APPLICATION PRATIQUE DES MÉTHODES DE M. SUNDMAN A UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Par M. D. BELORIZKY.

1. Changements de variables de M. Sundman. — Dans un travail célèbre [1] M. Sundman a pu résoudre le Problème des trois corps en introduisant, au lieu du temps t, une autre variable ω déterminée par la relation

$$dt = \Gamma\, d\omega,$$

où

$$t = 0 \quad \text{pour} \quad \omega = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_0}{l}}\right)\left(1 - e^{-\frac{r_1}{l}}\right)\left(1 - e^{-\frac{r_2}{l}}\right),$$

r_0, r_1, r_2 étant les distances mutuelles des trois corps, e la base des logarithmes naturels et l une constante. Cela étant, les coordonnées des trois corps, leurs distances et le temps sont des fonctions holomorphes de ω dans une bande de largeur 2Ω comprise entre deux droites parallèles à l'axe réel et symétriques par rapport à cet axe, *quels que soient les chocs*. Ces développements sont possibles si les masses des trois corps sont finies et si les constantes des aires ne sont pas toutes égales à zéro. Dans ces conditions, on peut déterminer les constantes l et Ω par les formules appropriées de M. Sundman, dès que l'on se donne les coordonnées et les vitesses des corps pour un instant donné.

En introduisant maintenant une nouvelle variable θ par la transformation de Poincaré,

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{e^{\frac{\omega\pi}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\omega\pi}{2\Omega}} + 1} = \mathrm{Th}\,\frac{\pi\omega}{4\Omega},$$

les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps ainsi que ω sont développables suivant les puissances de θ si $|\theta| < 1$. Et les valeurs réelles de θ entre -1 et $+1$ correspondent aux valeurs réelles de t entre $-\infty$ et $+\infty$.

---

[1] *Mémoire sur le Problème des trois corps* (*Acta mathematica*, t. 36, 1912, p. 105-179).

2. Calcul des constantes. — Ω et l se déterminent de la façon suivante :

Soient P_0, P_1, P_2 les trois corps dont les masses sont m_0, m_1, m_2. Prenons des axes de coordonnées de direction fixe. Soient x, y, z les coordonnées de P_1 par rapport à P_0 et ξ, η, ζ les coordonnées de P_2 par rapport au centre de gravité des corps P_0 et P_1.

Soient

$$R^2 = \frac{r_0^2}{m_0} + \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2}$$

et K la constante des forces vives :

$$g\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + h\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] = 2U - K,$$

U étant l'expression

$$\frac{M}{m_0 r_0} + \frac{M}{m_1 r_1} + \frac{M}{m_2 r_2},$$

où

$$M = m_0 + m_1 + m_2,$$

$$g = \frac{M}{m_2(m_0 + m_1)} \quad \text{et} \quad h = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}.$$

Les intégrales des aires sont alors

$$g\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + h\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) = ghc_0,$$

$$g\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + h\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right) = ghc_1.$$

$$g\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + h\left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right) = ghc_2.$$

Soit

$$f = \sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}\, gh = \sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}\, \frac{M}{m_0 m_1 m_2};$$

suivant les hypothèses faites, f est fini et positif.

On détermine alors une nouvelle constante auxiliaire L par les formules suivantes :

Si $K < 0$,

$$L = \frac{f^2 R_0}{\left(R_0 \dfrac{dR_0}{dt}\right)^2 + f^2}.$$

Si $K > 0$, L est la plus petite des deux expressions

$$\left(\frac{fm}{8+\frac{1}{32}f\sqrt{\mathrm{KM}}}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{M}\sqrt{\mathrm{M}}} \quad \text{et} \quad \frac{f^2\mathrm{R}_0}{\left(\mathrm{R}_0\dfrac{d\mathrm{R}_0}{dt}\right)^2+2\mathrm{K}\mathrm{R}_0^2+f^2},$$

m étant la plus petite des trois masses et R_0 la valeur de R à l'instant initial. Les unités doivent être choisies de façon que la constante de Gauss $k=\sqrt{f}$ soit égale à 1.

Une fois L obtenu, on détermine l par la formule

$$l=\frac{1}{3}\sqrt{m}\,\mathrm{L}.$$

Posant maintenant

$$\varkappa_1=\frac{2}{29}l=\frac{2}{87}\sqrt{m}\,\mathrm{L},$$

Ω résulte alors de la formule

$$\Omega=\frac{\varkappa_1\sqrt{\dfrac{3\varkappa_1}{\mathrm{M}}}}{\dfrac{15}{8}\dfrac{\mathrm{M}}{m}+\dfrac{3}{2m}\mathrm{G}^2\varkappa_1+\dfrac{9}{2}\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{M}\varkappa_1}+\dfrac{3}{4}|\mathrm{K}|\varkappa_1+224\sqrt{16\dfrac{\mathrm{M}}{m}+3|\mathrm{K}|\varkappa_1}},$$

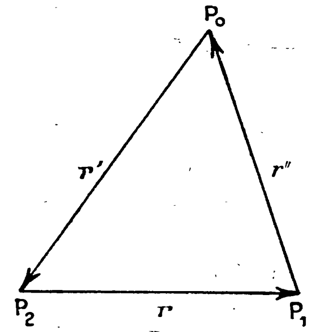
où

$$\mathrm{G}=\frac{1}{14\varkappa_1}\sqrt{\frac{9}{2m^2}(c_0^2+c_1^2+c_2^2)+\left(775+\frac{3\mathrm{M}}{m}\right)\mathrm{M}\varkappa_1\left(\frac{1}{29}+\frac{\mathrm{M}}{4m}+\frac{\varkappa_1}{16}|\mathrm{K}|\right)}.$$

3. **Application au cas de Lagrange (triangle équilatéral).** — Quand on a ainsi calculé les constantes l, Ω, on en déduit les séries en θ par différentiation successive des équations du mouvement des trois corps. Dans le cas général, ces séries sont très compliquées. On peut se demander si elles convergent assez rapidement pour présenter un réel intérêt pratique. Pour essayer de nous en faire une idée, prenons un cas où ces séries puissent s'obtenir immédiatement et où l'on connaisse la solution rigoureuse du problème des trois corps pour tous les temps, par exemple le cas du triangle équilatéral de Lagrange. Alors, en calculant les constantes l, Ω et en substituant à la variable t la variable θ dans la solution du problème, on obtient immédiatement les séries cherchées.

En formant des combinaisons linéaires des variables x, ξ; y, η; z, ζ, on ne change pas les rayons de convergence. Par conséquent l, Ω restent les mêmes si, au lieu des coordonnées $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, on en prend d'autres liées à celles-ci par des combinaisons linéaires.

Dans ce qui suit nous appellerons x, y, z les coordonnées de P_1 par rapport à P_2, x', y', z' les coordonnées de P_2 par rapport



à P_0 et x'', y'', z'' les coordonnées de P_0 par rapport à P_1, ces coordonnées étant comptées parallèlement à trois axes rectangulaires *fixes*.

En choisissant comme unité de distance l'unité astronomique, comme unité de masse la somme des masses Soleil-Terre-Lune et en prenant la constante de Gauss $k = \sqrt{f} = 1$, on trouve que l'année sidérale est égale à 2π.

Prenons $m_0 = m_1$,

$$m_0 + m_1 + m_2 = M = 1.$$

Soient, pour $t = 0$,

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0;$$

$$x'_0 = -\frac{1}{2}, \qquad y'_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z'_0 = 0;$$

$$x''_0 = -\frac{1}{2}, \qquad y''_0 = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z''_0 = 0;$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 1, \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0;$$

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \left(\frac{dy'}{dt}\right)_0 = -\frac{1}{2}, \qquad \left(\frac{dz'}{dt}\right)_0 = 0;$$

$$\left(\frac{dx''}{dt}\right)_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \left(\frac{dy''}{dt}\right)_0 = -\frac{1}{2}, \qquad \left(\frac{dz''}{dt}\right)_0 = 0;$$

c'est-à-dire que nous supposons qu'à l'instant initial les trois corps forment un triangle équilatéral.

Soient

$$V=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}; \qquad V'=\sqrt{\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2};$$

$$V''=\sqrt{\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz''}{dt}\right)^2};$$

on voit que

$$V_0=V'_0=V''_0=1.$$

On a

$$V^2=\frac{2M}{r}-\varkappa,$$

où $\varkappa$ est une constante. On trouve $\varkappa=1$, car $M=1$, $V_0^2=1$ et $r_0=1$.

On sait (¹) que chaque corps décrit, par rapport à chacun des deux autres, une ellipse dont le demi-grand axe $a=\frac{M}{\varkappa}$ et l'excentricité e sont donnés par la formule

$$a^2(1-e^2)=\frac{\rho_0^2}{3\varkappa},$$

où ρ_0 est une constante déterminée par l'équation

$$V^2r^2-\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{1}{3}\rho_0^2.$$

Dans notre cas, $a=1$ et $e=0$. Par conséquent le triangle reste invariable et chaque corps décrit par rapport à chacun des deux autres un cercle de rayon égal à 1 avec la vitesse 1 et une période de rotation égale à 2π, soit une année sidérale. Les équations du mouvement sont alors

$$r=r_1=r_2=1,$$

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t, \qquad z=0;$$

$$x''=\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right), \qquad y''=\sin\left(t+\frac{2\pi}{3}\right), \qquad z''=0;$$

$$x'=\cos\left(t+\frac{4\pi}{3}\right), \qquad y'=\sin\left(t+\frac{4\pi}{3}\right), \qquad z'=0.$$

(¹) *Voir*, par exemple, TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, p. 128.

4. Développements en séries. — Nous nous proposons maintenant de développer par la méthode de Sundman le temps t et les coordonnées x, y du corps P_1 en séries valables pour tous les temps et ordonnées suivant les puissances de θ. Dans le cas considéré, $\Gamma = \left(1 - e^{-\frac{1}{l}}\right)^3$ est une constante.

Par conséquent

$$t = \Gamma\omega \qquad \text{et} \qquad t = \frac{\Gamma 2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta} = A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}$$

et les séries cherchées sont

$$\text{(I)} \qquad t = 2A\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \ldots + \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right),$$

$$\text{(II)} \quad x = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots$$

$$= 1 - 2A^2\theta^2 - \left(\frac{4}{3}A^2 - \frac{2}{3}A^4\right)\theta^4 - \left(\frac{46}{45}A^2 - \frac{8}{9}A^4 + \frac{4}{45}A^6\right)\theta^6 - \ldots,$$

$$\text{(III)} \qquad y = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots$$

$$= 2A\theta + \left(\frac{2A}{3} - \frac{4}{3}A^3\right)\theta^3 + \left(\frac{2A}{5} - \frac{4}{3}A^3 + \frac{4}{15}A^5\right)\theta^5$$

$$+ \left(\frac{2A}{7} - \frac{56}{45}A^3 + \frac{4}{9}A^5 - \frac{8}{315}A^7\right)\theta^7 + \ldots.$$

Pour avoir les coefficients numériques de ces séries, il nous faut calculer la constante $A = \frac{\Gamma \times 2\Omega}{\pi}$. Ainsi nous sommes ramenés au calcul des constantes l et Ω. Nous supposerons dans ce qui suit que la masse m_2 est la plus grande des trois masses. Par conséquent, les masses égales m_0 et m_1 sont au plus égales à $\frac{1}{3}$.

Dans notre cas

$$R = R_0 = \sqrt{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \sqrt{\frac{2}{m_1} + \frac{1}{1-2m_1}},$$

R étant constant, on peut prendre $L = R$. Alors

$$l = \frac{1}{3}\sqrt{2 + \frac{m_1}{1-2m_1}}.$$

On sait que

$$\frac{d^2R^2}{dt^2} = 2(U - K).$$

Or

$$\frac{d^2 R^2}{dt^2} = 0,$$

par conséquent

$$K = U = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = R_0^2 > 0.$$

En écrivant l'intégrale des aires, on a

$$\frac{1}{m_0}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \frac{1}{m_1}\left(x'_1\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{1}{m_2}\left(x''\frac{dy''}{dt} - y''\frac{dx''}{dt}\right) = \bar{c};$$

d'où

$$\bar{c} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = R_0^2.$$

Il est facile de montrer que

$$\bar{c} = ghc_0 = \frac{M}{m_0 m_1 m_2} c_0.$$

Par conséquent

$$c_0 = m_1 m_2 + m_0 m_2 + m_1 m_0 = m_1(2 - 3m_1); \qquad c_1 = 0; \qquad c_2 = 0.$$

Ainsi nous avons K, c_0 et l en fonction de m_1, valeur commune des deux plus petites masses. Cela étant nous pouvons exprimer G et Ω en fonction de cette masse. Nous considérerons trois cas :

$$1^\circ \quad m_1 = \frac{1}{200}; \qquad 2^\circ \quad m_1 = \frac{1}{10}; \qquad 3^\circ \quad m_1 = \frac{1}{3}.$$

En effectuant les calculs numériques pour ces trois cas on trouve les valeurs correspondantes de Ω,

$$\Omega_1 < 9 \times 10^{-8}, \qquad \Omega_2 < 4 \times 10^{-6} \qquad \text{et} \qquad \Omega_3 < 10^{-5} \ (^1).$$

---

(1) Nous avons pris pour simplifier $L = R_0$, en tenant compte de ce que, ainsi que M. Sundman le démontre, L est la limite inférieure de R. Dans notre cas R reste constant, mais dans le cas général on ne sait pas d'avance comment varie R. Il faut alors appliquer les formules indiquées plus haut en se basant sur le signe de K. Dans notre cas $K > 0$, il fallait donc prendre pour L la plus petite des deux quantités

$$\left(\frac{fm}{8 + \frac{1}{32} f\sqrt{KM}}\right)^2 \frac{1}{M\sqrt{M}} \qquad \text{et} \qquad \frac{f^2 R_0}{\left(R_0 \frac{dR_0}{dt}\right)^2 + 2KR_0 + f^2}.$$

Comme f est égal à $\bar{c} = R_0^2$, $R_0 \frac{dR_0}{dt} = 0$, la première expression a pour valeur et l'on a définitivement les valeurs de $A = \frac{\Gamma \times 2\Omega}{\pi}$;

$$A_1 < 4 \times 10^{-8}; \quad A_2 < 2 \times 10^{-6}; \quad A_3 < 4 \times 10^{-6}.$$

5. Calcul des séries. Lemme. — Supposons qu'on veuille avoir les coordonnées x, y du corps P_1 pour l'époque $t = 1$, c'est-à-dire au bout de deux mois environ, avec *une seule* décimale exacte, en se servant des séries en θ : (I), (II) et (III). Le nombre de termes qu'il faudra calculer sera un criterium de la convergence des séries considérées.

Avant d'aller plus loin, nous démontrerons un lemme dont nous aurons bientôt à nous servir.

Soit une série convergente,

$$(1) \qquad \varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots \qquad \text{pour } |t| \leq R.$$

Supposons qu'on fasse la substitution

$$(2) \qquad t = b_0 + b_1 \theta + b_2 \theta^2 + \ldots + b_n \theta^n + \ldots$$

(2) étant également une série convergente pour $|\theta| < \rho$.

En effectuant la substitution, on aura la série

$$(3) \qquad \varphi(t) = \psi(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \ldots + \alpha_n \theta^n + \ldots,$$

qui converge tant que $|\theta| < \rho_1 \leq \rho$ ($\rho_1 = \rho$ si $R = \infty$).

$m^2\left(\frac{R_0^2}{8 + \frac{1}{32}R_0^3}\right)^2$ et la seconde $\frac{R_0}{3}$. Le minimum de $\frac{R_0}{3}$ est égal à 1, la première expression est toujours plus petite que $8m^2 < 1$. Par conséquent il nous fallait prendre

$$L = m^2\left(\frac{R^2}{8 + \frac{1}{32}R^3}\right)^2$$

et l'on aurait obtenu pour Ω_1, Ω_2 et Ω_3 des valeurs beaucoup plus petites que celles indiquées plus haut et résultant de l'hypothèse $L = R_0$. Remarquons encore qu'en prenant $L = R_0$ nous avons procédé comme si K était négatif, car l'expression

$$L = \frac{f^2 R_0}{\left(R_0 \frac{dR_0}{dt}\right) + f^2}$$

prend la valeur R_0 si $R_0 \frac{dR_0}{dt} = 0$.

Considérons une valeur de θ pour laquelle la série (3) est convergente. Cela étant, supposons qu'on veuille calculer la somme de cette série avec une erreur absolue plus petite que α, α étant un nombre donné d'avance. Montrons qu'on peut substituer à la série (3) un polynome obtenu de la façon suivante :

Prenons dans la série (1) $k+1$ termes et remplaçons-y t par le polynome de degré n, $b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + \ldots + b_n\theta^n$, qu'on obtient en prenant dans la série (2) les $n+1$ premiers termes. Au lieu de la série (3), on aura alors le polynome

$$\begin{aligned}P_{k+1} = a_0 + a_1(b_0 + b_1\theta + \ldots + b_n\theta^n)\\ + a_2(b_0 + b_1\theta + \ldots + b_n\theta^n)^2 + \ldots + a_k(b_0 + b_1\theta + \ldots + b_n\theta^n)^k\end{aligned}$$

et ce polynome, pour n et k suffisamment grands, donnera $\varphi(t) = \psi(\theta)$, θ étant donné, avec une erreur absolue plus petite que α [1].

Soit h l'erreur que l'on commet quand on arrête la série (2) aux $n+1$ premiers termes.

On a

$$t - h = b_0 + b_1\theta + \ldots + b_n\theta^n$$

et

$$(4)\quad \varphi(t-h) = a_0 + a_1(t-h) + a_2(t-h)^2 + \ldots + a_n(t-h)^n + \ldots.$$

On peut écrire

$$\varphi(t-h) = P_{k+1} + \Delta_{t-h}^{k+1},$$

où Δ_{t-h}^{k+1} est le reste de la série (4) quand on a pris la somme de $k+1$ termes; d'où

$$P_{k+1} = \varphi(t-h) - \Delta_{t-h}^{k+1}.$$

On en déduit la valeur absolue de l'erreur commise :

$$|E| = |\psi(\theta) - P_{k+1}| = |\varphi(t) - P_{k+1}| = |\varphi(t) - \varphi(t-h) + \Delta_{t-h}^{k+1}|;$$

d'où

$$\big|\,|\varphi(t) - \varphi(t-h)| - |\Delta_{t-h}^{k+1}|\,\big| \leqq |E| \leqq |\varphi(t) - \varphi(t-h)| + |\Delta_{t-h}^{k+1}|.$$

---

[1] On voit bien que nous avons affaire ici à des *sinus* et *cosinus*, sur lesquels les erreurs sont évidemment du même ordre que celle commise sur la variable t; mais dans des cas plus généraux il n'en serait pas de même. C'est pourquoi nous procédons comme on le voit dans le texte.

On a

$$\Delta_{t-h}^{k+1} = \Delta_t^{k+1} - h\,\Delta_{t[t-\gamma h]}^{\prime [k+1]}$$

et

$$\varphi(t) - \varphi(t-h) = h\varphi'_t(t-\gamma_1 h),$$

γ, γ_1 sont des quantités comprises entre o et 1;
Δ_t^{k+1} est le reste de la série (1) quand on prend la somme des $k+1$ premiers termes.

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\mathrm{E}| &\leqq |h|\,|\varphi'_t(t-\gamma_1 h)| + |h|\,|\Delta_{t[t-\gamma h]}^{\prime [k+1]}| + |\Delta_t^{k+1}| \\ &= |h| \left\{ |\varphi'_t(t-\gamma_1 h)| + |\Delta_{t[t-\gamma h]}^{\prime [k+1]}| \right\} + |\Delta_t^{k+1}|. \end{aligned}$$

Pour avoir $|\mathrm{E}| \leqq \alpha$, nous n'avons qu'à faire $|h|$ suffisamment petit de façon que

$$|h| \left\{ |\varphi'_t(t-\gamma_1 h)| + |\Delta_{t[t-\gamma h]}^{\prime [k+1]}| \right\} + |\Delta_t^{k+1}| \leqq \alpha;$$

d'où

$$|h| \leqq \frac{\alpha - |\Delta_t^{k+1}|}{|\varphi'_t(t-\gamma_1 h)| + |\Delta_{t[t-\gamma h]}^{\prime [k+1]}|}.$$

On voit que, pour que cette relation soit possible, il faut que φ'_t soit fini dans le voisinage de t; et de plus, il faut prendre k assez grand pour avoir $\alpha - |\Delta_t^{k+1}| > 0$.

S'il existe un nombre M tel que $|\varphi'_t| < \mathrm{M}$ quelque soit t et si l'on peut trouver $\Delta(t, k)$ tel que

$$|\Delta_{t[t-\gamma h]}^{\prime [k+1]}| < \Delta(t, k),$$

en prenant

$$|h| \leqq \frac{\alpha - |\Delta_t^{k+1}|}{\mathrm{M} + \Delta(t, k)}$$

on aura *a fortiori* $|\mathrm{E}| < \alpha$.

En résumé, si l'on prend

$$|h| \leqq \frac{\alpha - |\Delta_t^{k+1}|}{|\varphi'_t(t-\gamma_1 h)| + |\Delta_{t[t-\gamma h]}^{\prime [k+1]}|},$$

on a

$$\big|\,|\varphi(t) - \varphi(t-h)| - |\Delta_{t-h}^{k+1}|\,\big| \leqq |\mathrm{E}| \leqq \alpha,$$

C. Q. F. D.

6. **Application au cas envisagé.** — Appliquons ceci à nos séries (II) et (III). Si l'on veut calculer x, y avec *une* décimale exacte, alors $|\mathrm{E}| < 0{,}1$.

Pour $t = 1$,

$$0 < \theta = \frac{e^{\frac{1}{A}} - 1}{e^{\frac{1}{A}} + 1} < 1,$$

et

$$t - h = 2A\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \ldots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}\right),$$

h étant > 0.

Prenons la série (II) ordonnée suivant les puissances de t :

$$x = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots \pm \frac{t^{2k}}{(2k)!} \mp \frac{t^{2(k+1)}}{(2k+2)!} \pm \ldots$$

On a

$$|\Delta_t^{k+1}| < \frac{t^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

et pour $t = 1$,

$$|\Delta_t^{k+1}| < \frac{1}{(2k+2)!},$$

$$|\varphi_t'(t - \gamma_1 h)| = |\sin(t - \gamma_1 h)| < \sin t = \sin 1 < 0{,}9; \quad |\Delta_{t(t-\gamma_1 h)}'^{(k+1)}| < \frac{1}{(2k+1)!}.$$

Ainsi si l'on prend

$$\alpha = 0{,}1 \qquad \text{et} \qquad h \leqq \frac{0{,}1 - \dfrac{1}{(2k+2)!}}{0{,}9 + \dfrac{1}{(2k+1)!}},$$

on aura $|E| < 0{,}1$, si k est suffisamment grand.

Prenons $k = 2$, alors $h \leqq 0{,}108$. En prenant $h = 0{,}1$ on aura $|E| < 0{,}1$ et $|E| > 0.079$.

Ainsi, au lieu de calculer la série (II),

$$x = 1 - 2A^2\theta^2 - \left(\frac{4}{3}A^2 - \frac{2}{3}A^4\right)\theta^4 - \ldots,$$

on peut obtenir sa valeur à $\frac{1}{10}$ près en développant le polynome

$$(\mathrm{P_{II}}) \qquad x = 1 - \frac{\left[2A\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \ldots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}\right)\right]^2}{2!} + \frac{\left[2A\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \ldots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}\right)\right]^4}{4!},$$

si l'on prend n assez grand pour que le reste

$$2\,\mathrm{A}\left(\frac{\theta^{2n+1}}{2n+1}+\frac{\theta^{2n+3}}{2n+3}+\ldots\right)$$

soit $< \frac{1}{10}$.

Dans ces conditions, l'erreur absolue sur x sera plus petite que $\frac{1}{10}$ et *le polynome* P_{II} *aura certainement un nombre de termes supérieur à* n.

En opérant de même pour la série (III),

$$y = 2\,\mathrm{A}\,\theta + \left(\frac{2\,\mathrm{A}}{3} - \frac{4}{3}\mathrm{A}^3\right)\theta^3 + \left(\frac{2\,\mathrm{A}}{5} - \frac{4}{3}\mathrm{A}^3 + \frac{4}{15}\mathrm{A}^5\right)\theta^5 + \ldots,$$

on sera amené, pour avoir le même ordre d'approximation, à calculer la valeur du polynome $\mathrm{P}_{\mathrm{III}}$ qui s'obtient en développant l'expression

$$(\mathrm{P}_{\mathrm{III}}) \qquad y = 2\,\mathrm{A}\left(\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{\theta^5}{5}+\ldots+\frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}\right) - \frac{\left[2\,\mathrm{A}\left(\theta+\frac{\theta^3}{3}+\ldots+\frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}\right)\right]^3}{3!},$$

n étant le même que dans P_{II}. Alors l'erreur absolue commise, en calculant y de cette façon, sera plus petite que $\frac{1}{10}$ et plus grande que 0,058, c'est-à-dire y se trouvera encore calculé à $\frac{1}{10}$ près. De même le polynome $\mathrm{P}_{\mathrm{III}}$ devra certainement contenir un nombre de termes plus grand que n.

7. Calcul de n. — Nous allons maintenant déterminer le nombre n.

Nous avons

$$1 = 2\,\mathrm{A}\left(\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{\theta^5}{5}+\ldots+\frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right).$$

Il nous faut prendre n assez grand pour que le reste soit plus petit que $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire que la somme

$$\sum_0^n = 2\,\mathrm{A}\left(\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{\theta^5}{5}+\ldots+\frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}\right)$$

soit plus grande que 0,9. Par conséquent la somme

$$(\alpha) \qquad S_\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \ldots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}$$

doit être plus grande que $\frac{9}{20A}$ et θ est déterminé par la relation

$$\theta = \frac{e^{\frac{1}{A}} - 1}{e^{\frac{1}{A}} + 1}.$$

Pour

$A_1 < 4 \times 10^{-8}$	on trouve	$S_{\theta_1} > 10^7$,
$A_2 < 2 \times 10^{-6}$	»	$S_{\theta_2} > 2 \times 10^5$,
$A_3 < 4 \times 10^{-6}$	»	$S_{\theta_3} > 10^5$.

Comparons la somme S_θ avec la série divergente

$$(\beta) \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots,$$

θ étant plus petit que 1, on a $\frac{\theta^{2p-1}}{2p-1} < \frac{1}{2p-1}$. Par conséquent, S_θ est plus petit que la somme de n termes de la série (β).

Soient $\sum_1^p \frac{1}{2p-1}$ la somme de p premiers termes de la série (β) et un nombre donné d'avance S. Si $\sum_1^p \frac{1}{2p-1}$ doit être égal à S, on peut trouver une limite inférieure et supérieure du nombre p.

Si l'on développe $\log(1+x)$ en série de Maclaurin, en se bornant aux deux premiers termes, on a

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\alpha x)^2} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

ce qui donne, pour $x = \frac{1}{2p-1}$,

$$\log\left(1 + \frac{1}{2p-1}\right) + \frac{1}{2(2p-1+\alpha)^2} = \frac{1}{2p-1};$$

d'où

$$\log\left(1 + \frac{1}{2p-1}\right) + \frac{1}{8p^2} < \frac{1}{2p-1} < \log\left(1 + \frac{1}{2p-1}\right) + \frac{1}{2(2p-1)^2}.$$

En donnant successivement à p les valeurs 1, 2, 3, ..., p, on aura les inégalités suivantes :

$$\log 2 - \log 1 + \frac{1}{8.1^2} < \frac{1}{1} < \log 2 - \log 1 + \frac{1}{2.1^2},$$

$$\log 4 - \log 3 + \frac{1}{8.2^2} < \frac{1}{3} < \log 4 - \log 3 + \frac{1}{2.3^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log 2p - \log(2p-1) + \frac{1}{8.p^2} < \frac{1}{2p-1} < \log 2p - \log(2p-1) + \frac{1}{2(2p-1)^2}$$

et en ajoutant membre à membre

$$\log \frac{2.4\ldots 2p}{1.3\ldots 2p-1} + \frac{1}{8}\sum_1^p \frac{1}{p^2}$$

$$< \sum_1^p \frac{1}{2p-1} < \log \frac{2.4\ldots 2p}{1.3\ldots 2p-1} + \frac{1}{2}\sum_1^p \frac{1}{(2p-1)^2}.$$

Mais on sait (¹) que

$$\log \frac{2.4\ldots 2p}{1.3\ldots 2p-1} = \sqrt{\pi(p+\varepsilon)},$$

ε étant un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

D'autre part

$$\sum_1^\infty \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{(2p-1)^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\sum_1^\infty \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Par conséquent, si $\sum_1^p \frac{1}{2p-1} = S$ on aura

$$\log\sqrt{\pi p} + \frac{1}{8} < S < \log\sqrt{\pi\left(p+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{8};$$

d'où

$$e^{2S - \log\pi - \frac{\pi^2}{8}} - \frac{1}{2} < p < e^{2S - \log\pi - \frac{1}{4}}$$

ou

$$(\gamma) \qquad e^{2S-2,4} - \frac{1}{2} < p < e^{2S-1,4}.$$

(¹) *Voir*, par exemple, *Cours* de M. Hermite, rédigé par M. Andoyer, 1891, p. 116.

8. **Lenteur de la convergence des séries.** — En faisant

$$S_1 = 10^7; \qquad S_2 = 2 \times 10^5; \qquad S_3 = 10^5,$$

on trouve

$$p_1 > 10^{8.10^6}; \qquad p_2 > 10^{17.10^4}; \qquad p_3 > 10^{8.10^4}.$$

Nous avons désigné par n le nombre de termes qu'il faut prendre dans la série

$$(\delta) \qquad \theta + \frac{\theta^3}{3} + \ldots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = \frac{1}{2A},$$

pour avoir $S_\theta \geqq \frac{9}{20A}$. Ce nombre n est sûrement plus grand que le nombre p des termes qu'il faut prendre dans la série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots,$$

pour avoir la même somme S_θ. D'autre part, nous avons pris $S_1 < S_{\theta_1}$; $S_2 < S_{\theta_2}$ et $S_3 < S_{\theta_3}$. Par conséquent, *a fortiori* $n > p$. Et le nombre des termes qu'il faut prendre dans les polynomes P_{II} et P_{III} pour avoir x et y à $\frac{1}{10}$ près, pour l'époque $t = 1$, est encore supérieur à celui-là.

La *Connaissance des Temps* donne les coordonnées rectilignes du Soleil avec *sept* décimales. Si l'on veut calculer x, y dans notre cas particulier avec *une* seule décimale exacte par la méthode de M. Sundman, pour l'époque $t = 1$, il faut donc calculer un nombre des termes qui, pour

$$\frac{M}{m} = 200, \qquad \frac{M}{m} = 10, \qquad \frac{M}{m} = 3,$$

dépasse respectivement les valeurs

$$10^{8.10^6}, \quad 10^{17.10^4}, \quad 10^{8.10^4}.$$

On voit donc, tout au moins dans le cas particulier que nous avons envisagé, l'extrême lenteur de la convergence des séries en question. Une image saisissante donnera une idée de cette lenteur.

Prenons l'Univers d'Einstein — une hypersphère de rayon égal à 10^{11} années de lumière. Soit une sphère (à trois dimensions) de rayon égal numériquement à celui de l'Univers considéré. Supposons qu'on remplisse cette sphère d'électrons se touchant mutuellement, de façon à former une masse compacte.

Si l'on prend alors dans la série (δ), pour le cas le plus favorable où $m_0 = m_1 = m_2$ (c'est-à-dire quand $A = A_3$), *un nombre de termes égal à celui des électrons contenus dans la sphère*, on n'a même pas les $\frac{2}{1000}$ de la somme de notre série. Ce résultat tient à l'extrême petitesse de 2Ω, dont les valeurs ont été calculées par les formules de M. Sundman. Pour $t = 1$, on a dans nos différents cas,

$$1 > \theta_1 > 1 - \frac{2}{10^{4\times 10^{7}}}, \qquad 1 > \theta_2 > 1 - \frac{2}{10^{10^{5}}}, \qquad 1 > \theta_3 > 1 - \frac{2}{10^{4\times 10^{7}}},$$

les valeurs de θ sont donc très voisines de 1 et, pour $\theta = 1$, les séries sont divergentes.

9. Conditions d'application pratique de la méthode au cas de Lagrange. — On a vu que la convergence des séries II et III ou des polynomes P_{II} et P_{III} est ici étroitement liée à celle de la série (I),

$$t = 2A\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \ldots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right).$$

Nous verrons bientôt qu'il en est de même dans le cas général.

Les séries de M. Sundman donnant les coordonnées des trois corps pour tous les temps, cherchons la valeur de A, soit A_0, qu'il faudrait avoir si l'on voulait calculer x, y avec *sept* décimales pour l'époque $t = 10^4$ (c'est-à-dire dans 1500 ans, à peu près) en ne prenant que 100 termes dans la série (I). On aura

$$\frac{\theta^{201}}{201} + \frac{\theta^{203}}{203} + \ldots = \frac{10^{-7}}{2A_0}.$$

En posant

$$E = \frac{\theta^{201}}{201} + \frac{\theta^{203}}{203} + \ldots,$$

il vient

$$\frac{\theta^{201}}{201} < E < \frac{\theta^{201}}{201}\,\frac{1}{1-\theta^2}.$$

Pour simplifier, remplaçons dans nos calculs 201 par 200, ce qui ne changera pas sensiblement les résultats. Si nous prenons A_1

tel que

$$\frac{\theta^{200}}{200}\,\frac{1}{1-\theta^2} = \frac{10^{-7}}{2\,A_1},$$

alors

$$E_1 < \frac{10^{-7}}{2\,A_1} \qquad \text{et} \qquad 2\,A_1 E_1 < 2\,A_0 E_0 = 10^{-7}.$$

De même, si nous prenons

$$\frac{\theta^{200}}{200} = \frac{10^{-7}}{2\,A_2},$$

alors

$$E_2 > \frac{10^{-7}}{2\,A_2} \qquad \text{et} \qquad 2\,A_2 E_2 > 2\,A_0 E_0 = 10^{-7}.$$

On a

$$A = \frac{t}{\log\dfrac{1+\theta}{1-\theta}} = \frac{10^4}{\log\dfrac{1+\theta}{1-\theta}},$$

par conséquent

$$\frac{\theta_1^{200}}{200}\,\frac{1}{1-\theta_1^2} = \frac{10^{-11}}{2}\log\frac{1+\theta_1}{1-\theta_1}.$$

En résolvant cette équation par approximations successives, il vient

$$\theta_1 = 0,899 \qquad \text{et} \qquad A_1 = 3396.$$

De même pour déterminer A_2, on a l'équation

$$\frac{\theta_2^{200}}{200} = \frac{10^{-11}}{2}\log\frac{1+\theta_2}{1-\theta_2}$$

qui donne

$$\theta_2 = 0,906 \qquad \text{et} \qquad A_2 = 3323.$$

Ainsi nous avons

$$0,899 < \theta < 0,906; \qquad 3320 < A_0 < 3400.$$

On voit donc pour quelles valeurs considérables de A les séries pourraient avoir un intérêt pratique. Nous sommes très loin de notre valeur de A qui, pour $\frac{M}{m} = 3$, était plus petite que 4×10^{-6}.

10. Conclusion. — Ce dernier résultat est aussi valable pour le cas le plus général du problème des trois corps, si on le traite par la méthode de Sundman. En effet, on a

$$dt = \Gamma\, d\omega \qquad (0 \leq \Gamma < 1),$$

d'où

$$t = \int_0^\omega \Gamma\, d\omega = \Gamma_1 \omega \quad \text{où} \quad 0 < \Gamma_1 < 1 \quad (^1) \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

Par conséquent

$$t = \frac{\Gamma_1 2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta} = A \log \frac{1+\theta}{1-\theta},$$

[seulement, *ici*, A varie avec l'époque t (¹)].

On voit ainsi que, dans le cas général, la relation entre t et θ est fort analogue à celle que nous avons envisagée et qui répondait au cas de Lagrange. Plus A est grand, plus θ est éloigné de la valeur singulière 1 et plus les séries convergent rapidement : elles sont d'ailleurs toujours divergentes pour $\theta = 1$.

Nous sommes ainsi amené à chercher à préciser davantage les conditions pour que, dans la solution du Problème des trois corps, donnée par M. Sundman, les séries en θ convergent assez rapidement pour les besoins de la pratique. C'est ce que nous nous proposons de faire dans un travail ultérieur.

(*Observatoire de Marseille.*)

(¹) Γ peut être égal à zéro lorsqu'un choc se produit, mais, dans un temps fini, le nombre des chocs est lui-même fini (*voir* le Mémoire de M. Sundman, p. 144).