +[0,67516]_n & +[\bar{2},56346]_n & =[0,76974], \\
[0,00000] & +[0,38276] & +[0,90498]_n & +[1,41240] & +[0,79605] & =[0,97184], \\
[0,00000] & +[0,62823]_n & +[0,48020] & +[2,48218]_n & +[3,76506] & =[1,05261]_n,
\end{array}$$

d'où le nouveau système

$$\begin{array}{lllll}
[0,66602]\, w & +[\bar{2},41556]_n x & +[\bar{1},01560]_n y & +[\bar{3},49983]_n z & =[\bar{1},94652]_n, \\
[\bar{1},59880]_n & +[0,67923] & +[0,67421] & +[\bar{2},56599] & =[0,71906]_n, \\
[0,42866]_n & +[0,90403] & +[1,41223] & +[0,79603]_n & =[0,94071]_n, \\
[0,59981] & +[0,48273]_n & +[2,48216] & +[3,76506]_n & =[1,07686],
\end{array}$$

avec

	1,26053	0,32332	0,95275	1,19822	0,37365
	0,32332	2,43406	2,65821	2,23343	0,95804
(h)	0,95275	2,65821	3,39545	4,46602	1,16014
	1,19822	2,23343	4,46523	7,43503	1,24091

	—0,02452	+0,16879	+0,04590	—0,02842	—0,23883
	+0,16879	—0,00160	—0,00095	+0,00253	—0,05068
(s)	+0,04590	—0,00095	—0,00017	—0,00002	—0,03113
	—0,02842	+0,00253	—0,00002	0,00000	+0,02425

comme Tableaux pour h et s.

On voit d'après ce qui précède que le calcul se trouve ainsi vérifié.

En continuant de la même manière il vient

$$\begin{array}{lllll}
[0,00000]\, w & +[\bar{3},74954]_n x & +[\bar{2},34958]_n y & +[\bar{4},83381]_n z & =[\bar{1},28050]_n, \\
[0,00000] & +[1,09043]_n & +[1,07541]_n & +[\bar{2},96719]_n & =[1,12026] \\
[0,00000] & +[0,47537]_n & +[0,98357]_n & +[0,36737] & =[0,51205] \\
[0,00000] & +[\bar{1},88292]_n & +[\bar{1},88235] & +[3,16525]_n & =[0,47705]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
[1,09023]\, x & +[1,07459]\, y & +[\bar{2},96398]\, z & =[1,12649]_n \\
[0,47455] & +[0,98256] & +[0,36750]_n & =[0,53681]_n \\
[\bar{1},87971] & +[1,88248]_n & +[3,16525] & =[0,50383]_n,
\end{array}$$

	3,34089	2,72583	2,13338	1,83976
(h)	2,72583	2,63399	3,53356	1,23155
	2,13338	3,53277	6,33146	1,19655

	—0,00020	—0,00082	—0,00321	+0,00623
(s)	—0,00082	—0,00101	+0,00013	+0,02476
	—0,00321	+0,00013	0,00000	+0,02678

Puis

$$
\begin{array}{llll}
[0,00000]\,x & +[\bar{1},98436]\,y & +[\bar{3},87375]\,z & =[0,03626]_n, \\
[0,00000] & +[0,50801] & +[\bar{1},89295]_n & =[0,06226]_n, \\
[0,00000] & +[2,00276]_n & +[3,28554] & =[0,62412]_n, \\
 & [0,35345]\,y & +[\bar{1},89709]\,z & =[\bar{2},82655], \\
 & [2,00691] & +[3,28554]_n & =[0,49434];
\end{array}
$$

$$
(h) \qquad
\begin{array}{r|r|r}
0,52365 & 2,01920 & 0,02600 \\
\hline
2,01840 & 5,41179 & 0,58786
\end{array}
$$

$$
(s) \qquad
\begin{array}{r|r|r}
-0,15456 & +0,00414 & -1,23571 \\
\hline
+0,00415 & 0,00000 & -0,12978
\end{array}
$$

Et enfin

$$
\begin{array}{lll}
[0,00000]\,y & +[\bar{1},54364]_n\,z & =[\bar{2},47310]_n, \\
[0,00000] & +[1,27863]_n\,z & =[\bar{2},48743].
\end{array}
$$

D'où

$$
\begin{array}{llllll}
z=[\bar{3},51080]; & y=[\bar{2},48935]_n; & x=[0,02420]_n; & w=[\bar{1},29534]_n; & u=[\bar{1},76048]; & t=[0,17015], \\
 & y=[\bar{2},48937]_n; & x=[0,02419]_n; & w=[\bar{1},29538]_n; & u=[\bar{1},76049]; & t=[0,17013], \\
 & & x=[0,02419]_n; & w=[\bar{1},29530]_n; & u=[\bar{1},76048]; & t=[0,17015], \\
 & & & w=[\bar{1},29534]_n; & u=[\bar{1},76048]; & t=[0,17015], \\
 & & & & u=[\bar{1},76047]; & t=[0,17015], \\
 & & & & & t=[0,17013].
\end{array}
$$

En prenant comme valeurs des inconnues

$$
\begin{aligned}
t &= [0,17015], \\
u &= [\bar{1},26048], \\
w &= [\bar{1},29534]_n, \\
x &= [0,02420]_n, \\
y &= [\bar{2},48935]_n, \\
z &= [\bar{3},51080]_n,
\end{aligned}
$$

on trouve, pour les corrections des éléments,

$$
\begin{array}{llll}
dM & =[1,99392], & dM & =+1^\circ.38'.36'',60, \\
d\mu & =[\bar{2},51002], & d\mu & =+\qquad 1,9416, \\
d\varphi & =[0,94394]_n, & d\varphi & =-\qquad 8.47,34, \\
d\omega_1 & =[1,95478]_n, & d\omega_1 & =-1.30.\ 6,72, \\
d\Omega_1 & =[0,41445]_n, & d\Omega_1 & =-\qquad 2.35,81, \\
di_1 & =[\bar{1},44687]_n, & di_1 & =-\qquad 0.16,79
\end{array}
$$

et, pour les éléments corrigés :

Époque 1925. *Janvier* 1,0 (T. U.).

$$(E_2)\quad \left\{\begin{array}{l} M = 155^\circ\ 3'\ 44'',00 \\ \omega_1 = 208.14.52,36 \\ \Omega_1 = 340.43.59,20 \\ i_1 = 21.26.29,15 \\ \varphi = 7.24.14,33 \\ \mu = 625'',993484 \\ \log a = 0,5022912 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \text{Équateur} \\ \text{et équinoxe} \\ 1925,0 \end{array}$$

avec les constantes de Gauss

$$\begin{array}{l} A = 335^\circ\ 46'\ 3'',41 \\ B = 243.12.25,81 \\ C = 263.47.24,58 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Équateur} \\ 1925,0 \end{array}$$

ou bien

Époque 1925. *Janvier* 1,0 (T. U.).

$$(E_3)\quad \left\{\begin{array}{l} M = 155^\circ\ 3'\ 44'',00 \\ \omega = 304.27.27,78 \\ \Omega = 245.57.20,78 \\ i = 7.35.23,42 \\ \varphi = 7.24.14,33 \\ \mu = 625'',993484 \\ \log a = 0,5022912 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \text{Équinoxe} \\ \text{et écliptique} \\ 1925,0 \end{array}$$

avec les constantes

$$\left.\begin{array}{l} x = r[\bar{1},9968174]\sin(v + 280^\circ\ 13'\ 31'',19) \\ y = r[\bar{1},9724688]\sin(v + 187.39.53,59) \\ z = r[\bar{1},5629467]\sin(v + 208.14.52,36) \end{array}\right\} \ 1925,0.$$

Voici comment ce dernier système d'éléments représente les observations :

	1922.	1923.	1924.	1925.	1926.	1928.
O — C { $\Delta\alpha$...	$+0^m,05$	$+0^m,11$	$-0^m,04$	$-0^m,21$	$+0^m,07$	$+0^m,10$
$\Delta\delta$	$+0',4$	$-0',1$	$-0',8$	$-1',0$	$-0',2$	$+0',5$

En comparant ces écarts avec ceux que l'on obtient avec les éléments de départ, savoir :

		1922.	1923.	1924.	1925.	1926.	1928.
O — C	$\Delta\alpha$.....	$+0^m,0$	$-1^m,96$	$-2^m,13$	$-0^m,36$	$+4^m,83$	$+8^m,74$
	$\Delta\delta$.....	$+0',0$	$-0',9$	$-11',5$	$-0',3$	$-12',8$	$-45',2$

on voit que le résultat est très satisfaisant.

Le système d'éléments (E_3) nous servira donc pour construire l'éphéméride troublée pour les oppositions prochaines de la planète.

REMARQUE (¹).

La planète a été observée à l'Observatoire de Simeïs (*B. Z.*, nº 28, 1929) par M. P. Parchomenco et à l'Observatoire de Tokio par M. O. Oikawa (*B. R.*, nº 224).

On a

1929. Juillet 6,93 T. U.

$$\alpha_{1925} = 19^h\,11^m,0,$$
$$\delta_{1925} = -15^\circ\ 9'.$$

Ce qui donne par rapport à l'éphéméride (*B. Z.*, nº 18, 1929), calculé avec le système d'éléments E_3,

$$\text{O.—C.}\begin{cases}\Delta\alpha = -0^m,6\\ \Delta\delta = -2'\end{cases}\qquad (j = +3',3).$$

Je signale, dès à présent, que j'entreprends au fur et à mesure que le nombre d'observations me le permettra le calcul des éléments moyens pour d'autres planètes que j'ai découvertes, notamment :

(931) Whittemora,
(953) Painleva,
(977) Philippa,
(988) Appella,
(1013) Tombecka,
(1017) Jaqueline,
(1037) Davidweilla,
(1040) Klumpkea,
1925 LA,
1926 EC.

(¹) Remarque faite pendant l'impression.