

Die Helligkeitsverteilung im Innern elliptischer Nebel.

Von **P. ten Bruggencate** in Greifswald,
zurzeit Dominion Astrophysical Observatory, Victoria, B. C.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 24. August 1930.)

§ 1 enthält die Theorie der Integralgleichung, die die räumliche Helligkeitsverteilung in einem rotationssymmetrischen Nebel mit der beobachteten Intensitätsverteilung in seiner Projektion am Himmel verbindet. In § 2 wird diese Theorie spezialisiert für den Fall, daß die isophoten Flächen im Innern eines Nebels durch konzentrische, koaxiale und ähnliche Rotationsellipsoide dargestellt werden können. § 3 gibt die Prüfung dieser Voraussetzung an den Beobachtungen von HUBBLE. Es zeigt sich, daß die Näherung eine sehr befriedigende ist. In § 4 wird ein Vergleich der Intensitätsverteilungen in den Projektionen verschiedener Nebel durchgeführt. Das schon in HUBBLES Arbeit enthaltene Resultat, daß diese Verteilungen bis auf einen Proportionalitätsfaktor alle identisch sind, wird bestätigt. Wenn man annimmt, daß aus dem Helligkeitsabfall auf den Dichteabfall geschlossen werden kann, so führt dies zu der Konsequenz, daß alle Nebel nahezu das gleiche Achsenverhältnis, und zwar 3:10, haben müssen. In § 5 wird diese Konsequenz weiter geprüft durch Berechnung der Wahrscheinlichkeit verschiedener Elliptizitäten unter den elliptischen Nebeln. Es ergibt sich eine qualitative Bestätigung der Resultate von § 4. In § 6 endlich wird die aus den Beobachtungen mögliche Berechnung des Helligkeitsabfalls im Innern elliptischer Nebel durchgeführt. In erster Näherung nimmt die Helligkeit im Nebel in jeder Richtung umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung vom Zentrum ab. Der Proportionalitätsfaktor im Gesetz für den Helligkeitsabfall ist durch die Dichteverteilung der Materie im Nebel gegeben. In § 7 wird die folgende wahrscheinlichste Beschreibung des physikalischen Zustandes elliptischer Nebel näher betrachtet. Ein elliptischer Nebel besteht aus einem mehr oder weniger stark kondensierten leuchtenden Kern, umgeben von Materie, die das Licht des Kernes nach allen Richtungen gleichmäßig streut und reflektiert.

In einer ersten umfangreichen Arbeit hat HUBBLE* eine Klassifikation von 400 außergalaktischen Nebeln nach ihrem Aussehen auf der photographischen Platte durchgeführt. Unter diesen sind 85 elliptische Nebel enthalten. Eine zweite interessante Arbeit** widmet HUBBLE der Untersuchung der Helligkeitsverteilung in den Projektionen von 15 elliptischen Nebeln. Die provisorische Klassifikation dieser Nebel beruht auf der *Exzentrizität* ihrer Bilder auf der photographischen Platte. Mit E 0 werden alle rund erscheinenden Nebel bezeichnet; die unter E 1 eingereihten Nebel besitzen eine elliptische Projektion mit dem Achsenverhältnis 9:10 usw.; die Gruppe E 7 endlich enthält die Nebel mit dem kleinsten beobachteten

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **64**, 321; *Mt Wilson Contributions* S. 324, 1926.

** E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **71**, 231, 1930.

Achsenverhältnis von 3 : 10. Was diese Klassifikation über die räumliche *Elliptizität* dieser Nebel aussagt, ist, daß es keine Nebel mit kleinerem wirklichem Achsenverhältnis wie 3 : 10 gibt, und daß dies Verhältnis anwachsen kann bis zu 10 : 10. Durch Hinzunahme der Helligkeitsverteilungen in den Projektionen der Nebel am Himmel hofft HUBBLE aus der vorläufigen Klassifikation eine endgültige zu erhalten, die die Nebel nicht mehr nur nach ihrem Aussehen auf der photographischen Platte, sondern nach ihrer wirklichen Form im Raume einreihet*. Der leitende Gedanke ist dabei, daß es einen kontinuierlichen Übergang gibt von kugelförmigen Nebeln über mehr und mehr elliptische Nebel, bis sich an die Gruppe E 7 die Spiralnebel anschließen. Nach JEANS** ist diese Reihenfolge identisch mit den einzelnen Gleichgewichtsfiguren einer stark kompressiblen, rotierenden Gasmasse.

Um diese Auffassung quantitativ prüfen zu können, ist es von besonderer Wichtigkeit, aus der Helligkeitsverteilung in den projizierten Bildern der Nebel Aufschluß zu erhalten über den Helligkeitsabfall vom Zentrum zum Rande im Innern der Nebel. In seiner zweiten Arbeit behandelt HUBBLE nur den Fall eines kugelförmigen Nebels, und vergleicht, unter der Voraussetzung, daß die Helligkeitsverteilung im Innern eines Nebels durch die Dichteverteilung der Materie bestimmt ist, die aus den Beobachtungen folgende räumliche Verteilung der Nebelmaterie mit der Verteilung in einer isothermen Gaskugel und mit der Sternverteilung in einem kugelförmigen Sternhaufen. Da die Mehrzahl der elliptischen Nebel jedoch eine ausgesprochene Elliptizität aufweist, so scheint es zweifelhaft, ob diese Art der Untersuchung zu physikalisch sinnvollen Resultaten führt. Die folgenden Überlegungen, angeregt durch die HUBBLESchen Untersuchungen, behandeln deshalb den allgemeineren Fall rotationssymmetrischer Nebel, der eine bessere Annäherung an die wirklichen Verhältnisse bilden dürfte. Dabei wird in § 3 bis § 6 angenommen, daß die HUBBLESchen Messungen den für die dortigen Schlußfolgerungen genügenden Grad von Genauigkeit besitzen.

1. *Die Integralgleichung für die räumliche Helligkeitsverteilung im Falle rotationssymmetrischer Nebel.* Es sei der Vollständigkeit halber gestattet, die allgemeine Theorie dieser Integralgleichung für den rotationssymmetrischen Fall, die ich in einer früheren Arbeit behandelt habe***, nochmals kurz in etwas einfacherer Form auseinander zu setzen.

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **71**, 233, 1930.

** J. H. JEANS, *Cosmogony and Stellar Dynamics*. Cambridge University Press 1918, S. 206ff.; *Astronomy and Cosmogony* 1928, S. 323ff.

*** P. TEN BRUGGENCATE, *Astr. Nachr.* **232**, 423, 1928.

Den Ursprung des Koordinatensystems verlegen wir in das Zentrum des Nebels. Die z -Achse falle zusammen mit der Gesichtslinie; die x -Achse verlegen wir in die Schnittlinie der Äquatorebene mit der Ebene durch das Zentrum des Nebels senkrecht zur z -Achse. Die x -Achse fällt also zusammen mit der großen Achse der Projektion (α), die y -Achse mit der kleinen Achse (β). Die yz -Ebene schneidet dann den Nebel nach einer Meridianebene, und wenn die Helligkeitsverteilung in dieser Ebene bekannt ist, so ist die Aufgabe, wegen der herrschenden Rotationssymmetrie gelöst. In der beistehenden Abb. 1 ist als spezieller Fall derjenige eines Rotationsellipsoids gezeichnet. Die folgenden Überlegungen gelten jedoch ganz allgemein für den Fall der Rotationssymmetrie.

Nennt man $I(x, y)$ die beobachtete Intensität im Punkte x, y in der Projektion des Nebels, $H(x, y, z)$ die gesuchte Intensität im Raumpunkt x, y, z , so gilt bekanntlich (falls der Nebel „durchsichtig“ ist, siehe später § 4):

$$I(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} H(x, y, z) dz, \quad (1)$$

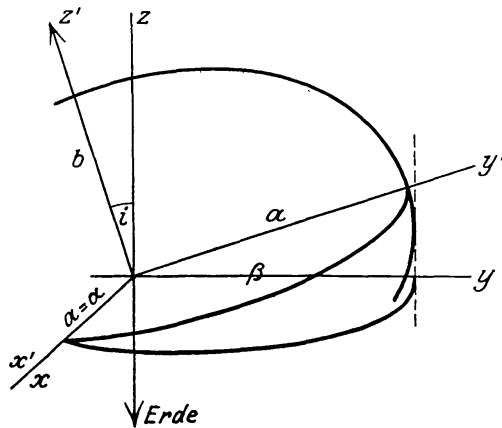


Abb. 1.
Das Rotationsellipsoid und seine Projektion.

wobei die Integration längs einer Geraden, durch den Punkt x, y in der Projektion, parallel zur Gesichtslinie auszuführen ist. z_1 und z_2 sind durch die Oberfläche des Nebels bestimmt und hängen in komplizierter Weise von x und y ab. Es handelt sich darum, die Integralgleichung (1) für $H(x, y, z)$ auf eine VOLTERRASche Integralgleichung erster Art zurückzuführen, deren eindeutige Lösung im allgemeinen Falle durch die Methode der iterierten Kerne in Form einer gleichmäßig konvergenten Reihe dargestellt werden kann*.

Nehmen wir an, die Form der Flächen konstanter Helligkeit im Innern des Nebels sei uns bekannt. Diese Flächen bilden eine einparametrische Schar von Flächen, von denen wir voraussetzen, daß sie stetig verlaufende, geschlossene Flächen sind, und daß jede Gerade parallel zur Gesichtslinie jede Fläche, wenn überhaupt, in zwei und nur zwei Punkten schneidet. Die Flächenschar sei gegeben durch die Gleichung

$$z = \psi(x, y, \alpha), \quad (2)$$

* V. VOLTERRA, Leçons sur les équations intégrales. Paris 1913.

wobei der Parameter α die einzelnen Flächen festlegt, und, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als wachsend von innen nach außen angenommen werden darf. Die durch den Punkt x, y gehende Gerade parallel zur Gesichtslinie wird eine innerste Fläche berühren, die wir durch den Parameterwert $\alpha = \alpha_0$ charakterisieren wollen, und jede aller weiter außen liegenden Flächen in zwei und nur zwei Punkten schneiden. Die Oberfläche des Nebels kann, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, durch den Parameterwert $\alpha = 1$ festgelegt werden.

Der Helligkeitsabfall H im Innern des Nebels kann nun als reine Funktion von α betrachtet werden. Dann folgt aus Symmetriegründen sofort

$$I(x, y) = 2 \int_{z_0(\alpha = \alpha_0)}^{z_2(\alpha = 1)} H(\alpha) dz. \quad (3)$$

Aus (2) erhalten wir

$$dz = \frac{\partial \psi(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot d\alpha. \quad (4)$$

Setzen wir (4) in (3) ein, so finden wir für $H(\alpha)$ die VOLTERRASche Integralgleichung erster Art:

$$I(x, y) = 2 \int_{\alpha_0}^1 H(\alpha) \cdot \frac{\partial \psi(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot d\alpha. \quad (5)$$

(5) reduziert sich auf eine Gleichung einer Variablen, wenn wir Punkte auf der großen Achse der Projektion ($y = 0$) oder auf der kleinen Achse der Projektion ($x = 0$) betrachten. Im ersten Falle ist außerdem $\alpha_0 = x$, im zweiten Falle $\alpha_0 = \alpha_0(y)$. Setzt man also die Flächen konstanter Helligkeit im Nebel als bekannt voraus, und mißt die Helligkeitsverteilung $I_1(x)$ längs der großen, oder $I_2(y)$ längs der kleinen Achse in der Projektion des Nebels, wie das HUBBLE getan hat, so gibt die Lösung der Integralgleichung

$$I_1(x) = 2 \int_x^1 H(\alpha) \cdot \frac{\partial \psi(x, 0, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot d\alpha, \quad (6)$$

oder der Gleichung

$$I_2(y) = 2 \int_{\alpha_0(y)}^1 H(\alpha) \cdot \frac{\partial \psi(0, y, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot d\alpha \quad (7)$$

die gesuchte Funktion $H(\alpha)$.

Es handelt sich also nur noch darum, die Flächenschar $z = \psi(x, y, \alpha)$ zu bestimmen. Dies ist aber durch sukzessive Näherungen leicht möglich. Man löse (6) oder (7) unter der Annahme

$$z = \psi_1(x, y, \alpha),$$

was als erste Näherung die Funktion $H_1(\alpha)$ ergeben möge. Durch Quadratur erhält man dann aus (5) eine erste genäherte, theoretische Intensitätsverteilung $I_1(x, y)$ in der Projektion, die mit der beobachteten Verteilung $I(x, y)$ verglichen werden muß. Dieser Vergleich liefert einen Anhaltspunkt für eine zweite Näherung

$$z = \psi_2(x, y, \alpha),$$

und damit eine zweite verbesserte Lösung $H_2(\alpha)$ usw.

Es ist zu bemerken, daß ψ und dehalb auch H die Neigung der Rotationsachse des Nebels gegen die Gesichtslinie, oder, wenn man lieber will, die wirkliche Elliptizität des Nebels (e), enthalten. Das Lösungsverfahren ist also gesondert für alle möglichen Elliptizitäten durchzuführen und die Schar der Lösungen $H(\alpha, e)$ bildet erst die allgemeine Lösung des Problems. In dieser Beziehung ist also eine eindeutige Lösung von (5) nicht möglich. Dies ist geometrisch ohne weiteres klar, da beliebig viele Rotationsfiguren die gleiche Projektion haben können.

2. *Der Fall konzentrischer, koaxialer und ähnlicher Rotationsellipsoide.* i sei die Neigung der Gesichtslinie gegen die Rotationsachse, e die Elliptizität des Nebels ($b^2/a^2 = 1 - e^2$), ε die Exzentrizität seiner Projektion ($\beta^2/a^2 = 1 - \varepsilon^2$). Zwischen i , e und ε besteht dann die einfache Beziehung*

$$\varepsilon = e \cdot \sin i. \quad (8)$$

Für die Schar von Flächen konstanter Helligkeit, die konzentrische, koaxiale und ähnliche Rotationsellipsoide sein sollen, findet man leicht die Gleichung

$$(1 - e^2) x^2 + (1 - e^2 \cos^2 i) y^2 + (1 - e^2 \sin^2 i) z^2 - 2 e^2 \cdot \sin i \cdot \cos i \cdot yz = \alpha^2 (1 - e^2), \quad (9)$$

wobei der Parameter α zugleich die große Achse der Ellipsoide bestimmt.

Für Punkte auf der großen Achse der Projektionsellipse haben wir zu setzen:

$$x = x, \quad y = 0,$$

und finden

$$z = \psi(x, 0, \alpha) \equiv \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - \varepsilon^2}} \cdot \sqrt{\alpha^2 - x^2},$$

* P. TEN BRUGGENCATE, Sternhaufen. Berlin, Julius Springer, 1927. S. 76.

womit

$$dz = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}. \quad (10)$$

Substitution in (3) ergibt als Integralgleichung für $H(\alpha)$:

$$I_1(x) = 2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \cdot \int_x^1 H(\alpha) \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}. \quad (11)$$

Für Punkte auf der kleinen Achse der Projektion gilt:

$$x = 0, \quad y = y,$$

und es wird

$$z = \psi(0, y, \alpha) \equiv \frac{e^2}{1-\varepsilon^2} \sin i \cos i \cdot y + \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{\alpha^2 - \frac{y^2}{1-\varepsilon^2}}.$$

Damit erhält man

$$dz = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \frac{y^2}{1-\varepsilon^2}}}. \quad (10a)$$

Substitution in (3) ergibt nun für $H(\alpha)$ die Gleichung:

$$I_2(y) = 2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \cdot \int_{\frac{y/\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon^2}}^1 H(\alpha) \cdot \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \frac{y^2}{1-\varepsilon^2}}}. \quad (11a)$$

Die untere Grenze dieses Integrals, oder die Beziehung $\alpha_0 = \frac{y}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, erhält man am einfachsten aus der Überlegung, daß y der Abstand der zur z -Achse parallelen Tangente an die Ellipse mit dem Parameter α_0 von der z -Achse ist*.

Wir setzen in Gleichung (11):

$$\sqrt{\frac{1-e^2}{1-\varepsilon^2}} \cdot I_1(x) \equiv F(x), \quad (12)$$

und erhalten dann eine Integralgleichung der gleichen Art, wie sie beim kugelsymmetrischen Problem auftritt**. Die Lösung schreibt sich dann in der Form***:

$$H(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^1 \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad (13)$$

* P. TEN BRUGGENCATE, Sternhaufen. S. 76, Gleichung (34). Berlin, Julius Springer, 1927.

** Ebenda. S. 41, Gleichung (3).

*** Ebenda. S. 41ff.

wobei $H(\alpha)$ wegen (12) im allgemeinen nur bis auf den unbekanntem Proportionalitätsfaktor $\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}}$ bestimmt ist.

Setzt man in (11a)

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} &= \eta \\ \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}} \cdot I_2(\eta \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}) &\equiv F(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

so geht (11a) über in die Gleichung

$$F(\eta) = 2 \int_{\eta}^1 H(\alpha) \cdot \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}},$$

deren Lösung ebenfalls durch (13) gegeben ist.

$H(\alpha)$ ist offenbar in (13) in willkürlichen Einheiten ausgedrückt. Substituieren wir (12) in (13), so ist ersichtlich, daß $H(\alpha)$ unabhängig von dem unbekanntem Faktor $\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}}$ wird, wenn wir die Helligkeiten in Einheiten der Zentralhelligkeit

$$H(0) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}} \cdot \int_0^1 \frac{dI(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{x} \quad (14)$$

ausdrücken. Tun wir dies für die einzelnen Nebel, so sind die Funktionen $H(\alpha)/H(0)$ von Nebel zu Nebel vergleichbar.

3. *Die isophoten Flächen in zehn elliptischen Nebeln.* Die Gleichungen (11) und (11a) gestatten eine einfache Prüfung unserer Voraussetzungen an den Beobachtungen. Wenn die isophoten Flächen in einem elliptischen Nebel mit hinreichender Annäherung durch eine Schar von ähnlichen Rotationsellipsoiden dargestellt werden können, so muß, wie ein Vergleich von (11) und (11a) zeigt, die Intensitätsverteilung längs der großen Achse in der Projektion als Funktion von x (x ausgedrückt in Einheiten der großen Achse) den gleichen Verlauf zeigen wie die Intensitätsverteilung längs der kleinen Achse als Funktion von y (y ausgedrückt in Einheiten der kleinen Achse).

Da HUBBLE seine Messungen in anderer Art reduziert und diskutiert hat, so wurden für die folgenden Anwendungen die von HUBBLE gemessenen Intensitätsverteilungen längs den verschiedenen Achsen für alle Nebel

mit Ausnahme von N. G. C. 584 und 4486, die von den Rechnungen ausgeschlossen wurden (der erste, weil seine Intensitätsverteilung nicht längs einer der Achsen gemessen wurde, der zweite, weil die Länge seiner Achsen nicht mit Sicherheit bestimmt werden konnte), rekonstruiert mit Hilfe der von HUBBLE gegebenen Tabellen 4 und 5*. Sodann wurden für jeden Nebel die Längen der großen und kleinen Achsen in der Projektion bestimmt. Dies geschah in der Weise, daß die Grenze eines Nebels an diejenige Stelle verlegt wurde, an der die Intensität auf ein hundertstel der zentralen Intensität herabgesunken ist. Es ist unwesentlich, daß diese Methode nicht die äußersten Grenzen der Nebel liefert; dafür bildet sie aber eine völlig homogene Art, die Größen der Achsen zu bestimmen. Für jeden Nebel wurde dann $\log I_1(x)$ (x ausgedrückt in Einheiten der großen Achse) und $\log I_2(y)$ (y ausgedrückt in Einheiten der kleinen Achse) durch die sich an die gemessenen Punkte am besten anschließenden glatten Kurven dargestellt. Tabelle 1 gibt die Differenzen

$$\log I_1(x) - \log I_2(y)$$

für entsprechende Argumentwerte. Da die HUBBLESche Meßmethode nicht die gleiche zentrale Intensität liefert, wenn einmal längs der großen und einmal längs der kleinen Achse registriert wird, so wurden, um die Differenzen von einem systematischen Gliede zu befreien, die $\log I_2$ -Kurven längs der $\log I$ -Achse so lange verschoben, bis sie sich im Mittel am besten mit den zugehörigen $\log I_1$ -Kurven deckten.

Tabelle 1.
Werte von $\log I_1(x) - \log I_2(y)$.

$x = \frac{y}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$	N. G. C. Nr.									
	221	410	3115	4278	4374	4382	4406	4472	4621	4649
0,1	+0,04	-0,02	-0,07	-0,01	-0,03	-0,02	-0,04	-0,05	+0,01	-0,02
0,2	+0,05	-0,05	-0,06	0,00	-0,03	-0,06	-0,01	-0,02	-0,04	-0,06
0,3	+0,03	-0,04	-0,02	0,00	-0,04	-0,07	-0,01	-0,02	-0,04	-0,05
0,4	+0,01	-0,02	+0,02	+0,03	-0,03	-0,06	0,00	-0,01	-0,01	-0,03
0,5	-0,01	-0,01	+0,03	+0,01	-0,02	-0,04	0,00	0,00	0,00	-0,02
0,6	-0,03	+0,01	+0,03	0,00	-0,02	+0,01	+0,03	-0,01	0,00	+0,01
0,7	-0,03	+0,01	+0,04	0,00	0,00	+0,04	+0,03	0,00	+0,01	+0,01
0,8	-0,02	+0,02	+0,03	-0,02	+0,04	+0,04	+0,02	0,00	+0,02	+0,03
0,9	-0,02	+0,03	+0,01	-0,01	+0,06	+0,05	0,00	+0,03	+0,04	+0,05
1,0	-0,02	+0,03	-0,03	0,00	+0,04	+0,06	-0,03	+0,03	+0,03	+0,07

Die Differenzen liegen alle innerhalb der Meßgenauigkeit und der systematische Verlauf mit x oder $y/\sqrt{1-\varepsilon^2}$ ist, wenn ein solcher auftritt,

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* 71, 245, 246, 1930.

so gering, daß die Annahme konzentrischer, koaxialer und] ähnlicher Rotationsellipsoide für die isophoten Flächen im Innern der Nebel als eine sehr gute Näherung angesehen werden muß. Dies Resultat ist in anderer Form in HUBBLES Arbeit enthalten. Es zeigt sich dort in der engen Korrelation zwischen den Quotienten der Größen a_{\min} und a_{\max} und den Klassen E 0 bis E 7 seiner Nebel.

4. *Vergleich der Intensitätsverteilung in den Projektionen verschiedener Nebel.* Das wichtigste und überraschendste Resultat der HUBBLESchen Arbeit ist meines Erachtens, daß die Intensitätsverteilung längs den Achsen der Projektionen für alle Nebel das gleiche Gesetz:

$$\log I = K - 2 \cdot \log (r + a)$$

befolgt*, wobei r die Entfernung vom Zentrum eines Nebels in willkürlichen Einheiten bedeutet, K eine Konstante ist, die von Nebel zu Nebel verschieden ist, und a endlich eine weitere Konstante darstellt, die von Nebel zu Nebel und von Achse zu Achse verschieden ist. Alle Kurven $\log I$ verlaufen also wie HUBBLE findet, parallel, wenn man nur den Maßstab von r geeignet wählt. In unserer Bezeichnungsweise heißt das, daß die Beobachtungen für zwei beliebige Nebel n und m die Beziehungen

$$\text{bzw. } \left. \begin{aligned} \log I_n(x) &= K + \log I_m(x) \\ \log I_n(y) &= K + \log I_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

liefern. Wir wollen dies zuerst in etwas anderer Form als HUBBLE es tut, nachweisen.

(15) hat zur Folge, daß die ersten Differenzen von $\log I(x)$ für alle Nebel die gleiche Funktion von x darstellen. In Abb. 2 sind die ersten Differenzen von $\log I(x)$ als Punkte und diejenigen von $\log I(y)$ als Kreuze gegen x bzw. $y/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ als Abszissen aufgetragen. Die Abbildung zeigt deutlich, daß die Streuungen um die Mittelwerte ganz im Bereich der Meßfehler liegen.

Es ist vielleicht nicht wertlos, an (15) noch die folgende Bemerkung zu knüpfen. Die Konstante K hängt offenbar, wie aus (11) oder (11a) folgt, von e_n und e_m , den Elliptizitäten der beiden Nebel ab. Gelänge es, absolute Intensitäten der Nebel zu bestimmen (befreit von einem Entfernungseffekt), so würde die Konstante K in Formel (15) den Vergleich der Elliptizitäten zweier Nebel ermöglichen. Wenn man also von *einem* Nebel die Elliptizität

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **71**, 244, Gleichung (2), 1930.

kennt, und das ist der Fall für Nebel der Klasse E 7 (die wir „von der Kante“ sehen), so gestattet (15) die Elliptizitäten aller anderen Nebel abzuleiten.

Aus der in (15) enthaltenen Beobachtungstatsache haben wir noch eine weitere Folgerung zu ziehen. In Verbindung mit (13) und (14) bedeutet sie, daß für alle Nebel die Funktionen $H(\alpha)/H(0)$ identisch sind — ein äußerst bemerkenswertes und gleichzeitig befremdendes Resultat. Wenn die Helligkeitsverteilung im Innern der elliptischen Nebel proportional der Dichte der

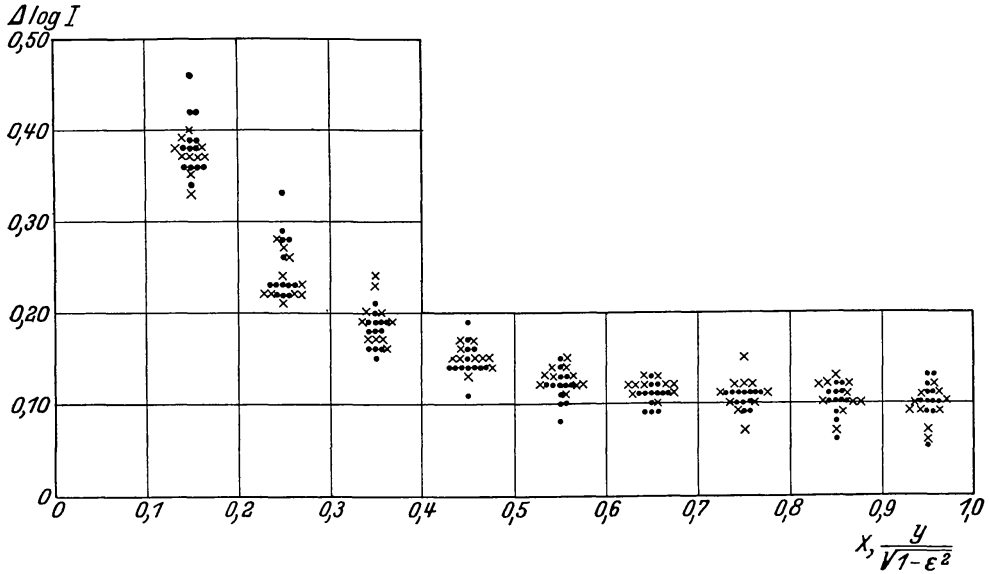


Abb. 2. Streuung der $\Delta \log I$ um Mittelwerte. ● große Achsen, × kleine Achsen.

Materie ist, so würden die Beobachtungen liefern, daß die Dichteverteilungen in allen Nebeln identisch sind, wenn man die Dichten jeweils in Einheiten der zentralen Dichten ausdrückt. Dies Resultat widerspricht aber vollkommen der Theorie der Gleichgewichtsfiguren stark kompressibler, rotierender Gasmassen, die nach JEANS weitgehend die Verhältnisse bei den elliptischen Nebeln beschreiben soll. Bei Gleichgewichtsfiguren ist nicht nur die *Form* der Flächen konstanter Dichte, sondern auch das *Gesetz* des Dichteabfalls von Fläche zu Fläche eine Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω , also verschieden für Figuren verschiedener Elliptizitäten. Die HUBBLESchen Beobachtungen führen deshalb, wenn man annimmt, daß aus dem Helligkeitsabfall auf den Dichteabfall geschlossen werden kann, zu der Konsequenz, daß alle elliptischen Nebel nahezu die gleiche Elliptizität besitzen. Und da wir wissen, daß es Nebel mit der Elliptizität E 7 gibt, so hätten wir zu schließen, daß alle elliptischen Nebel nahezu E 7-Nebel sind.

Andererseits hört der Integralansatz (1) offenbar auf richtig zu sein, wenn im Innern der Nebel wirkliche Absorptions- und Emissionsvorgänge in Betracht gezogen werden müssen, so daß jedem Punkt x, y in der Projektion eine optische Tiefe im Nebel entspricht, bis zu der wir in den Nebel hineinsehen können. Dann wäre aber die Beobachtungstatsache (15) noch unverständlicher wie zuvor, denn die optische Tiefe würde selbstverständlich erst recht stark abhängen von Elliptizität und Orientierung eines Nebels und es wäre nicht einzusehen, wie der Rotationseffekt und die Undurchsichtigkeit sich in solcher Weise kompensieren können, daß eine so vollständige Übereinstimmung in der Helligkeitsverteilung in den Projektionen von Nebeln verschiedener Elliptizitäten zustande kommen kann.

Wir wollen deshalb zunächst die Konsequenz nahezu gleicher Elliptizitäten aller Nebel etwas weiter verfolgen.

Im folgenden werden wir oft zwischen der Einteilung der Nebel nach der Exzentrizität ihrer Projektionen und nach ihrer Elliptizität im Raume zu unterscheiden haben. Um das Lesen zu erleichtern, sind *Elliptizitäten* und alle Größen, die sich auf diese beziehen, stets *Kursiv* gedruckt, also z. B. *E 0, E 1, . . ., E 7*.

5. *Wahrscheinlichkeit verschiedener Elliptizitäten unter den elliptischen Nebeln.* Bis zu einem gewissen Grade läßt sich die obige Konsequenz an anderen Beobachtungstatsachen prüfen. Wenn man annimmt, daß für die einzelnen Nebel a priori alle *Elliptizitäten* (*E 0, E 1, . . ., E 7*) gleich wahrscheinlich sind und daß die Nebel relativ zur Gesichtslinie willkürlich im Raume orientiert sind, so läßt sich auf einfache Weise mit Hilfe der Beziehung $\varepsilon = e \cdot \sin i$ zwischen der Exzentrizität (e) der Projektion, der *Elliptizität* (e) der Nebel und der Neigung (i) der Rotationsachse gegen die Gesichtslinie ausrechnen, welcher Prozentsatz von Nebeln einer bestimmten *Elliptizität* uns als Nebel mit einer bestimmten Exzentrizität ihrer Projektion erscheinen werden. Diese Rechnung hat HUBBLE in seiner ersten Arbeit durchgeführt.

Die folgende Tabelle 2, die seiner Arbeit entnommen ist *, gibt die Prozentsätze für Nebel der *Elliptizitäten* *E 0* bis *E 7* an, die auf die einzelnen Exzentrizitäten der Projektionen *E 0* bis *E 7* entfallen.

Die letzte horizontale Reihe gibt die auf Grund der gemachten Voraussetzungen gleicher Wahrscheinlichkeiten aller *Elliptizitäten* und willkürlicher Orientierung der Nebel, theoretisch zu erwartende Verteilung der Nebel über die verschiedenen Klassen *E 0* bis *E 7*, die die jeweilige Ex-

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **64**, 349, Tabelle 10.

Tabelle 2.
 Prozentsatz der Nebel bestimmter Elliptizität, die unter gegebener
 Exzentrizität erscheinen.

Exz. Eu.	E 0	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	Total
E 7	0,055	0,111	0,114	0,116	0,121	0,132	0,164	0,187	1,000
E 6	0,059	0,123	0,126	0,133	0,148	0,187	0,224	—	1,000
E 5	0,067	0,140	0,148	0,166	0,216	0,263	—	—	1,000
E 4	0,079	0,169	0,190	0,250	0,312	—	—	—	1,000
E 3	0,100	0,225	0,299	0,376	—	—	—	—	1,000
E 2	0,145	0,378	0,477	—	—	—	—	—	1,000
E 1	0,300	0,700	—	—	—	—	—	—	1,000
E 0	1,000	—	—	—	—	—	—	—	1,000
Total	1,805	1,846	1,354	1,041	0,797	0,582	0,388	0,187	8,000

zentrizität der Projektion charakterisieren. Diese theoretische Verteilung kann nun mit der beobachteten Verteilung verglichen werden. Wir setzen dabei voraus, daß die 85 von HUBBLE klassifizierten Nebel ein statistisch echtes Bild über die Verteilung der Nebel nach der Exzentrizität ihrer Projektionen geben. Eine, die statistische Echtheit verfälschende Auswahl der Objekte ist in diesem Falle kaum zu befürchten. Die 85 klassifizierten Objekte setzen sich wie folgt zusammen*:

Exzentrizität:	E 0	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7
Anzahl	17	13	14	10	13	6	7	5

Um vergleichbare Zahlen zu erhalten, drücken wir beide Verteilungen in Bruchteilen der Gesamtzahl aus und erhalten die folgenden Resultate:

Exzentrizität	E 0	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7
Theorie . .	0,226	0,231	0,169	0,130	0,100	0,073	0,049	0,023
Beobachtung	0,200	0,153	0,165	0,117	0,153	0,071	0,082	0,059
<i>F</i>	0,88	0,66	0,98	0,90	1,53	0,97	1,67	2,57

In der letzten Zeile ist der Faktor angegeben, mit dem der theoretisch zu erwartende Bruchteil zu multiplizieren ist, um den beobachteten zu erhalten. In Abb. 3 sind die theoretische (Punkte) und die beobachtete (Kreuze) Verteilung als Funktionen der Exzentrizität eingezeichnet. Es ist evident, daß die beobachteten Anzahlen von Nebeln verschiedener Exzentrizitäten keineswegs durch die gemachten Voraussetzungen gleicher Wahrscheinlichkeit aller *Elliptizitäten* (*E 0* bis *E 7*) und willkürlicher Orientierung der Nebel im Raume dargestellt werden können. Der Faktor *F*,

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **64**, 338, Tabelle 5.

der die Übereinstimmung erzwingt, läßt sich, wie Abb. 4 zeigt, mit befriedigender Genauigkeit durch die Interpolationsformel darstellen:

$$F = e^{0,17(i-2,8)},$$

wo i eine der ganzen Zahlen $0, 1, \dots, 7$ bedeutet. Diese Form von F legt nahe, daß die Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit aller *Elliptizitäten*

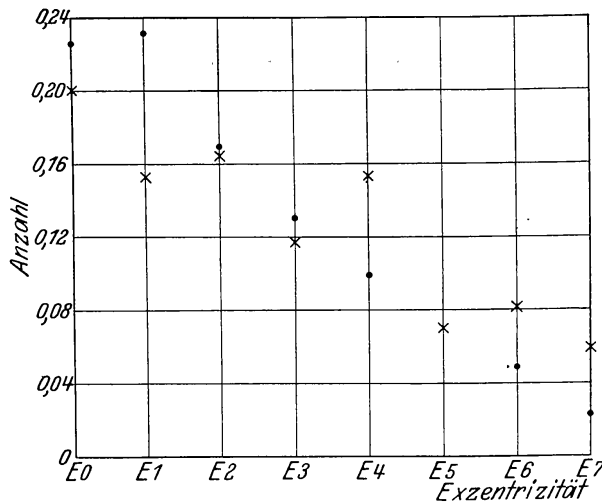


Abb. 3. Anzahl von Nebeln bestimmter Exzentrizitäten.
● theoretische und × beobachteten Anzahlen.

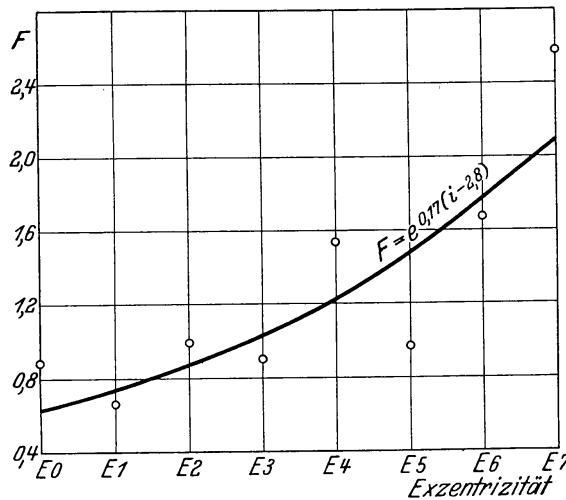


Abb. 4. Darstellung von F durch die Funktion $F = e^{0,17(i-2,8)}$.

$E0$ bis $E7$ nicht zutrifft. Wir wollen deshalb die Wahrscheinlichkeit, daß ein elliptischer Nebel die *Elliptizität* E_i besitzt, mit p_i bezeichnen. Es handelt sich dann darum, die p_i so zu bestimmen, daß Theorie und Beobachtungen übereinstimmen.

Nennen wir $N_t(E_j)$ die in der letzten Zeile der Tabelle 2 angegebenen theoretischen Verteilungszahlen, $N_b(E_j)$ die beobachteten ($j = 0, 1, \dots, 7$), so ist

$$N_b(E_j) = F(E_j) \cdot N_t(E_j).$$

Die Wahrscheinlichkeiten p_i lassen sich nun mit Hilfe von Tabelle 2 aus den acht linearen Gleichungen bestimmen:

$$\sum_{i=0}^7 p_i n_{ij} = N_t(E_j) \cdot e^{0,17(j-2,8)} \quad (j = 0, 1 \dots 7),$$

wobei n_{ij} den Bruchteil der Nebel mit der *Elliptizität* E_i bezeichnet, der uns als Nebel mit der Exzentrizität E_j am Himmel erscheint. Eine Auflösung dieser Gleichungen führt zu den folgenden Werten von p_i , die so ausgedrückt sind, daß $\sum_{i=0}^7 p_i = 1$ wird:

<i>Elliptizität</i> :	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
$p_i \dots$	0,067	0,060	0,068	0,084	0,097	0,143	0,203	0,274

Die Wahrscheinlichkeit, daß unter einer bestimmten Anzahl von elliptischen Nebeln ein Nebel mit der *Elliptizität* E_7 vorkommt, ist also viermal so groß als die Wahrscheinlichkeit dafür einen Kugelnebel (E_0) vorzufinden. Dies Resultat stimmt qualitativ überein mit der in § 4 aus den HUBBLESchen Beobachtungen gezogenen Schlußfolgerung, daß alle Nebel nahezu E_7 -Nebel sein müssen. Quantitativ jedoch scheint mir die Zunahme von p_i mit der *Elliptizität* E_i nicht groß genug zu sein, um die Identität aller beobachteten Helligkeitsverteilungen $H(\alpha)/H(0)$ zu erklären. Das geht am besten aus der der Tabelle 2 analogen Tabelle 3 hervor, die die Wahrscheinlichkeiten dafür angibt, daß unter allen Nebeln einer gegebenen Exzentrizität E_j ein Nebel einer bestimmten *Elliptizität* E_i vorkommt. Sie folgt unmittelbar aus Tabelle 2 und den Werten für p_i .

Aus dem Vergleich der Zahlen in der ersten Kolonne ist ersichtlich, daß es doch noch doppelt so wahrscheinlich ist, daß ein scheinbar runder Nebel (E_0) in Wirklichkeit ein Kugelnebel ist, als daß er den *Elliptizitätsklassen* E_5 bis E_7 angehört. Nun hat HUBBLE im ganzen vier E_0 -Nebel gemessen. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß darunter zwei Nebel mit Kugelsymmetrie, ein Nebel mit einer *Elliptizität* zwischen E_1 und E_4 und ein Nebel mit einer *Elliptizität* zwischen E_5 und E_7 enthalten sind. Zwar stimmen, wie HUBBLE betont, gerade bei den runden Bildern die individuellen Helligkeitsverteilungen nicht so gut überein, wie bei allen anderen Bildern.

Tabelle 3.
Wahrscheinlichkeiten für Nebel verschiedener Elliptizitäten.

$E_i \backslash E_j$	E 0	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	Total
<i>E 7</i>	0,101	0,170	0,202	0,229	0,265	0,321	0,497	1,000	2,785
<i>E 6</i>	0,080	0,140	0,165	0,195	0,240	0,337	0,503	—	1,660
<i>E 5</i>	0,066	0,115	0,141	0,175	0,253	0,342	—	—	1,092
<i>E 4</i>	0,051	0,091	0,120	0,174	0,242	—	—	—	0,678
<i>E 3</i>	0,056	0,105	0,162	0,227	—	—	—	—	0,550
<i>E 2</i>	0,066	0,143	0,210	—	—	—	—	—	0,419
<i>E 1</i>	0,121	0,236	—	—	—	—	—	—	0,357
<i>E 0</i>	0,459	—	—	—	—	—	—	—	0,459
Total	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	8,000

Trotzdem sehe ich in der relativ geringen Zunahme der p_i mit den E_i eine gewisse Schwierigkeit, um die auffallende Übereinstimmung aller Funktionen $H(\alpha)/H(0)$ auf Grund der Annahme nahezu gleicher *Elliptizitäten* aller Nebel zu erklären. Vielmehr glaube ich, daß wir aus der HUBBLESchen Beobachtungstatsache (15) zu folgern haben, daß das *Gesetz* des Helligkeitsabfalls im Innern der Nebel (nicht dagegen die *Form* der isophoten Flächen), wenn überhaupt, nur sehr wenig von der Dichteverteilung der Materie im Nebel, also auch von seiner *Elliptizität* abhängt. Eine Beschreibung der Nebel als Gleichgewichtsfiguren einer stark kompressiblen, rotierenden Gasmasse in dem Sinne, daß die Helligkeitsverteilung im Innern in erster Linie durch die Dichteverteilung der Materie festgelegt wird (wie das der Fall wäre, wenn ein Nebel eine durch die große Entfernung nicht mehr aufzulösende Wolke von Sternen wäre), vermag die wirklichen Verhältnisse nicht darzustellen.

Wie weit andererseits Ungenauigkeiten und systematische Fehler in der HUBBLESchen photometrischen Reduktionsmethode, wenn solche nennenswert vorhanden sind, individuelle Verschiedenheiten der Funktionen $H(\alpha)/H(0)$ zu verdecken vermögen, ist schwer zu beurteilen.

HUBBLE hat Tabelle 2 in ganz anderer Weise verwendet, nämlich zur Berechnung der Anteile von Nebeln bestimmter *Elliptizitäten*, aus denen sich die beobachteten Anzahlen von Nebeln mit bestimmter Exzentrizität der Projektionen wahrscheinlich zusammensetzen.* Dies ist aber nur dann sinnvoll, wenn die beobachteten Anzahlen von Nebeln mit Projektionen bestimmter Exzentrizität wirklich durch die Voraussetzungen, die Tabelle 2 zugrunde liegen, dargestellt werden können. Daß dies *nicht* der Fall ist, zeigt der systematische Verlauf des Faktors F mit der Exzentrizität.

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **64**, 350, Tabelle 11.

HUBBLES Ergebnisse, die JEANS zu einer theoretischen Betrachtung heranzieht*, sind vielmehr durch Tabelle 3 zu ersetzen. Die letzte Spalte dieser Tabelle gibt das beobachtete Verteilungsgesetz der *Elliptizitäten* unter den elliptischen Nebeln.

Wenn das Rotationsmoment eines Nebels von willkürlich gerichteten Strömungen im ursprünglichen Nebel, aus dem der elliptische Nebel durch Kontraktion hervorgegangen sein soll, her stammt, so ist, worauf JEANS aufmerksam machte*, für die Rotationsmomente verschiedener Nebel eine MAXWELLSche Verteilung zu erwarten: $N(M) dM \sim M^2 \cdot e^{-kM^2} \cdot dM$, wobei k eine positive Konstante bedeutet. (JEANS Gleichung 327,1 ist durch einen Druckfehler entstellt.) Nun ist M^2 proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω^2 , und dies ist wiederum proportional der *Elliptizität* E . Damit erhält man als Verteilungsgesetz der *Elliptizitäten*:

$$N(E) dE \sim E^{1/2} \cdot e^{-kE} \cdot dE$$

(JEANS Gleichung 327,2). Dabei ist wesentlich, daß k eine *positive* Konstante ist. Es ist ersichtlich, daß das in der letzten Spalte von Tabelle 3 angegebene Häufigkeitsgesetz keinen Exponentialfaktor mit positivem k , sondern einen solchen mit negativem k enthält. Wir schließen daraus, daß die Mehrzahl der Nebel schon weit von ihrem ursprünglichen Zustand entfernt sind, oder, wahrscheinlicher, daß die *Elliptizitäten* der Nebel nicht durch rein dynamische Vorgänge bestimmt werden.

6. *Das Gesetz des Helligkeitsabfalls im Innern elliptischer Nebel.* Um den wirklichen Helligkeitsabfall im Innern eines elliptischen Nebels zu bestimmen, haben wir in (13) die bis auf den Faktor $\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}}$ beobachtbare Funktion $\frac{dF(x)}{dx}$ einzusetzen und die Quadratur auszuführen. Tabelle 1 und Abb. 2 zeigen, daß es innerhalb der Meßgenauigkeit erlaubt ist, alle Helligkeitsverteilungen längs den verschiedenen Achsen der einzelnen Nebel in eine einzige mittlere Kurve zu vereinigen. Da für einen Nebel der Exzentrizität $E \approx 7$ der Faktor $\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-e^2}} = 1$ wird, so liegt es nahe, alle Messungen auf den Nebel N. G. C. 3115, einen $E \approx 7$ -Nebel, zu reduzieren. Die Kurven $\log I(x)$ bzw. $\log I(y)$ wurden deshalb längs der $\log I$ -Achse so lange verschoben, bis sie sich im Mittel am besten mit der Kurve für die große Achse von N. G. C. 3115 deckten. Tabelle 4 und Abb. 5 geben die so gewonnenen mittleren Intensitätsverteilungen längs

* J. H. JEANS, *Astronomy and Cosmogony* S. 348, § 327.

der großen und kleinen Achse der elliptischen Nebel wieder. Diese wurden schließlich noch in eine einzige mittlere Kurve vereinigt.

Mit Hilfe dieser mittleren Intensitätsverteilung in der Projektion der Nebel wurde der Verlauf von dI/dx auf numerischem Wege für das Intervall $0,1 \leq x \leq 1,0$ gewonnen. In der fünften Spalte von Tabelle 4 sind die Werte von $\log dI/dx$ angegeben. Es zeigte sich nach einigen Ver-

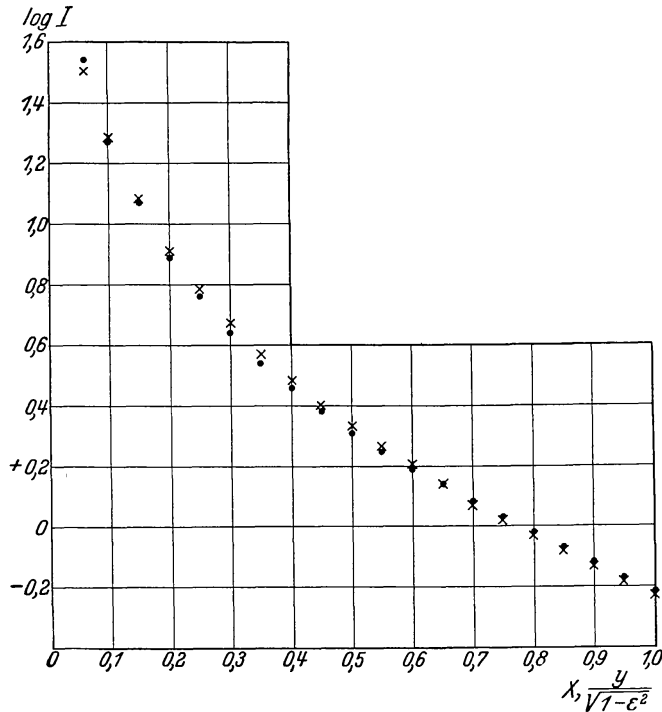


Abb. 5. Mittlere Intensitätsverteilung in elliptischen Nebeln:
● längs der großen Achsen, × längs der kleinen Achsen.

suchen, daß dI/dx in diesem Intervall mit hinreichender Genauigkeit durch die Interpolationsformel der Form

$$-dI/dx = a/x^\alpha \quad (16)$$

dargestellt werden kann. Eine Bestimmung der Konstanten a und α ist mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate möglich, wenn man (16) in der logarithmischen Form schreibt:

$$\log |dI/dx| = \log |a| - \alpha \cdot \log x.$$

Die Rechnung ergab, daß α nur ein wenig größer als 2 ist. Der späteren Rechnungen wegen wurde deshalb für α die Form

$$\alpha = 2 + 1/n$$

angenommen, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Auf diese Weise wurde die beste Darstellung der Beobachtungen erhalten mit den Werten

$$n = 4, \quad \log |a| = +0,143.$$

(16) nimmt also die Form an:

$$dI/dx = -1,39/x^{2+1/4}. \quad (17)$$

Tabelle 4.

Mittlere Intensitätsverteilung in der Projektion.

$x, \frac{y}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$	log I			log dI/dx	$\Delta \log dI/dx $ (R. - B.)
	große Achse	kleine Achse	Mittel		
0,06	+ 1,540	+ 1,503	+ 1,522	—	—
0,10	+ 1,272	+ 1,279	+ 1,276	—	—
0,125	—	—	—	+ 2,147	+ 0,028
0,15	+ 1,070	+ 1,079	+ 1,074	—	—
0,175	—	—	—	+ 1,898	- 0,052
0,20	+ 0,888	+ 0,908	+ 0,898	—	—
0,225	—	—	—	+ 1,604	- 0,003
0,25	+ 0,760	+ 0,782	+ 0,771	—	—
0,275	—	—	—	+ 1,425	- 0,020
0,30	+ 0,638	+ 0,671	+ 0,660	—	—
0,325	—	—	—	+ 1,297	- 0,056
0,35	+ 0,540	+ 0,567	+ 0,554	—	—
0,375	—	—	—	+ 1,107	- 0,006
0,40	+ 0,458	+ 0,479	+ 0,468	—	—
0,425	—	—	—	+ 0,991	- 0,011
0,45	+ 0,380	+ 0,398	+ 0,389	—	—
0,475	—	—	—	+ 0,869	+ 0,001
0,50	+ 0,310	+ 0,327	+ 0,318	—	—
0,525	—	—	—	+ 0,744	+ 0,029
0,55	+ 0,250	+ 0,262	+ 0,256	—	—
0,575	—	—	—	+ 0,674	+ 0,009
0,60	+ 0,192	+ 0,198	+ 0,195	—	—
0,625	—	—	—	+ 0,573	+ 0,029
0,65	+ 0,140	+ 0,141	+ 0,140	—	—
0,675	—	—	—	+ 0,556	- 0,028
0,70	+ 0,084	+ 0,074	+ 0,079	—	—
0,725	—	—	—	+ 0,428	+ 0,030
0,75	+ 0,030	+ 0,027	+ 0,028	—	—
0,775	—	—	—	+ 0,380	+ 0,013
0,80	- 0,020	- 0,029	- 0,024	—	—
0,825	—	—	—	+ 0,330	+ 0,002
0,85	- 0,070	- 0,083	- 0,076	—	—
0,875	—	—	—	+ 0,274	- 0,001
0,90	- 0,120	- 0,135	- 0,128	—	—
0,925	—	—	—	+ 0,193	+ 0,026
0,95	- 0,170	- 0,183	- 0,176	—	—
0,975	—	—	—	+ 0,164	+ 0,004
1,00	- 0,222	- 0,229	- 0,226	—	—

Die übrigbleibenden Reste $\Delta \log dI/dx$, im Sinne Rechnung minus Beobachtung, sind in der letzten Spalte von Tabelle 4 angegeben. Abb. 6 zeigt

die Darstellung der Beobachtungen durch die Interpolationsformel (17). Im Mittel, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, findet man:

$$\bar{\Delta} = \pm 0,019,$$

als mittlere Unsicherheit von $\log dI/dx$. Es ließe sich zweifellos noch eine etwas bessere Darstellung gewinnen, wenn für α die für die Rechnung bequeme Form mit ganzzahligem n aufgegeben würde. Jedoch scheint

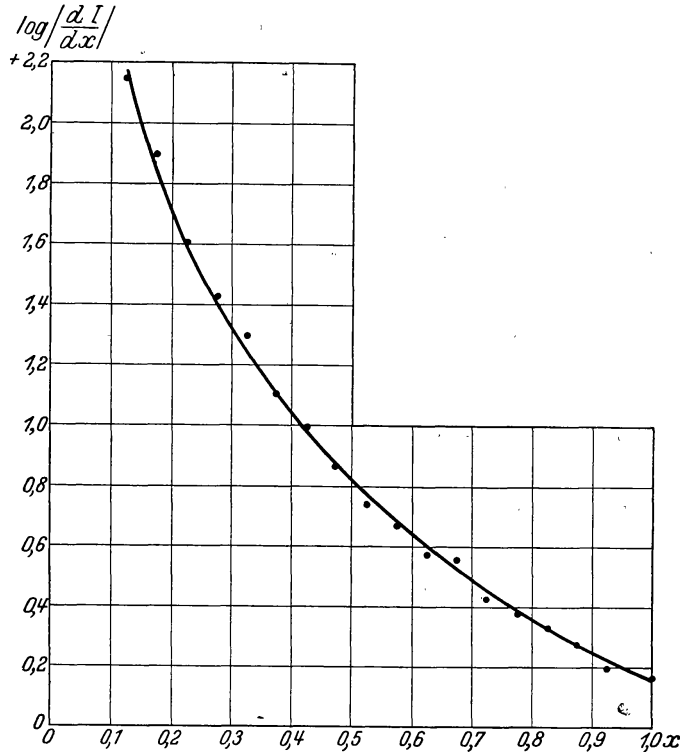


Abb. 6. Darstellung der Beobachtungen durch die Interpolationsformel

$$\log \left| \frac{dI}{dx} \right| = +0,143 - \left(2 + \frac{1}{4} \right) \log x.$$

mir die Darstellung mit $n = 4$ schon so gut zu sein, daß sie völlig innerhalb der durch die Unsicherheiten der Messungen gegebenen Grenzen bleibt.

Wir setzen (16) in der Form (gültig für $0,1 \leq x \leq 1,0$)

$$dI/dx = a/x^{2+1/n}$$

in (13) ein und führen die Quadratur aus. [Da wir ja alle Messungen auf N. G. C. 3115 reduziert haben, so ist $F(x) \equiv I(x)$.] Es wird

$$H(\alpha) = -\frac{a}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^{2+1/n} \cdot \sqrt{x^2 - \alpha^2}} \quad (0,1 \leq \alpha \leq 1,0)$$

oder

$$H(\alpha) = -\frac{a}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x^3 \sqrt{1 - \alpha^2/x^2}} \cdot \frac{dx}{x^{1/n}}.$$

Wir setzen

$$\frac{\alpha}{x} = \xi, \quad \frac{dx}{x^3} = -\frac{d\xi}{\alpha}.$$

Dann nimmt $H(\alpha)$ die Form an:

$$H(\alpha) = +\frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^{2+1/n}} \cdot \int_1^{\alpha} \frac{\xi^{1+1/n} \cdot d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Da ξ stets kleiner als 1 ist, so läßt sich $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$ in eine verhältnismäßig rasch konvergente Reihe entwickeln und man erhält

$$H(\alpha) = +\frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^{2+1/n}} \cdot \int_1^{\alpha} \left[\xi^{1+1/n} + \frac{1}{2} \xi^{3+1/n} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \xi^{5+1/n} + \dots \right] d\xi.$$

Gliedweise Integration liefert:

$$H(\alpha) = +\frac{a}{\pi} \cdot \frac{n}{\alpha^{2+1/n}} \cdot \left[\frac{\xi^{2+1/n}}{2n+1} + \frac{1}{2} \frac{\xi^{4+1/n}}{4n+1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\xi^{6+1/n}}{6n+1} + \dots \right]_1^{\alpha}.$$

Einsetzen der Grenzen ergibt endlich

$$H(\alpha) = -\frac{an}{\pi} \left[\frac{\Gamma}{\alpha^{2+1/n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{4n+1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\alpha^4}{6n+1} + \dots \right] \quad (0,1 \leq \alpha \leq 1,0). \quad (18)$$

Dabei bedeutet Γ die Konstante

$$\Gamma = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{4n+1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{6n+1} + \dots \quad (19)$$

Mit den aus der Ausgleichung gefundenen Zahlenwerten erhält man schließlich

$$\Gamma = +0,208,$$

und damit

$$H(\alpha) = +1,72 \left[\frac{+0,208}{\alpha^{2+1/4}} + 0,111 + 0,059\alpha^2 + 0,040\alpha^4 + 0,033\alpha^6 + \dots \right] \quad (20)$$

gültig für $0,1 \leq \alpha \leq 1,0$.

Eine Gerade beliebiger Richtung durch das Zentrum des Nebels schneidet eine isophote Fläche im Innern in zwei Punkten, die gleich weit vom Zentrum entfernt sind. Wir nennen den Abstand dieser Schnitt-

punkte vom Zentrum r . Dann gilt, wenn die isophoten Flächen konzentrische, koaxiale und ähnliche Rotationsellipsoide sind, bekanntlich, wenn man den Schnitt einer solchen Geraden mit zwei beliebigen isophoten Flächen betrachtet,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad (21)$$

wo r_i zum Schnittpunkt mit dem Ellipsoid mit der großen Achse α_i gehört.

(20) in Verbindung mit (21) zeigt, daß in den elliptischen Nebeln, solange der Abstand vom Zentrum nicht zu groß wird, die Helligkeit in jeder Richtung nahezu umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung abfällt. In der Entfernung $\alpha = 0,5$ vom Zentrum, also in der Mitte zwischen Zentrum und Rand, beträgt die Abweichung vom Gesetz $H(\alpha)/1,72 = 0,208/\alpha^2$ erst 8% und vom Gesetz $H(\alpha)/1,72 = 0,208/\alpha^{2+1/4}$ nur 2%.

Daß der Helligkeitsabfall im Innern elliptischer Nebel innerhalb der Meßgenauigkeit so nahe umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung verläuft, legt nahe, den physikalischen Zustand der Nebel in anderer Weise zu interpretieren. Die elliptischen Nebel dürften aus einem zentralen Kern bestehen, der als Lichtquelle dient, und dessen Licht in der ihn umgebenden Materie nicht merklich absorbiert und reemittiert, sondern gleichmäßig nach allen Seiten gestreut und reflektiert wird. In diesem Falle wäre die Identität der Funktionen $H(\alpha)/H(0)$ für alle untersuchten Nebel verständlich, da dann das Gesetz des Helligkeitsabfalls im Innern nicht durch die Dichteverteilung der Materie im Nebel bestimmt werden wird; vielmehr wird diese nur die Form der isophoten Flächen festlegen.

7. *Der physikalische Zustand elliptischer Nebel.* Die von HUBBLE empirisch gefundene Beziehung (15), die die Identität der Intensitätsverteilungen in den Projektionen aller elliptischen Nebel ausdrückt, bildet den Schlüssel zum Verständnis des physikalischen Zustandes dieser kosmischen Objekte. Sie führte uns in § 5 zu der Schlußfolgerung, daß elliptische Nebel keine, durch ihre große Entfernung nicht aufzulösende Sternwolken sein können. Zusammen mit den Resultaten von § 6 ermöglicht sie eine Abschätzung der maximalen, mittleren Dichte der Nebelmaterie, die das Licht des Kerns gleichmäßig nach allen Richtungen streut und reflektiert. Einen Maximalwert dieser Dichte erhält man offenbar aus der Überlegung, daß die Materie so dünn verteilt sein muß, daß der Nebel vom Rande bis zu derjenigen Entfernung vom Zentrum, wo das Gesetz (20

für den Helligkeitsabfall im Innern ungültig wird, völlig „durchsichtig“ sein muß. Die einzelnen Nebelteilchen dürfen somit einander nicht abschatten. Jede Abschattung würde, ebenso wie eine durch Absorption und Reemission hervorgerufene Undurchsichtigkeit, stark von Orientierung und *Elliptizität* der Nebel abhängen, und müßte sich deshalb in den Intensitätsverteilungen in den Projektionen der Nebel bemerkbar machen. Die allgemeine Gültigkeit von (20) für alle Nebel läßt nur die Schlußfolgerung völliger Durchsichtigkeit der Nebel für $0,1 \leq x \leq 1,0$ zu.

Wir nehmen an, daß die Nebelmaterie aus Teilchen besteht, die die Masse m und den Abschattungsquerschnitt s besitzen. Die maximale mittlere Dichte $\bar{\rho}'$ im durchsichtigen Teile der Nebel ist dann durch die Bedingung gegeben, daß in einem Zylinder mit dem Querschnitt s und einer Höhe von der Größenordnung des Nebelradius R nur *ein* Teilchen vorhanden sein darf, also $\bar{\rho}' = m/sR$.

Die elliptischen Nebel sind wahrscheinlich außergalaktische Objekte großer Dimensionen. Abschätzungen von HUBBLE* führen zu Radien der Nebel von der Größenordnung von 300 Parsec ($9 \cdot 10^{20}$ cm) und einer Totalmasse von der Ordnung 10^8 Sonnenmassen ($2 \cdot 10^{41}$ g). Mit diesen Werten erhält man eine über den ganzen Nebel gemittelte Dichte von der Größenordnung von $\bar{\rho} = 0,7 \cdot 10^{-22}$ g/cm³. Wenn wir annehmen, daß die Nebelmaterie gasförmig ist und den Abschattungsquerschnitt eines Gasatoms gleich dem theoretischen Querschnitt eines Sauerstoffatoms setzen ($s = 10^{-16}$ cm²), so erhalten wir mit $m = 2,6 \cdot 10^{-13}$ g und $R = 9 \cdot 10^{20}$ cm als die über die durchsichtigen Teile des Nebels gemittelte maximale Dichte

$$\bar{\rho}' \geq 0,3 \cdot 10^{-27} \text{ g/cm}^3.$$

Das Zeichen „>“ ist hinzugefügt, weil der hier angenommene Wert für s zweifellos zu groß ist. Es ist schwierig, einen genauen, effektiven Abschattungsquerschnitt für ein Gasatom anzugeben**. Der Wert $s = 10^{-20}$ cm² dürfte vielleicht eine untere Grenze bilden, so wie der Wert $s = 10^{-16}$ cm² eine obere Grenze bildet. Damit erhält man dann:

$$\bar{\rho}' \leq 0,3 \cdot 10^{-23} \text{ g/cm}^3.$$

Die wirkliche maximale Dichte der durchsichtigen Nebelteile dürfte mit sehr großer Wahrscheinlichkeit zwischen diesen beiden Extremwerten liegen.

* E. HUBBLE, *Astrophys. Journ.* **64**, 362.

** Man könnte daran denken, s aus dem Streukoeffizienten der RAYLEIGH-Formel zu gewinnen. Diese auf statistischer Grundlage beruhende Formel dürfte jedoch bei den hier in Betracht kommenden Dichten nicht mehr anwendbar sein.

Um etwas Bestimmtes im Auge zu behalten, setzen wir die mittlere Dichte der durchsichtigen Nebelteile von der Größenordnung $\bar{\rho}' \leq 10^{-25} \text{ g/cm}^3$ an. Die gesamte Masse dieser Teile ist also nur $3 \cdot 10^{38} \text{ g}$; so daß der weitaus größte Teil der Masse des Nebels im leuchtenden Kern konzentriert sein muß.

Die maximale Ausdehnung des Kerns ist offenbar durch diejenige Entfernung vom Zentrum gegeben, in der das Gesetz (20) für den Helligkeitsabfall im Innern anfängt gültig zu sein. Dies liefert

$$R_k \leq 0,1 \cdot R = 0,9 \cdot 10^{20} \text{ cm.}$$

Damit erhält man als Abschätzung der mittleren Dichte im Kern

$$\bar{\rho}'' \geq 0,7 \cdot 10^{-19} \text{ g/cm}^3.$$

Den mittleren Dichten $\bar{\rho}'$ und $\bar{\rho}''$ entsprechen mittlere freie Weglängen im Nebelgas. Nennen wir sie λ' und λ'' , so findet man der Größenordnung nach:

$$\lambda' \geq 10^{18} \text{ cm}$$

und

$$\lambda'' \leq 10^{12} \text{ cm.}$$

λ' wird also schon vergleichbar mit den Dimensionen der Nebel, während λ'' als klein gegenüber den Dimensionen des Kerns betrachtet werden darf. Wir folgern daraus, daß es sinnvoll ist, von einem Gasdruck im Kern des Nebels zu sprechen; daß dies aber kaum mehr zutreffen kann für die durchsichtigen Teile der Nebel.

Nach JEANS können die verschiedenen Nebel als Gleichgewichtsfiguren einer kompressiblen, rotierenden Gasmasse beschrieben werden. Dies führt jedoch zu den folgenden Schwierigkeiten. Nach den obigen Abschätzungen darf ein Nebel betrachtet werden als ein massiger Kern, der eine praktisch masselose Atmosphäre trägt. Bei kleinen Rotationsgeschwindigkeiten kann das Volumen der getragenen Atmosphäre sehr groß sein im Vergleich zum Volumen des Kerns. Es nimmt aber äußerst rasch ab mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit* und bei so großen *Elliptizitäten*, wie die elliptischen Nebel in ihrer Mehrzahl besitzen, kann das Volumen der Atmosphäre kaum mehr als ein Drittel des Volumens des Kernes betragen. Durchsichtigkeit ließe sich also nur für die äußersten Randteile eines Nebels erwarten, während die Beobachtungen zeigen, daß die Nebel über 90% ihrer Ausdehnung völlig durchsichtig sein müssen. Wir schließen also, daß, wenn auch die äußeren Formen der Nebel mit

* J. H. JEANS, *Astronomy and Cosmogony* S. 247, § 234.

den Formen der Gleichgewichtsfiguren kompressibler, rotierender Gasmassen übereinstimmen, die Theorie dieser Figuren kaum ein richtiges Bild vom physikalischen Zustand der Nebel zu geben vermag.

Der Widerspruch ist wohl darin zu suchen, daß λ' vergleichbar wird mit den Dimensionen eines Nebels, und deshalb die Gültigkeit der Theorie der Gleichgewichtsfiguren aufhört. Die großen *Elliptizitäten* der Nebel sind nicht durch Rotation allein erklärbar; vielmehr dürfte dabei Strahlungsdruck und Strahlungsviskosität eine Rolle spielen. Sobald λ' vergleichbar wird mit den Dimensionen eines Nebels, kann ein Rotationsmoment vom Zentrum zum Rande nur noch durch Strahlungsviskosität übertragen werden*.

Wesentlich schwieriger ist eine Beschreibung des physikalischen Zustandes des Kernes eines elliptischen Nebels. Bei der geringen mittleren Dichte des Kernes ist es wahrscheinlich, daß die Strahlungsenergie zum überwiegenden Teil durch Kontraktionsenergie gedeckt wird. Da auf den Kern die gastheoretischen Methoden sinnvoll angewandt werden dürfen, so kann die mittlere Energieerzeugung im Kern des Nebels berechnet werden. Sie muß proportional der Temperatur sein**. Es fragt sich nun, ob eine strahlende Masse von 10^8 Sonnenmassen stabil sein kann, denn Stabilität ist bei der großen Häufigkeit der elliptischen Nebel zu fordern. Wir betrachten einen kugelförmigen Nebel. Wie VOGT*** gezeigt hat, kann eine beliebig große Masse stabil sein, falls nur das Produkt aus dem Absorptionskoeffizienten und der mittleren Energieerzeugung durch die ganze Masse konstant ist. Soll der Nebel stabil sein, so muß also der Absorptionskoeffizient k umgekehrt proportional der Temperatur sein. Aus allgemeinen physikalischen Überlegungen folgt aber****, $k \sim \rho/T^3$. Bei adiabatischem Aufbau des Kernes muß dieser also das Aufbaugesetz $\rho \sim T^2$ befolgen. Da aber in diesem Falle $\rho \sim T^{1/\gamma-1}$ ist, so folgt ein Aufbau mit $\gamma = 3/2$, als Verhältnis der spezifischen Wärmen. Für ein einatomiges Gas ist $\gamma = 5/3$, während Strahlung bekanntlich als ein Gas mit $\gamma = 4/3$ aufgefaßt werden kann. Es ist bemerkenswert, daß der für stabilen Aufbau notwendige Wert von $\gamma = 3/2$ in der Mitte zwischen den Werten für ein einatomiges Gas und für Strahlung liegt. Stabilität scheint deshalb nicht

* Siehe z. B. E. A. MILNE, *Thermodynamics of the Stars*. Handb. d. Astrophys. **3**, erste Hälfte, 235ff.

** E. A. MILNE, *Thermodynamics of the Stars*. Handb. d. Astrophys. **3**, erste Hälfte, 200, § 52.

*** H. VOGT, *Veröffentlichungen der Universitätssternwarte Jena*, Nr. 2.

**** A. S. EDDINGTON, *The internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press 1926, S. 219.

unmöglich zu sein. Diese Überlegungen setzen voraus, daß die Dichte des Kerns wenigstens in den inneren Teilen schon groß genug ist, damit er sich in lokalem, thermodynamischem Gleichgewicht (Gültigkeit des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes) befinden kann, und daß sie aber andererseits noch so gering ist, daß andere Energiequellen gegenüber derjenigen der Kontraktion vernachlässigt werden können. Diese Voraussetzungen scheinen nicht unwahrscheinlich zu sein.

Prof. H. H. PLASKETT sowie Dr. R. O. REDMAN habe ich für wertvolle Diskussionen bestens zu danken. Dr. J. S. PLASKETT, Direktor des Dominion Astrophysical Observatory, sowie der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft bin ich für die Möglichkeit eines Aufenthaltes in Victoria, B. C., zu großem Dank verpflichtet.

Victoria, B. C., Dominion Astrophysical Observatory, August 1930.