

Das Analemma von Ptolemäus. Von P. Luckey.

[Mit 1 Tafel.]

Die kleine Schrift »Über das Analemma« (*Περὶ Αναλήματος*) von *Claudius Ptolemäus* ist reizvoll, weil sie uns gewisse moderne mathematische Methoden in einem früheren Stadium aufdeckt. So begegnet uns ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem. Wenn dieses System nun auch hier gewissermaßen von der Natur selbst dargeboten wird — seine Achsen sind Nordsüdlinie und Westostlinie des Horizonts und die Vertikale, seine Bezugsebenen also Horizont, Meridian und erster Vertikal — so ist sich der Verfasser doch klar bewußt und er spricht es auch aus, daß es sich hierbei um eine allgemeine Methode handelt, daß man in jeden Körper ein solches Bezugssystem legen kann, und daß die Dreizahl der Koordinaten notwendig sei, da man durch einen Punkt nur drei Geraden legen könne, deren jede auf den anderen senkrecht stehe. Es werden ferner, wie wir noch näher sehen werden, mit aller Konsequenz drei Systeme sphärischer Koordinaten eingeführt.

Diese Gegenstände kann man, modern gesprochen, noch zur reinen Mathematik rechnen. Über die Methoden der ausführenden, der praktischen Mathematik bei den Griechen haben wir bekanntlich nur spärliche Zeugnisse. Nimmt doch z. B. *Euklid* in vornehmer platonischer Abwendung vom Sinnlichen nicht die Namen der Instrumente Zirkel und Lineal in den Mund, mit denen alle seine Konstruktionen auszuführen sind. Da ist es uns nun besonders wertvoll, daß die genannte Schrift des *Ptolemäus* auf dieses ziemlich dunkle Feld der ausführenden, praktischen Methoden einen Lichtblitz wirft, der uns diese Methoden gewissermaßen in ihrem Kindheitszustand beleuchtet. Darstellende Geometrie, trigonometrisches Rechnen mit der Sehnenfunktion, graphisches und nomographisches Rechnen, Herstellung einer numerischen Tafel tauchen nebeneinander vor uns auf, zwar nicht als ausgebildete wohlgeschiedene Disziplinen, sondern in einem, dem status nascendi näheren jugendlichen Entwicklungsstadium und, soweit die graphischen Methoden in Betracht kommen, zum Teil noch mit überfließenden Konturen, aber doch so, daß man diese Methoden schon voneinander scheiden kann.

Bekanntlich ist es ein oft anfechtbares Unterfangen, mit den Augen der Gegenwart das Alte zu betrachten, und leicht kann einer der Gefahr unterliegen, in dieses Alte Modernes hineinzusehen, das nicht darin liegt. Andererseits

ist aber doch keine andere Untersuchungsmethode denkbar, als daß wir von unserem Standpunkt aus das Alte anschauen, d. h. an unseren modernen Kategorien, Begriffsabgrenzungen und Methoden diejenigen einer früheren Zeit messen und sie mit ihnen vergleichen. Zu behaupten, die Mathematik der Griechen sei toto genere wesensfremd der modernen, wäre widersinnig; man müßte vielmehr dann sagen, sie sei etwas uns Unverständliches und deshalb keine Mathematik. Und gerade in der Mathematik liegen Beweise genug dafür vor, daß die wissenschaftliche Entwicklung vom Altertum kontinuierlich zur Gegenwart weitergegangen ist, und daß in der griechischen Mathematik nicht nur Keime, sondern auch schon Entfaltungen dessen vorliegen, was in der Gegenwart üppiger und mächtiger gewachsen ist. Das braucht heute nicht näher begründet zu werden, nachdem man insbesondere die sorgfältige Behandlung gewürdigt hat, die die Griechen der Grundlegung des Irrationalen und des Infinitesimalen zuteil werden ließen.

Daß auch die Wurzeln moderner Methoden der angewandten Mathematik bei den Griechen zu finden sind, hoffe ich erläutern zu können, indem ich in der folgenden Zergliederung der Schrift des *Ptolemäus* versuche, die vom Verfasser angewandten praktischen Methoden in ihrem Wesen zu erfassen und gegeneinander abzugrenzen.

Vom griechischen Text des Analemmas sind nur noch Bruchstücke in einem Palimpsest vorhanden (*Ambros. Gr. L 99 sup.*, jetzt 491). Seitdem *J. L. Heiberg*¹⁾ diese, soweit sie lesbar waren, zugleich mit der dem 13. Jahrhundert angehörigen lateinischen Übersetzung des *Wilhelm von Moerbeke*²⁾ (cod. Vaticanus Ottobon. lat. 1850) in seiner *Ptolemäus*-Ausgabe herausgegeben hat, besitzen wir nicht nur eine allgemein zugängliche Textausgabe, sondern können auch wenigstens stellenweise die mangelhafte und lückenhafte lateinische Übersetzung durch den Urtext berichtigen³⁾.

*Commandinus*⁴⁾ hat 1562 auf Grund der Übersetzung *Wilhelms von Moerbeke* der Neuzeit eine lateinische Textausgabe und zugleich einen trefflichen Kommentar des Analemmas beschert. *Clavius* behandelt und benutzt das Analemma weitgehend in seiner *Gnomonik*⁵⁾ und in seinem *Astrolabium*⁶⁾. *Delambre*⁷⁾ hat in seiner großen Geschichte der alten Astronomie über den Inhalt der Schrift ausführlich berichtet. *v. Braunnmühl*⁸⁾ widmete der Schrift eine Betrachtung.

¹⁾ *Ptolemaeus* II. Opera astronomica minora ed. *I. L. Heiberg*, Leipzig 1907, S. 187–223.

²⁾ *Wilhelm von Moerbeke* hat aus dem Griechischen übersetzt, nicht aus dem Arabischen, wie *Th. L. Heath*, A History of Greek Mathematics, Oxford 1921, vol. II, p. 287 und *G. Loria*, Le scienze esatte nell'antica Grecia, Milano 1914, p. 548, versehentlich angegeben.

³⁾ Herrn Studienreferendar *Zuntz* bin ich für freundliche Hilfe und Beratung in sprachlicher Hinsicht dankbar.

⁴⁾ *Claudii Ptolemaei liber de Analemmate a Federico Commandino* Urbinate instauratus et commentariis illustratus, Qui nunc primum eius opera e tenebris in lucem prodit. Romae 1562.

⁵⁾ *Gnomonices libri octo*. Auctore *Christophoro Clavio* Bambergensi Societatis Jesu. Romae 1581.

⁶⁾ *Christophori Clavii* Bambergensis e Societate Jesu *Astrolabium*. Romae 1593.

⁷⁾ *Delambre*, Histoire de l'Astronomie ancienne. Paris 1817. II, L. IV, chap. 16.

⁸⁾ *A. v. Braunnmühl*, Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie. Abh. der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher, 71, Nr. 1, Halle 1897. Siehe auch *A. v. Braunnmühl*, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I. Leipzig 1900, S. 11–14.

tung und endlich ist die Abhandlung von *Zeuthen*¹⁾ und die knappe, gründliche Inhaltsangabe von *Drecker*²⁾ hervorzuheben. Trotz dieser Arbeiten scheint mir die angedeutete vollständige Analyse der angewandt-mathematischen Methoden und ihrer gegenseitigen Beziehungen in der Schrift des *Ptolemäus* bisher noch nicht durchgeführt zu sein. Jeder der genannten Verfasser ist diesen Methoden nur teilweise gerecht geworden. So haben *Delambre* und *v. Braunmühl* die numerisch-trigonometrische Methode übersehen; *Zeuthen* hat geflissentlich nur diese behandelt, und bei *Drecker*s im Rahmen seines Buches nur sehr knappem Bericht kommt diejenige Methode des *Ptolemäus* nicht zu ihrer Geltung, die ich als die »nomographische« kennzeichne, was bisher noch von keiner Seite geschehen ist. Gerade der Hervorhebung dieser »nomographischen« Methode des *Ptolemäus* in ihrer Abgrenzung gegen die bloß graphische glaubte ich besondere Aufmerksamkeit widmen zu sollen. Denn hier handelt es sich um Gesichtspunkte, die erst durch die neueste Entwicklung der graphischen Rechenmethoden, nämlich durch die Lösung der Nomographie als selbständigen Zweigs der angewandten Mathematik, ins wissenschaftliche Bewußtsein und Interesse gerückt worden sind.

1. Die Einführung der 7 Winkel.

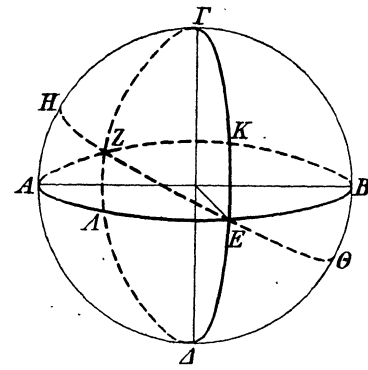
(189,17–194,28; 221,22–222,14.)³⁾

Aus den einleitenden Worten (189,1–16) der an *Syrus* gerichteten Schrift vernehmen wir, daß sich schon ältere Schriftsteller mit dem Problem des Analemmas⁴⁾, nämlich der Darstellung gewisser Winkel, die für die Konstruktion der Sonnenuhren gebraucht werden, beschäftigt haben. Das ist uns auch aus dem 9. Buch von *Vitruv*⁵⁾ Baukunde bekannt. Doch hat *Vitruv*, wie *Commandinus* treffend bemerkt, leider jene älteren Schriften mehr verschlungen als studiert und uns nur eine unvollständige Darstellung der älteren Methode des Analemmas hinterlassen. Bei aller Achtungsbezeugung vor jenen älteren Schriften hat *Ptolemäus* doch an ihnen auszusetzen. Da er im späteren Verlauf seiner Schrift seine Verbesserungen deutlich ins Licht setzt, so wollen wir uns nicht länger bei den textlich nicht überall klaren Einleitungsworten aufhalten und uns sofort dem Inhalt, und zwar zunächst der Beschreibung der von *Ptolemäus* benutzten sphärischen Koordinatensysteme zuwenden.

Als Bezugssystem auf der Himmelskugel dienen folgende drei feste Großkreise, deren Ebenen paarweise aufeinander senkrecht stehen (Fig. 1):

1. Der Meridian (*μεσημβρινός*, meridianus) *ATBA*,
2. Der Horizont (*ὁρίζων*, orizon) *AEB*,
3. Der erste Vertikal (*ὁ κατὰ κορυφήν κύκλος*, circulus qui secundum verticem)⁶⁾ *TEA*.

Fig. 1



Man blickt von Osten her auf die Meridianebene. Von den beiden letztgenannten Kreisen sind nur die beiden östlichen Halbkreise gezeichnet.

Diese drei Kreise schneiden sich in drei aufeinander senkrecht stehenden festen Durchmessern:

1. Horizont und Meridian haben die Mittagslinie *AB* gemeinsam (*ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ ὁρίζοντος*, communis sectio meridiani et orizontis, meridiana).

2. Meridian und erster Vertikal haben die Scheitellinie *TA* gemeinsam (*γνώμων*, gnomon).

3. Erster Vertikal und Horizont haben die Ostwestlinie gemeinsam (equinoctialis genannt, weil auch die Äquatorebene durch diese Achse geht).

Hier haben wir das schon erwähnte räumliche Koordinatensystem. Die Art, wie *Ptolemäus* die Dreizahl der Dimensionen ableiten zu können glaubt, ähnelt derjenigen in seiner Schrift *Περὶ διαστάσεως* (de dimensione), über die uns *Simplicius* berichtet⁷⁾.

Durch den veränderlichen Sonnenort *Z* und die drei eben genannten Achsen werden drei mit der Sonne bewegliche Großkreise gelegt:

1. Der Hektemoros *HZEΘ* (*ὁ ἑκτήμερος κύκλος*, circulus ektimorus). Er dreht sich um die Westostlinie als Achse, und wird als der aus seiner Lage herausgedrehte Horizont aufgefaßt.

2. Der Horarius *AZKB* (*ὁ ὥριατος κύκλος*, circulus horarius). Er dreht sich um die Nordsüdlinie als Achse und wird als der aus seiner Lage herausgedrehte Meridian betrachtet.

3. Der Descensivus *ITZA* (*ὁ καταβατικός κύκλος*, circulus descensivus). Er dreht sich um die Scheitellinie und wird als der aus seiner Lage herausgedrehte erste Vertikal aufgefaßt.

Auch von diesen drei Kreisen sind nur die östlichen Halbkreise gezeichnet.

¹⁾ *H. G. Zeuthen*. Note sur la trigonométrie de l'antiquité. Bibliotheca mathematica. 3. Folge I (1900) S. 20.

²⁾ *J. Drecker*, Theorie der Sonnenuhren. Berlin und Leipzig 1925.

³⁾ Die beigegeführten Zahlen geben Seite und Zeile des lateinischen Textes der *Heiberg*schen Ausgabe an. Bei Zitierung des griechischen Textes dieser Ausgabe fügen wir der Zeilennummer die Bezeichnung »griech.« bei.

⁴⁾ Über die Erklärung des Wortes »Analemma« vergl. den zweiten Abschnitt.

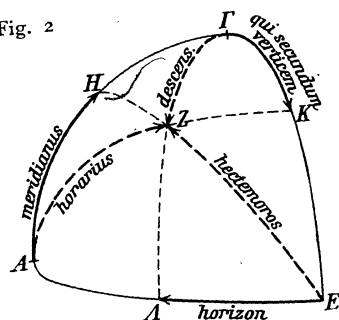
⁵⁾ *Vitruvius*, De architect. IX. 8. Vergl. *Bilfinger*, die Zeitmesser der antiken Völker, Stuttgart 1886, S. 28 und *Fr. Woepcke*, Disquisitiones archaeologico-mathematicae circa solaria veterum. Berlin 1842, S. 28–37.

⁶⁾ *Zeuthen* (a. a. O.) gibt an, die Alten hätten den ersten Vertikal »second verticale« genannt. Sollte er das »secundum verticem« so mißverstanden haben?

⁷⁾ *Simplicius* in Aristot. de caelo. Die Stelle ist wiedergegeben in Ptolem. opera, ed. *Heiberg*, II S. 265, ebenso S. 266 die hierher gehörige Stelle *Eustratius* in Ethic. Nicomach. p. 322,4 ed. *Heylbut*.

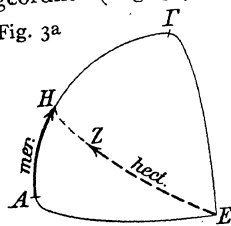
21

Fig. 2



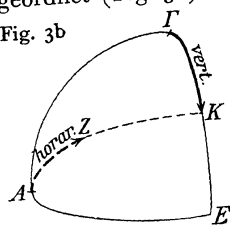
Erstes Koordinatensystem, dem Hektemoros zugeordnet (Fig. 3a):

Fig. 3a



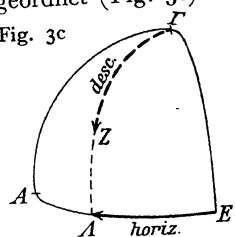
Zweites Koordinatensystem, dem Horarius zugeordnet (Fig. 3b):

Fig. 3b



Drittes Koordinatensystem, dem Descensivus zugeordnet (Fig. 3c):

Fig. 3c



Dieses dritte System ist dasjenige, welches wir heute als System des Horizonts bezeichnen. Doch mißt *Ptolemäus* die Azimute vom Ost- oder Westpunkt aus und benutzt statt der Höhen die Zenitdistanzen. Entsprechend könnten wir das erste System das des Meridians und das zweite das des ersten Vertikals nennen. Daß der Sonnenort durch irgend eines dieser drei Bogenpaare bestimmt ist, ist in dem Satze »rursum ... radii« (191,7-15) ausgesprochen. Am Schlusse der Schrift gibt *Ptolemäus* außer diesen drei Kombinationen noch drei weitere an: Die Lage der Sonne (des Sonnenstrahls) sei auch bestimmt, wenn irgend eine der drei Kombinationen von zwei Bögen der beweglichen Kreise gegeben sei (222,31-223,6), also Hektemoros- und Horariusbogen, oder

Der Sonnenort *Z* ist nunmehr in dem über dem Horizont gelegenen südöstlichen Oktanten (Fig. 2) durch jedes der folgenden drei Bogenpaare festgelegt, deren jedes aus je einem Bogen auf einem beweglichen und einem festen Kreis besteht und ein Koordinatensystem darstellt:

Der Hektemorosbogen *EZ* und der Meridianbogen *AH*. Der Hektemorosbogen ist der vom Ostpunkt *E* bis zum Sonnenort *Z* auf dem Hektemoroskreise gemessene Bogen; der Meridianbogen mißt die Neigung des Hektemoroskreises gegen die Horizontalebene.

Der Horariusbogen *AZ* und der Vertikalkreisbogen *ΓK*.

Der Horariusbogen ist der vom Südpunkt *A* bis zum Sonnenort *Z* auf dem Horariuskreise gemessene Bogen; der Vertikalkreisbogen mißt die Neigung des Horariuskreises gegen die Ebene des Meridians.

Der Descensivusbogen *IZ* und der Horizontbogen *EA*. Der Descensivusbogen ist der vom Zenit *Γ* auf dem Descensivuskreise bis zum Sonnenort *Z* gemessene Bogen. Der Horizontbogen mißt die Neigung des Descensivuskreises gegen die Ebene des ersten Vertikals.

Hektemoros- und Descensivusbogen oder drittens Horarius- und Descensivusbogen. Übrigens ist die Lage des Sonnenorts durch eine beliebige der 15 Kombinationen von zweien der 6 Bögen bestimmt.

Befindet sich die Sonne in einem anderen Oktanten, so werden die Bögen von den Ecken dieses Oktanten aus gemessen. Z. B. werden im nordöstlichen Oktanten Horariusbogen und Meridianbogen vom Nordpunkt aus gemessen. Keiner der 6 Bögen kann also größer als ein Viertelkreis werden.

Die Vorgänger des *Ptolemäus* (οἱ παλαιοί) benutzten, wie er angibt, folgende 6 Bögen (Fig. 4):

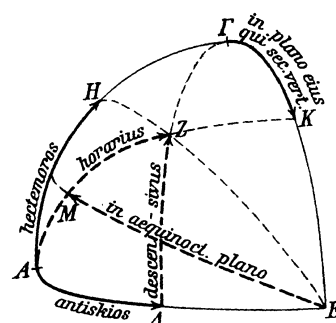


Fig. 4.

1) an Stelle des Hektemorosbogens *EZ* den Äquatorbogen *EM*. Er wird auf dem Äquator vom Ostpunkt oder Westpunkt aus bis zum Schnitt mit dem Horariuskreis gemessen.

2) den Horariusbogen *AZ*, wie *Ptolemäus*,

3) an Stelle des Descensivusbogens *IZ* dessen Komplement *AZ* als Descensivusbogen,

4) den Bogen *AH*, den sie aber Hektemorosbogen nannten, während er bei *Ptolemäus* Meridianbogen heißt,

5) den Vertikalkreisbogen *ΓK*, wie *Ptolemäus*,

6) den Antiskiosbogen *AA* (αντίσκιος, contraumbra-
lis) an Stelle des Horizontbogens, dessen Komplement er ist.

Der Vergleich der Figur 4 mit der Figur 2 zeigt auf den ersten Blick, daß *Ptolemäus* das von seinen Vorgängern verwandte System von Bögen durch ein vernünftigeres ersetzt hat. Er bewunderte zwar, so sagt er selbst in den Einleitungsworten seiner Schrift, das konstruktive Verfahren jener Männer und er folge ihm weitgehend. Doch bedürfe auch eine auf die Natur bezügliche Theorie einer gewissen mehr mathematischen Begründung.

Zunächst bemerkt man die straffere Terminologie des *Ptolemäus*. Jeden Bogen bezeichnet er nach dem Kreis, auf dem er liegt.

Der störende Bestandteil in der Behandlungsweise der Vorgänger, der in das ganze System nicht hineinpaßt, ist der Äquatorbogen. Freilich kann dieser (bei bekannter Polhöhe) auch zur Bestimmung der Lage des Horariuskreises dienen. Besser leistet dies aber der Vertikalkreisbogen, der senkrecht zur Drehachse des Horarius, nämlich zur Nordsüdlinie, steht und einer der drei dauernd aufeinander senkrechten festen Kreise ist. Es vermöge auch der Hektemorosbogen (nach der Benennung bei *Ptolemäus*), den ja *Ptolemäus* an die Stelle des Äquatorbogens gesetzt hat, nicht nur zusammen mit dem Horariusbogen, sondern auch zusammen mit dem Meridianbogen den Sonnenort *Z* anzuzeigen, der Äquatorbogen aber nur mit dem Horariusbogen, nicht aber zusammen mit dem Meridianbogen oder einem der anderen Bögen¹⁾. Der Äquator

¹⁾ In Wirklichkeit legt der Äquatorbogen bei gegebener Polhöhe mit jedem der anderen Bögen, den Vertikalkreisbogen ausgenommen, den Sonnenort fest. Wenn z. B. in Fig. 4 *EM* und *AH* der Größe und Lage nach gegeben sind, so ergibt sich doch *Z* als Schnittpunkt der Großkreise *AM* (Horarius) und *EH* (Hektemoros). Allerdings sind hierbei zwei der beweglichen Kreise einzustellen; dagegen kommt man in dem von *Ptolemäus* herausgehobenen Fall mit einem solchen aus.

AB (die Mittagslinie) ist Spur und Projektion des Horizonts (A Südpunkt, B Nordpunkt). ΓA ist die Scheitellinie. $ZH\Theta K$ ist die Projektion eines an einem gewissen Tage im Frühling oder Sommer von der Sonne zurückgelegten Parallelkreises. ZAK ist der in die Aufrißebene hineingeklappte östliche Halbkreis dieses Parallels. Errichtet man in Θ das Lot auf ZK , so schneidet dieses den Halbparallel in einem Punkte A , der nun den halben Tagbogen AZ vom halben Nachtbogen AK scheidet. Denn ΘA ist die umgelegte Schnittlinie des östlichen Halbparallels mit dem östlichen Halbhorizont. M sei zu einem gegebenen Zeitpunkt die Lage der Sonne auf dem umgelegten halben Tagbogen AZ . Gegeben ist der Bogen AM , den die Sonne auf dem Parallelkreise seit ihrem Aufgang zurückgelegt hat. Füllen wir von M das Lot auf ZK , so ist sein Fußpunkt N der Aufriß der Sonne. Je nachdem N auf $H\Theta$ oder ZH fällt, befindet sich die Sonne im nördlichen oder südlichen Oktanten. Durch den Punkt N und die Strecke NM ist die Lage der Sonne vollständig bestimmt, denn NM gibt an, wie weit sich die Sonne vor der Aufrißebene befindet.

Damit ist der erste Teil der Aufgabe erledigt. Es sind sozusagen die rechtwinkligen Koordinaten ET , TN , NM der Sonne in dem System konstruiert, dessen Achsen die Nordsüdlinie AB , die Scheitellinie ΓA und die Westostlinie sind. Zweiter Teil der Aufgabe ist nun, die 7 Winkel, d. h. die eingeführten drei Paare sphärischer Koordinaten der Sonne und anhangsweise den Äquatorbogen in ihrer wahren Größe zu ermitteln.

1. Hektemorosbogen. Wir denken uns den Halbparallel $ZMAK$ in seine wahre Lage senkrecht zur Meridianebene zurückgedreht. In dieser Lage wollen wir den Aufgangspunkt statt A mit L , den Sonnenort statt M mit S bezeichnen. Der Hektemoroskreis ist der durch S und den Ostpunkt gehende größte Kugelkreis. Da er senkrecht zur Meridianebene steht, so ist die Verbindungsgerade EN , die den Meridiankreis in Ξ schneiden möge, seine Spur und Projektion. Bezeichnen wir den Ostpunkt mit U , so erhalten wir die wahre Größe des Hektemorosbogens US , wenn wir den Hektemoroskreis um seine Spur $E\Xi$ in die Meridianebene hineinklappen. Hierbei fällt U auf O (OE senkrecht zu $E\Xi$) und S auf Π , und der Bogen $O\Pi$ ist der gesuchte Hektemorosbogen. Da die Dreiecke ENS und $EN\Pi$ kongruent und bei N rechtwinklig sind, so kann man Π erhalten, indem man entweder in N auf NE die Senkrechte errichtet oder um N mit $NS=NM$ als Halbmesser den Kreis bis zum Schnitt mit dem Meridian beschreibt. In der heutigen darstellenden Geometrie würde man die eine Konstruktion zur Kontrolle für die andere ausführen. *Ptolemäus* benutzt nur den Kreisbogen. Den Hektemorosbogen $O\Pi$ hat er also durch folgende drei Linien gefunden:

- a) Verbindungsgerade ENE ,
- b) Lot EO auf ENE ,
- c) Kreisbogen um N mit MN als Halbmesser.

Die von uns zur Erläuterung gebrauchte Vorstellung der Umklappung des Hektemoroskreises in die Meridianebene spricht *Ptolemäus* nicht aus; er beweist (in der vorweggenommenen Behandlung der Hektemorosdarstellung) einfach die Kongruenz der Dreiecke ENS und $EN\Pi$. Daß ihm aber die Vorstellung einer solchen Umklappung nicht fremd war,

zeigte er, indem er beim Parallelhalbkreis von ihr Gebrauch machte.

2. Horariusbogen. *Ptolemäus* beschreibt um Θ mit ΘM als Halbmesser den Kreisbogen bis zum Schnitt P mit dem Meridiankreis. Dann ist BP der gesuchte Horariusbogen. Wie früher schon gesagt, unterbleibt hier und bei den folgenden Winkeln der Beweis, da sich diese Konstruktionen schon in den Werken der Vorgänger finden.

Der Beweis läßt sich so führen: Wir klappen den Horariushalbkreis ASB um AB als Achse in die Meridianebene hinein. S bewegt sich dabei auf dem Bogen SP eines zur Aufrißebene senkrechten Kreises mit T als Mittelpunkt und TP als Radius. PNT , die Spur und Projektion dieses Kreises, steht senkrecht auf AB . Da das bei T rechtwinklige Dreieck $ST\Theta$ bei dieser Umklappung in das ihm kongruente Dreieck $PT\Theta$ übergeht so ist $\Theta P = \Theta S = \Theta M$. P hätte auch mit Hilfe der Geraden durch N senkrecht zu AB gewonnen werden können.

3. Descensivusbogen. *Ptolemäus* beschreibt um H als Mittelpunkt mit HM als Halbmesser den Bogen $M\Sigma$. Dann ist $\Gamma\Sigma$ der Descensivusbogen. Der Verfasser hätte auch durch N zu ΓA die Senkrechte $YN\Sigma$ ziehen können; er bevorzugt aber, wie bei den beiden vorigen Aufgaben, die Zirkelkonstruktion.

Den Beweis können wir führen, indem wir den Descensivskreis um ΓA in die Meridianebene hineindrehen. Alles entspricht genau dem Beweis für den Horariusbogen.

4. Meridianbogen. Da EB die Projektion des Horizontes und $E\Xi$ diejenige des Hektemoros ist, so erscheint der Meridianbogen ohne weiteres in seiner wahren Größe $B\Xi$.

5. Vertikalkreisbogen. Man trägt MN auf $YN\Sigma$ bis Φ ab und zieht $E\Phi\Psi$. Dann ist $\Gamma\Psi$ der Vertikalkreisbogen.

Beweis: Wir fassen den Kreis $AB\Gamma A$ als ersten Vertikal auf (Seitenriß). Dann ist Φ die Projektion der Sonne und $E\Phi\Psi$ Spur und Projektion des Horariuskreises, also $\Gamma\Psi$ der in wahrer Größe erscheinende Vertikalkreisbogen.

6. Horizontbogen. Man trägt MN von T aus auf TNP bis X ab und zieht $EX\Omega$. Dann ist $\Gamma\Omega$ der Horizontbogen.

Beweis: Wir fassen jetzt $AB\Gamma A$ als den Horizontkreis auf (Grundriß, aber von unten gesehen). Dann ist X die Projektion der Sonne und $EX\Omega$ die Spur und Projektion des Descensivskreises, also $\Gamma\Omega$ der Horizontbogen.

7. Äquatorbogen. Der Winkel ΘMN ist gleich dem Zentriwinkel des Äquatorbogens.

Beweis: Da der Parallelkreis und der Äquator in parallelen Ebenen liegen, so schneiden die Ebenen des Horizonts und des Horarius auf der Ebene des Parallelkreises den gleichen Winkel aus wie auf der des Äquators, nämlich den Zentriwinkel des gesuchten Äquatorbogens. Dieser ist also gleich $\angle OS$ gleich $\angle OM$ gleich $\angle MN$.

In dem, wie schon bemerkt, von *Ptolemäus* vorweg behandelten Sonderfall, daß die Deklination der Sonne null ist, fällt der Hektemorosbogen (1) mit dem Äquatorbogen (7) zusammen und entspricht der seit Sonnenaufgang abgelaufenen Zahl von Äquinoktialstunden. Die für die Punkte P und Σ der Figur 5 verwandten Zirkelkonstruktionen werden jetzt unbestimmt, und *Ptolemäus* benutzt deshalb in diesem Falle die Lote von N auf AB und ΓA .

Wie im Anfang dieses Abschnittes gesagt wurde, behandelt *Ptolemäus* bei seinem darstellenden Verfahren neben Polhöhe und Stundenwinkel die Sonnendeklination als unmittelbar gegeben. Statt ihrer ist aber tatsächlich die Länge der Sonne, d. h. der Bogen, den sie vom Frühlingspunkt aus auf der Ekliptik zurückgelegt hat, als direkt gegeben zu betrachten. Wir vermissen bei *Ptolemäus* also das Verfahren, aus der Länge der Sonne (und der Schiefe der Ekliptik) durch Konstruktion ihre Deklination zu ermitteln. *Vitruv* hat uns aus den älteren Analemma-Schriften ein solches Verfahren, bei dem ein Hilfskreis, der »manachus« zur Anwendung kam, übermittelt. *Ptolemäus* kann eine solche Konstruktion entbehren, da nur die Deklinationen für die Tage gebraucht werden sollen, an denen die Sonne in ein neues Tierkreiszeichen tritt. Bei der nomographischen Durchbildung seines Verfahrens gibt *Ptolemäus* diese Deklinationen, wie wir noch sehen werden, zahlenmäßig an.

3. Übergang zur Ermittlung der 7 Winkel durch graphisches Rechnen (201, 19–202, 15).

Bisher waren die gegebenen Stücke: Polhöhe, Sonnendeklination und Stundenwinkel ohne weiteres in Gestalt von Bögen der betreffenden Kreise als zeichnerisch gegeben betrachtet und auch die gesuchten Stücke galten als gefunden, wenn sie zeichnerisch ermittelt waren, nämlich die 6 ersten als Bögen des der Aufrißebene angehörenden Meridiankreises (oder als deren Zentriwinkel) und der Äquatorbogen als Winkel $\angle OMN$ der Figur 5. Die $\lambda\eta\psi\iota\varsigma\ \delta\epsilon\gamma\alpha\nu\iota\kappa\eta$ war also eine darstellend-geometrische Ermittlung. Bei 201, 19 wendet sich nun die Abhandlung mehr der praktischen Seite der Aufgabe zu. Polhöhe, Deklination und Stundenwinkel sind doch zunächst numerisch gegeben: die Polhöhe in Graden, die Deklination indirekt durch die Länge der Sonne (Anfangspunkte der Tierkreiszeichen) und der Stundenwinkel durch die Angabe der temporären (= bürgerlichen) Stunde, also der Anzahl der seit Sonnenaufgang abgelaufenen Sechstel des jeweiligen Halbtagsbogens. Auch die gesuchten 7 Winkel sollen numerisch, in Graden, ermittelt werden. Das entwickelte zeichnerische Verfahren ist also so auszugestalten, daß man bequem mit den gegebenen numerischen Werten in die Zeichnung eingehen und ferner nach beendeter Konstruktion zu den gefundenen Winkeln bequem die Zahlenwerte angeben kann. Für uns Heutige ist der nächstliegende Gedanke, einen Winkelmesser (Transporteur) sowohl zur Eintragung der gegebenen wie zur Abmessung der gesuchten Winkel zu verwenden. *Ptolemäus* macht es etwas anders.

Für das Einbringen der jedem einzelnen Klima, Zeichen und Grad entsprechenden Größen braucht man nur auf den zu den einzelnen Winkeln gehörigen Bögen »Mensurationen zu machen«, (mensurationes facere 201, 24, Messungen zu machen? Teilstriche anzubringen?) um sie numerisch zur Hand zu haben und Einzelkonstruktionen zu ersparen. Auch sind wir, um die numerischen Werte der gesuchten Winkel zu finden, überhaupt nicht genötigt, aus dem Analemma die Winkel der schier allenthalben zerstreuten Geraden jedesmal an Ort und Stelle zu ermitteln. Vielmehr führt folgendes Verfahren zum Ziel: Wir zeichnen (irgendwo auf

unserer Zeichentafel) einen in seine 90 Grad geteilten (auch bezifferten?) Viertelkreis (AB in Fig. 6¹). Wollen wir nun

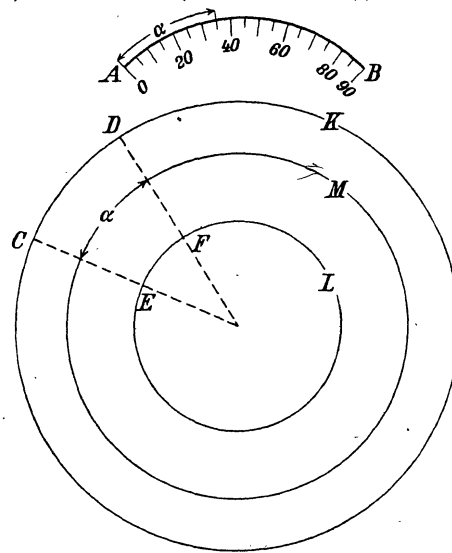


Fig. 6.

in einen für die Konstruktion gegebenen Kreis (K oder L) einen Zentriwinkel von gegebener Gradzahl einzeichnen, so zeichnen wir in oder um den gegebenen Kreis einen konzentrischen Kreis (Viertelkreis) (M) vom Radius des Bogens AB (Viertelkreis). Dann greifen wir die gegebene Zahl (α) von Graden von dem geteilten Quadranten ab und übertragen sie auf den gleich großen Kreis (Viertelkreis) (M). Indem wir dann durch die Endpunkte des abgetragenen Bogens die Radien ziehen, erzeugen wir auf dem größeren oder kleineren gegebenen Kreise Bögen und Zentriwinkel gleicher Gradzahl (CD , EF).

Man hätte auch die Beschreibung des umgekehrten Verfahrens erwarten sollen. Denn es sollte doch auch die Gradzahl eines durch Konstruktion gefundenen Bogens CD (oder EF) ermittelt werden. Man müßte C und D (oder E und F) mit dem Mittelpunkt verbinden und dann den Bogen α auf M abgreifen und auf AB übertragen, um seinen numerischen Wert abzulesen.

Der Quadrant AB dient also demselben Zweck wie unser »Transporteur«. Man kann auf ihm gegebene oder gefundene Winkel messen. Nur muß immer, da AB festliegt, der konzentrische Hilfskreis M gezeichnet und der Bogen mit dem Zirkel übertragen werden.

Bei der späteren Beschreibung der Herstellung und Handhabung der graphischen Tafel wird die hier allgemein skizzierte Methode des numerischen Ein- und Ausganges des graphischen Verfahrens in ihrer speziellen Anwendung auf das Analemma deutlich beschrieben.

Commandinus hat die Stelle infolge der mangelhaften Übersetzung von *Moerbeke* nicht ganz richtig verstanden. Er nimmt die Teilung auf dem konzentrischen Kreise an und mißt die Bögen auf diesem nicht von einem beliebigen Anfangspunkte aus. Für die meisten der gesuchten Bögen geht ja allerdings die Messung von einem der festen Punkte B und I der Fig. 5 aus, sodaß für diese Bögen eine feste Gradteilung

²) In Fig. 6 haben wir nur die Teilstriche von 5 zu 5 Grad eingetragen.

auf dem Meridian brauchbar gewesen wäre, nicht aber für den Hektemorosbogen, der die Messung durch Bogenübertragung erfordert.

Nach Behandlung des numerischen Ein- und Ausgangs hat das Verfahren der *λήψις οργανική* diejenige notwendige und hinreichende Ergänzung erhalten, die seine praktische Verwendung ermöglicht, und das graphische Verfahren, wie es uns nun vorliegt, könnten wir heute als »graphisches Rechnen« bezeichnen. Denn zu jeder Zusammenstellung der zahlenmäßig gegebenen Werte wird durch eine Konstruktion der Zahlenwert jedes gesuchten Winkels gefunden. Diese Konstruktion wäre jedesmal durch tatsächliches Ziehen der Konstruktionslinien (Geraden und Kreise) auszuführen — eine charakteristische Eigenschaft des »graphischen Rechnens«, das der Franzose ja geradezu als »calcul par le trait« bezeichnet hat. Im übernächsten Abschnitt werden wir aber sehen, daß *Ptolemäus* das Verfahren weiter ausgestaltet, indem er das wirkliche Ziehen eines Teiles der Konstruktionslinien durch Anwendung von Ablesegeräten entbehrlich macht und dadurch das graphische Rechenverfahren zu einem »nomographischen« ausgestaltet.

4. Die trigonometrische Berechnung der 7 Winkel.

(202, 15–210, 3.)

Die Ermittlung (*λήψις*) der 7 gesuchten Winkel läßt sich auch *διὰ τῶν γραμμῶν* (202, griech. 22) aufs schärfste ausführen. *v. Braunmühl* nahm an, daß hiermit ein graphisches Verfahren gemeint sei. *Zeuthen* vertrat demgegenüber mit überzeugenden Gründen den Standpunkt, die *λήψις διὰ τῶν γραμμῶν* sei im Gegenteil ein auf geometrische Demonstrationen gegründetes rechnerisches Verfahren, bei dem die damals ja vorhandene Tafel der Sehnenfunktion zur Verwendung komme, und *Ptolemäus* koordiniere ausdrücklich dieses Verfahren der mechanischen (graphischen) Lösung, indem er sage, er wolle für beide Verfahren der Reihe nach (*ἐν μέρει*, 203, griech. 6) zeigen, wie sie am bequemsten gehandhabt würden. In der Tat ist es, als wolle *Ptolemäus* dieses selbständig neben das graphische tretende Verfahren der Vollständigkeit halber für diejenigen, die es bevorzugen (*τοῖς προαιρουμένοις*, 202, griech. 24) kurz in den Hauptzügen (*κεφαλαιωδῶς*, 203, griech. 7) einfügen. Hinsichtlich der Rechenschärfe sei es unübertrefflich; aber das Verfahren mit dem Analemma selbst (*δὲ αὐτοῦ τοῦ ἀναλήματος*, 202, griech. 26), also das graphisch-mechanische, sei bequemer und hinreichend genau innerhalb der Grenzen der sinnlichen Anschauung, auf die der praktische Zweck der Abhandlung abzielt (202 unten).

Zeuthen hat damit einen Sachverhalt wieder klargestellt, welchen *Commandinus*, den *Zeuthen* nicht eingesehen zu haben scheint, richtig erfaßt hatte, obwohl *Wilhelm von Moerbeke* das *ἐν μέρει* in sinnloser wörtlicher Übertragung durch in parte (202, 29) wiedergegeben hatte. *Moerbeke* hat das *διὰ τῶν γραμμῶν* mit per lineas, an einer Stelle aber (203, 2) bemerkenswerterweise mit per numeros übersetzt. Das fiel dem *Commandinus*, dem ja der Urtext nicht vorlag, auf, und er schrieb dazu: Vide, ne potius legendum sit, per lineas,

nisi forte per numeros dixit, quoniam numeris utitur ad investigandas linearum quantitates, id quod et alibi saepius, et in magna compositione, tum *Archimedis*, tum aliorum antiquorum exemplo facere consuevit. *Commandinus* erläuterte dann weiterhin das Verfahren, indem er an Hand der Figur für die Polhöhe von Rom ein Beispiel durchrechnet, wobei er nur statt der ptolemäischen Sehnentafel die ihm zur Verfügung stehende Sinustafel benutzt, was keine wesentliche Abänderung ist. *Delambre* hat dann das Wesen dieses Verfahrens des *Ptolemäus* nicht verstanden. Er erklärte (a. a. O., S. 459), den Nutzen dieser Ausführungen nicht zu sehen.

Daß das Verfahren *διὰ τῶν γραμμῶν* kein mechanisch-graphisches sein kann, beweist schon der für dasselbe gebrauchte Ausdruck [*διὰ γραμμικῶν αποδείξεων* ...] (202, griech. 28), per lineares demonstrationes (202, 21). Um der Bedeutung des Ausdruckes *διὰ τῶν γραμμῶν* auf den Grund zu gehen, müssen wir in erster Linie mit *Björnbo*¹⁾ die von diesem zitierten Stellen aus dem *Almagest* heranziehen, wo der fragliche Ausdruck oder ein gleichwertiger wie *γραμμικῶς* gebraucht wird. Auf den *Almagest* hat ja auch schon *Commandinus* in der oben angeführten Stelle aufmerksam gemacht. Mag es sich hier nun, wie bei den Stellen des zweiten und achten Buches, um Konstruktionen auf der Kugeloberfläche, oder, wie bei denjenigen des ersten Buches, um solche in der Ebene handeln, stets liegen Figuren vor, die nach streng geometrischer Methode erzeugt sind, deren Eigenschaften also auf Grund theoretisch-geometrischer Lehrsätze durch Beweise — auf der Kugel *σφαιρικάι δειξεις* — zu ermitteln sind, und deren Stücke, wenn gewisse von ihnen gegeben sind, mit Hilfe jener Eigenschaften und Lehrsätze errechenbar sind. Auf die Errechenbarkeit zielt dabei für *Ptolemäus* alles ab. So wird insbesondere im ersten Buch des *Almagest* *γραμμικῶς* gezeigt, daß z. B. die Sehnen von 36°, 72°, 54°, 60° usw., ja schließlich die Sehnen aller Bögen, die ganzzahlige Vielfache von 1½° sind, bestimmt werden können. Man sieht, es handelt sich um diejenigen Sehnen, die streng geometrisch, mit Zirkel und Lineal, konstruierbar sind, und besonders deutlich wird der Sinn durch die von *Björnbo* nicht angeführte Stelle²⁾, wonach »aus der Sehne zu dem Bogen von 1½° die das Drittel desselben Bogens unterspannende Sehne *διὰ τῶν γραμμῶν* in keiner Weise ermittelt werden kann«. Hiernach sind *διὰ τῶν γραμμῶν* bestimmbar alle Stücke, die sich »mit Zirkel und Lineal« aus den gegebenen »konstruieren« lassen, also z. B., wie wir seit *Gauß* wissen, die Seite des regelmäßigen Siebzehneckes, nicht aber diejenige des Siebeneckes und nicht das Drittel eines beliebigen Winkels. Wenn *Björnbo* zu dem Ergebnis kommt, der strittige Ausdruck beziehe sich auf jede geometrische Methode oder Darstellung durch Figuren im Gegensatz zu anderen Methoden, wie z. B. instrumentalentalen oder rein rechnerischen, so möchte ich dem zustimmen unter der Voraussetzung, daß das Wort »geometrisch« in dem soeben präzierten Sinne gemeint ist. So sagt auch *Proclus*³⁾, von der in *Euklids* Elementen II, 10 behandelten Identität, *Euklid* habe sie *γραμμικῶς*, d. i. »geometrisch« bewiesen. Die hier von *Heath*⁴⁾ gegebene Übersetzung »graphically« erscheint mir nicht zutreffend.

¹⁾ *A. Björnbo*, Studien über *Menelaos'* Sphärik. Abhandl. zur Gesch. d. math. Wissensch., 14. Heft. Leipzig 1902, S. 83.

²⁾ *Claudii Ptolemaei* Syntaxis mathematica ed. *Heiberg*, Leipzig, 1889, I, 42, 20.

³⁾ *Proclus*, Comm. zur Republ. des Plato, ed. Kroll, II, 1901, Kap. 23 und 27, S. 24, 25 und 27–29 (zit. nach *Heath*, a. a. O. I, S. 93).

⁴⁾ *Th. L. Heath*, a. a. O., I, S. 93. Über sonstiges Vorkommen des Ausdrucks *διὰ τῶν γραμμῶν* vergl. *Heath*, II, S. 257–58.

Von den Größen, die in dieser Weise durch die gegebenen geometrisch bestimmt sind, sagt *Ptolemäus* im ersten Buch des *Almagest*: *δίδονταί*. Das bedeutet für ihn: Sie können berechnet werden, und hierbei kann es sich also nur um Rechenoperationen handeln, bei denen außer den rationalen Operationen höchstens Quadratwurzelausziehungen vorkommen. Desselben Ausdrucks bedient er sich auch fortwährend in dem uns vorliegenden Abschnitt des *Analemmas*. In den dem Verfahren zugrundeliegenden ebenen Figuren S. 203 und S. 207, die wesentlich mit unserer Figur 5 übereinstimmen, sind ursprünglich gegeben Polhöhe, Deklination und Stundenwinkel. Von diesen ausgehend, zeigt er, wie nacheinander gewisse Seitenverhältnisse der in der Figur vorkommenden rechtwinkligen Dreiecke bestimmbar sind, und gelangt so schließlich zur Bestimmbarkeit der gesuchten Stücke. Es ist eine Beschreibung des Gangs der Rechnung, anstelle einer für die Griechen nicht vorhandenen Buchstabenrechnung. Daß hierbei fälschlich einige Male (S. 205, 9–12; 205, 17–20; 209, 22–23) von einem rechtwinkligen Dreieck gesagt wird, die beiden Katheten dienen zur Ermittlung der Hypotenuse, während in Wirklichkeit eine Kathete und die Hypotenuse bekannt sind und zu diesen die andere Kathete ermittelt wird, hat schon *Commandinus* bemerkt, und das muß eine Textverderbnis sein. An der analogen Stelle (209, 24–25) wird die Sache richtig gesagt.

Nur darin unterscheidet sich die uns vorliegende *ἐπίσκεψις διὰ τῶν γραμμῶν* von dem im ersten Buch des *Almagest* vorliegenden Verfahren zur Sehnenermittlung, daß die gegebenen und die gesuchten Größen jetzt irgendwelche Winkelgrößen sind, während im *Almagest* der Kreisradius gegeben und Sehnen gesucht waren. Es müssen also nun, ehe das eigentliche Rechenverfahren beginnt, erst zu den mit zwei zu multiplizierenden Werten der gegebenen Bögen die Sehnen und zum Schluß zu den *γραμμικῶς* gefundenen Halbsehnen die gesuchten Bögen ermittelt werden. Das kann rechnerisch nur unter Verwendung der numerischen Sehnentafel geschehen sein, wie auch z. B. die Stelle 204, griech. 19–24 erweist. Da doch einmal überall mit Verhältnissen gerechnet wird, ist abgesehen von der Verdopplung gegebener und der Halbierung gefundener Bögen die Verwendung der Sehnentafel nicht viel umständlicher als die einer Sinustafel.

So müssen wir mit *Zeuthen* zu dem Ergebnis kommen, daß das von *Ptolemäus* skizzierte Verfahren ein Rechnen mit Sehnenfunktionen oder, modern gesprochen, ein trigonometrisches Rechnen ist.

Drecker hat die trigonometrischen Rechnungen für alle sechs Winkel im unmittelbaren Anschluß an die Figur des *Ptolemäus* mit modernen Funktionszeichen durchgeführt; auch hat er an einem durchgerechneten Beispiel gezeigt, wie sich für *Ptolemäus* die Rechnung mit der Sehnentafel gestalten mußte.

Bezeichnen wir wieder die Polhöhe mit φ , ferner die Deklination der Sonne mit δ und ihren Stundenwinkel¹⁾ mit t , so ergeben diese Rechnungen für die sechs ptolemäischen Winkel, die wir ebenso wie am Schluß des ersten Abschnitts bezeichnen, folgende Gleichungen:

¹⁾ Die rechnerische Verwandlung der antiken Stunden in Äquinoktialstunden konnte nach *Almagest*, Buch II, Kap. 9 geschehen.

$$\cos \zeta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} z \sin t = \sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \quad (11)$$

$$\cos \eta = \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t \quad (12)$$

$$\operatorname{ctg} \gamma \sin t = \cos \varphi \cos t + \sin \varphi \operatorname{tg} \delta \quad (13)$$

$$\cos \xi = \cos \delta \sin t \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t}{\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t} \quad (15)$$

Hierin gelten für *Ptolemäus* die absoluten Werte der gesuchten Funktionen, da er nur spitze Winkel benutzt. Zu denselben Formeln gelangen wir, wenn wir aus den Dreiecken Zenit-Pol-Sonne und Südpunkt-Pol-Sonne in moderner Weise die gesuchten Stücke berechnen, unter Benutzung der aus Gleichung (5) durch zyklische Vertauschung hervorgehenden Gleichung $\cos \zeta = \cos \eta \operatorname{tg} x$. Es stecken also in den Konstruktionen und Berechnungen des *Ptolemäus* der Kosinussatz (10 und 12) und der Kotangensatz (11 und 13) der sphärischen Trigonometrie. Ferner sind in den Konstruktionen unmittelbar enthalten die Formel (5) und ihre zyklischen Vertauschungen.

Für den Äquatorbogen u erhalten wir aus (9) und (13) die Formel

$$\operatorname{tg} u \sin t = \cos t + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \quad (16)$$

Die 7 Winkel kann man bequem folgendermaßen ausrechnen. Man findet ξ aus (14) und x aus

$$x = \varphi + \rho \quad \text{wobei} \quad \operatorname{tg} \rho = \cos t / \operatorname{tg} \delta \quad (15a)$$

ist und ρ die Projektion der Seite Sonne-Pol auf die Seite Zenit-Pol bedeutet. Hierauf findet man aus ξ und x die übrigen 5 Winkel mit Hilfe geeigneter Gleichungen aus unserer Gleichungsgruppe (1) bis (9). Gleichungen dieser Gruppe können auch zur Kontrolle der Rechnung dienen.

Wenn wir hier die einzelnen rechnerischen Schritte zu Formeln zusammenfassen, liegt es uns dabei fern, dem *Ptolemäus* irgend eine Art von Zusammenfassung seiner sukzessiven Berechnungen zuzuschreiben.

Es wäre eine riesige Arbeit für *Ptolemäus* gewesen, hätte er auch nur für ein einziges Klima und für den Anfangspunkt jedes Tierkreiszeichens und jeder temporären Stunde die Berechnung der 7 Winkel nach dem beschriebenen Verfahren durchführen wollen, wie er es später nach dem nomographischen Verfahren sogar für 7 verschiedene Polhöhen wirklich ausgeführt hat oder ausgeführt wissen will. Er hat dieses trigonometrische Verfahren wahrscheinlich nicht benutzt, sondern nur beschrieben.

5. Die graphische Rechentafel.

Obwohl wir schon gelernt haben, mit dem *Analemma* durch graphisches Rechnen die 7 Winkel zu ermitteln, so hatte uns doch *Ptolemäus* in Aussicht gestellt, auch für das graphische Verfahren zu zeigen, wie es am bequemsten (*ἐπὶ τὸ προχειρότατον* 203, griech. 4–5) durchgeführt werden könne. Nachdem die numerisch-trigonometrische Auflösung nunmehr — gewissermaßen einschiebungsweise — erledigt ist, kann der Verfasser den unterbrochenen Faden wieder aufnehmen und sich der weiteren Ausgestaltung der graphischen Methode zuwenden. Diese Ausgestaltung ist eine Weiterbildung des graphischen Rechenverfahrens zu einem

nomographischen. Dieses behandelt er viel ausführlicher und mit größerer Liebe als das nur in den Hauptzügen (*κεφαλαιωδῶς*) skizzierte rechnerische Verfahren, und man gewinnt den bestimmten Eindruck, daß es sich hier um etwas von ihm neu Dargebotenes handelt.

Die Konstruktion gliedert sich jetzt in drei verschiedenartige Teile, oder Schichten. In der Tafel 1 haben wir die Linien der ersten Schicht dick, die der zweiten dünn und das zur dritten Schicht Gehörige punktiert gezeichnet. *Ptolemäus* hat der ersten Schicht der Konstruktion die Figur S. 213, der zweiten und dritten Schicht die besonderen Figuren S. 218 und S. 219 gewidmet. Da es sich bei diesen letzten Schichten um die Zubereitung des »Nomogramms« für eine spezielle Polhöhe und um seine Benutzung handelt, haben die Figuren S. 218 und S. 219 die Bedeutung von »Schlüsselfiguren«, wie man sie heute zuweilen graphischen Rechentafeln zum Zweck der raschen Zurechtfindung im Ableseverfahren beigibt. Wir sparen diese Schlüsselfiguren, indem wir alles in die Hauptfigur eintragen. Um den Vergleich mit dem Urtext zu erleichtern, wurden in Tafel 1 diejenigen griechischen Buchstaben gewählt, die den lateinischen der Figur auf S. 213 entsprechen, für die »zweite« und »dritte« Schicht aber die lateinischen Buchstaben der Figur von S. 219; ferner wurden noch zur besseren Verständigung die Buchstaben v , v_1 , w , w_1 , y , y_1 eingeführt.

a) Erste Schicht der Konstruktion.

(210, 3–211, 6; 212, 11–216, 22).

Die erste Schicht der Konstruktion enthält die für alle Klimata ungeändert bleibenden Linien und Teilstriche. Sie sind auf einer ehernen, steinernen oder hölzernen scheibenförmigen Platte mit dem Durchmesser AB (Tafel 1) und dem

Mittelpunkt I dauernd einzugraben oder aufzutragen. Diese Linien und Teilungen sind folgende:

1. Der Meridian mit dem Durchmesser AE . Sein Halbmesser IA ist ungefähr gleich $\frac{2}{3}$ des Plattenhalbmessers zu wählen. Der Durchmesser AE ist als Orthogonalprojektion des Himmelsäquators zu betrachten.

2. Ein in 90 Grad¹⁾ geteilter Quadrant HOK , dessen Radius gleich dem des Meridians ist und dessen Mittelpunkt Z den Meridianradius IA etwa im Verhältnis 1 : 2 derart teilt, daß Z dem Punkte I benachbart ist. Dieser Quadrant, der vom Durchmesser AB halbiert wird, dient der Messung der auf dem Meridian abgegriffenen Bögen in der früher beschriebenen Weise. Es ist nützlich, aber nicht notwendig, einen ebensolchen Winkelmesser auch nach der anderen Seite zu zeichnen, da wir die Rechentafel auch in einer um 180° gedrehten Stellung benutzen werden.

3. Der Kreis $AMNE$. Sein Mittelpunkt ist I , und sein Radius ist so zu wählen, daß der Kreis ungefähr mitten zwischen A und Θ hindurchgeht. Die auf AB liegenden Punkte A und N und die Punkte M und E teilen diesen Kreis in vier Quadranten. Einer dieser Quadranten ist in 90 Grad geteilt. Auf diesem tragen wir die jedem einzelnen Klima zukommenden Polhöhen ein und übertragen die Teilstriche auf die übrigen drei Quadranten. Die Bögen von den betreffenden Gradzahlen werden von den Teilpunkten A , M , N , E aus nach rechts herum (d. h. also in negativem Drehungssinne) abgetragen, da wir die Meridiane von Osten aus betrachten.

Die von *Ptolemäus* für 7 Klimata angegebenen Polhöhen sind aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich:

Klima	1	2	3	4	5	6	7
Längster Tag in Äquinoktialstunden	13	13½	14	14½	15	15½	16
Polhöhe nach dem Analemma	16° ½ ½ ½ = 16° 25'	23° ½ ½ ½ = 23° 50'	30° ½ ½ = 30° 20'	36° = 36°	40° ½ ¼ ¼ ¼ = 40° 41'	45° = 45°	48° ½ = 48° 30'
Polhöhe nach dem Almagest	16° 27'	23° 51'	30° 22'	36°	40° 56'	45° 1'	48° 32'

In der letzten Zeile haben wir nach *Dreckers* Vorgang die Polhöhen mitgeteilt, die *Ptolemäus* im Almagest für die 7 Klimata angibt. Wie man sieht, hat er im Analemma die Werte auf Zwölftelgrade, d. h. auf Vielfache von 5', abgerundet. Nur beim fünften Klima muß der Text verderbt sein. Das hat schon *Moerbeke* gemerkt, der in seiner Übersetzung die Stelle für diese Zahl offen ließ. Man muß nach dem von *Ptolemäus* hier und auch später in der Tafel der gesuchten Winkel befolgten Abrundungsprinzip erwarten: 40° ½ ½ ½. *Commandinus* hat in seine Übersetzung die schärferen Werte hineinverarbeitet, hat damit aber der offensichtlichen Absicht des *Ptolemäus*, für den graphischen Zweck geeignete Abrundungen zu geben, entgegengehandelt.

4. Die Durchmesser OII , $P\Sigma$, TY dreier Parallelkreise mit den in die Zeichenebene umgelegten östlichen Hälften dieser Parallelkreise. Der zu OII gehörige Tropikos wird für die Sommer- und Wintersonnenwende verwandt (Anfangspunkte des Krebses und des Steinbocks, Sonnenlängen 3 und 9 Zeichen), der zu $P\Sigma$ gehörige Parallelkreis für die Anfangs-

punkte der Zwillinge, des Löwen, des Schützen und des Wassermanns (Längen 2, 4, 8 und 10 Zeichen), endlich der zu TY gehörige Parallelkreis für die Anfangspunkte des Stiers, der Jungfrau, des Skorpions und der Fische (Längen 1, 5, 7, 11 Zeichen). Es wird also z. B. die Parallelkreisspur $P\Sigma$ mit dem zugehörigen umgelegten Halbkreis nicht nur für die beiden Tage mit der betreffenden Deklination im Frühling und Sommer benutzt, sondern auch für die beiden Tage im Herbst und Winter, an denen die Deklination negativ, aber von gleichem absolutem Betrage ist. Von den Sommerzeichen geht man zu den entsprechenden Winterzeichen über, indem man die Platte um 180° dreht (220, 31–221, 21).

Wie schon früher gesagt, findet *Ptolemäus* die Deklinationen AO , AP und AT nicht mit Hilfe des manachus, sondern er gibt ihre Zahlenwerte fertig an. Dem Tropikos (OII) kommt die Deklination 23° ½ ½ = 23° 50' zu, die als Bogen $AO = EII$ auf dem Meridian abzutragen ist. Der dem Tropikos benachbarte Parallelkreis ($P\Sigma$) hat die Deklination $AP =$

¹⁾ In Tafel 1 wurden bei den Gradeinteilungen ebenso wie in Fig. 6 nur die Teilstriche von 5 zu 5 Grad eingezeichnet.

$ES = 20^\circ \frac{1}{2} = 20^\circ 30'$ und der Parallelkreis, der dem Äquator benachbart ist (TY), die Deklination $AT = EY = 11^\circ 40'$. T_0 in 215, griech. 19 muß $\frac{2}{3}$ bedeuten!) Auch hier hat *Ptolemäus* wieder schickliche Abrundungen der im *Almagest* angegebenen Werte gewählt. Die Durchmesser des Tropikos (OII) und des dem Äquator benachbarten Parallels (TY) sind mit den zugehörigen Halbkreisen auf der einen Seite des Äquatordurchmessers (rechts) gezeichnet, der Durchmesser PS des dem Tropikos benachbarten Parallels mit seinem Halbkreise auf der anderen Seite (links). Es sind also die beiden am weitesten voneinander entfernten Parallelkreise auf der einen Seite, der dritte allein auf der anderen Seite untergebracht. Dies geschieht, damit sich die später auf den Halbkreisen und ihren Durchmessern anzubringenden Stundenteilungen möglichst wenig stören. Vorläufig bleiben diese Halbkreise mit ihren Durchmessern aber ohne Teilungen. Wohl aber entwerfen wir:

5. auf jedem der beiden Halbkreise des Meridians (die wir auch als umgelegte Hälften des Äquators, d. h. des Parallels von der Deklination null auffassen müssen) Teilungen in je 12 gleiche Stunden,

6. die Projektionen der eben genannten Stundenteilungen auf den Durchmesser AIE . Auf diesem entsteht also eine Sinusleiter. Obwohl die Griechen die Sehnfunktion statt der Sinusfunktion benutzten, hatte *Ptolemäus* also schon eine skalare Darstellung der letzteren. Schon *Delambre* wies auf diese bemerkenswerte Tatsache hin. Diese von der Polhöhe unabhängigen Teilungen des Äquators und seines Durchmessers können im Gegensatz zu den Stundenteilungen der übrigen Parallelkreise dauernd angebracht werden.

Hiermit sind nun diejenigen Linien und Teilungen aufgezählt, die auf der Platte nie ausgelöscht zu werden brauchen. Ist die Platte aus Erz oder Stein, so werden diese Linien und Teilungen eingeritzt. Ist sie aus Holz, so werden sie in Farbe aufgetragen — alles schwarz, nur der Meridian und der Äquatordurchmesser mit den darauf befindlichen Teilungen rot — und dann wird die Holzplatte zur Aufnahme der weiteren Zeichnung mit Wachs überzogen, »wie es bei den Sphären geschieht«. (Die Griechen hatten demnach wohl mit Wachs überziehbare Kugeln zum Zeichnen astronomischer oder sphärisch-trigonometrischer Figuren.)

b) Zweite Schicht der Konstruktion.

(211, 6–13; 216, 23–217, 3; 217, 21–23; 219, 8–23.)

Mit den vorhin beschriebenen bleibenden Konstruktionen ist das, was wir heutzutage die graphische Rechentafel oder das Nomogramm nennen, soweit fertiggestellt, wie es für beliebige geographische Breiten möglich ist. Was jetzt folgt, könnten wir also schon als die Vorschrift für die Benutzung der Rechentafel bezeichnen. Diese Benutzung zerfällt aber in zwei Teilhandlungen. Die erste, die wir hier als zweite Schicht der Konstruktion bezeichnet haben, ist die Zurichtung der Tafel für ein gegebenes Klima. Diese Zurichtung ist noch ein wirkliches Zeichnen, und zwar von Geraden und Teilstreichen. Diese Geraden und Teilstreiche fallen für jedes Klima anders aus, müssen also leicht auslöschar sein.

1. Wir zeichnen den Horizontdurchmesser (die Mittagslinie) ab und die Scheitellinie gd für die betreffende Polhöhe. Zu diesem Zweck brauchen wir bloß die mit dem betreffenden Klima bezifferten Teilpunkte auf den Quadranten des Kreises $AMNE$, welche Teilpunkte nur zu diesem Zweck ein für allemal angelegt wurden, kreuzweise zu verbinden. In der Figur haben wir diese Linien für das fünfte Klima gezogen (Dauer des längsten Lichttages 15 Äquinoktialstunden).

2. Es sei h der Schnittpunkt des Horizontdurchmessers mit dem Durchmesser desjenigen Parallelkreises, für den wir die Winkelbestimmungen vornehmen wollen (in der Figur haben wir den Tropikos OII gewählt). In h errichten wir auf OII die Senkrechte, die uns auf dem umgelegten Halbparallel den Aufgangspunkt l liefert.

3. Jeden der beiden ungleichen Teile, in die diese Senkrechte den Halbparallel zerlegt, also den Halbtagbogen lO und den Halbnachtbogen lII , teilen wir in seine 6 bürgerlichen Stunden ein. Die Lichttagstunden eines Sommertags fallen größer aus als die Nachtstunden, die durch die Drehung der Tafel um 180° zu den Tagstunden eines Wintertags werden, an dem der absolute Betrag der Deklination ebenso groß ist.

4. Diese Stundenteilung des Halbparallels projizieren wir nun auf dessen Durchmesser OII .

Delambre sagt einfach, man solle den Halbparallel in 12 Stunden teilen, und die Projektion dieser Teilung auf den Durchmesser sei eine Sinusteilung. Er scheint also irrtümlich Äquinoktialstunden anzunehmen.

c) Das Platysma. (211, 13–26.)

Schon für die Senkrechte hl und für die Projektion der Stundenteilung, besonders aber bei der dritten Schicht der Konstruktion, kommt ein besonderes Gerät zum Errichten von Senkrechten und zum Fällen von Loten zur Verwendung, nämlich eine sehr dünne, genau rechtwinklige Platte ($\pi\lambda\acute{\alpha}\nu\sigma\mu\alpha$), d. h. also ein plattes Winkelmaß etwa von der Form eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Schenkel des rechten Winkels sollen nicht kleiner sein als der Radius des Meridians der Rechentafel. Warum, wird sich später bei Benutzung des Platysmas zur Gewinnung von Schnittpunkten auf dem Meridiankreis herausstellen.

d) Dritte Schicht der Konstruktion.

(211, 26–212, 11; 217, 3–16; 217, 29–219, 2; 219, 23–220, 30.)

Erst nach Einzeichnung der von der Polhöhe abhängigen Elemente ist die Rechentafel ganz gebrauchsfertig. Die nun folgende Ermittlung der 7 Winkel wird nicht mehr durch Ziehen von Linien vollzogen, sondern durch Manipulationen mit zwei Ablesegeräten, nämlich einem Zirkel und dem soeben beschriebenen Platysma. »Denn ganz und gar wollen wir die Ermittlung der Bögen auf dem Meridian nur vermittels des Zirkels und der rechtwinkligen Platte bewerkstelligen, indem wir gar keine weiteren Geraden ziehen als die früher genannten, sondern die Zeichnung nackt lassen, um das Folgende gut ermitteln zu können...« (212, griech. 2–16).

Zeuthen sagt, mit Recht habe *Delambre* das von *Moerbeke* gebrauchte »cancer« durch »équerre« wiedergegeben. Das ist aber nicht der Fall. Der Wortgebrauch ist vielmehr der in der folgenden Zusammenstellung wiedergegebene:

1. Der Zirkel.

<i>Ptolemäus</i>	<i>Moerbeke</i>	<i>Commandinus</i>	<i>Delambre</i>
παρξίνος	cancer	circinus	compas

2. Das Platysma.

<i>Ptolemäus</i>	<i>Moerbeke</i>	<i>Commandinus</i>	<i>Delambre</i>
πλάτυσμα	latus rectangulum,	norma	équerre
δορυόγωνιον	platina rectangula		

Bezeichnen wir mit m den Stundenpunkt (Sonnenort) in der Umlegung (in der Figur haben wir den Endpunkt der ersten Stunde gewählt) und mit n den Punkt mit derselben Bezeichnung (»eiusdem ordinis«) auf dem Durchmesser des Parallelkreises, also die Projektion von m , so werden die 7 Winkel durch folgende Ableseoperationen gewonnen:

1. Der Hektemoroswinkel. Man setzt die eine Zirkelspitze in n ein, nimmt die Zirkelöffnung gleich nm und dreht den Zirkel um n , bis die andere Zirkelspitze den Meridian im Punkte x erreicht. Dann legt man (mit der anderen Hand) das Platysma so auf die Rechentafel, daß der Scheitelpunkt des rechten Winkels in Γ liegt und der eine Schenkel durch n geht. Dieser Schenkel schneide den Meridian in o , der andere in p . Dann ist xp der gesuchte Hektemorosbogen. Man greift ihn mit dem Zirkel ab (die eine Zirkelspitze steht schon in x) und findet seinen numerischen Wert, indem man diese Zirkelöffnung (Sehne) auf den geteilten Quadranten (Winkelmesser) HOK überträgt.

*Delambre*¹⁾ will den Punkt o markieren und das Platysma so anlegen, daß der eine Schenkel durch den soeben erst gewonnenen Punkt x geht. Das hat aber *Ptolemäus* nicht gesagt, und es wäre auch umständlicher. So bedeutungslos diese kleine Abweichung *Delambres* aus dem Gesichtspunkt der Geometrie ist, so bemerkenswert ist sie vom Standpunkt der nomographischen Praxis. Bei *Ptolemäus* steht die eine Hand mit der Zirkelspitze in x , die andere hat das Platysma eingestellt. Dann kann die erstgenannte Hand ohne weiteres den Hektemorosbogen xp abgreifen, indem sie einfach die andere Zirkelspitze auf p setzt. Diese geschickte Folge der Manipulationen, bei der die eine Hand mit dem Zirkel immer weiter schreitet, bedeutet, da sie sich für alle Stundenpunkte wiederholt, eine wesentliche Zeitersparnis. Sie wird aber durch die *Delambresche* Abänderung umgeworfen. Offenbar will auch *Ptolemäus* auf dem Meridianbogen keine konstruierten Punkte, wie x , markieren. Solche Markierungen könnten, da sie für jede Stunde vorzunehmen wären, zu Verwechslungen führen, man müßte sie denn jedesmal auslöschen, was die rasche Abfolge der Bestimmungen noch mehr aufhalten würde.

Ptolemäus bestimmt, wie er (217, 4) ausdrücklich sagt, gleich hintereinander die Hektemorosbögen für alle 7 Stundenpunkte, dann gleich auch, nachdem er die Tafel um 180° gedreht hat, die Hektemorosbögen für alle Stundenpunkte der beiden entgegengesetzten Tierkreiszeichen. Dieselbe Reihenfolge hält er dann beim Horariusbogen und den übrigen zu bestimmenden Bögen ein. Das ist auch zweckmäßig, denn es geht viel schneller, wenn man eine zeitlang nomographische Bestimmungen in einem Zuge nach demselben Ableseverfahren macht, wo man dann einmal eingespielt ist, als wenn

man dieses Verfahren fortwährend wechseln muß. Erst nachdem alle Bögen für alle Stunden eines Parallelkreises bestimmt sind, löscht man die Stundenteilungen dieses Parallelkreises aus und geht zu einem anderen über.

Hiernach wären die Angaben *Dreckers*²⁾ zu berichtigen. Er nimmt an, es sollten für jede einzelne Stunde die 6 Bögen durch wirkliches Zeichnen von Linien und Punkten gewonnen und dann alle 6 hintereinander abgegriffen werden. Dann seien die »Linien und Punkte« auszulöschen und die Konstruktion für eine weitere Stunde könne beginnen.

2. Der Horariuswinkel. Man setzt die eine Zirkelspitze in den Schnittpunkt h des Parallelkreisdurchmessers mit der Nordsüdlinie ab , gibt dem Zirkel die Öffnung hm und dreht ihn um h , bis die andere Spitze den Meridian in q erreicht. Dann ist derjenige der beiden Bögen aq oder bq , der kleiner als 90° ist, der gesuchte Horariusbogen (in Tafel 1 bq). Sein numerischer Wert wird wieder durch Abgreifen auf dem Winkelmesser HOK ermittelt.

Das ist ein sehr bequemes reines Zirkelverfahren, bei dem der Zirkel zunächst bloß zweimal weiterzuschreiten hat, unter Änderung der Zirkelöffnung beim zweiten Schritt. Obwohl solche Zirkelabgreifungen im allgemeinen als die genauesten graphischen Operationen zu betrachten sind, wird im vorliegenden Falle das Ergebnis nicht sehr scharf sein, wenn der Kreis um h den Meridian zu flach schneidet.

3. Der Descensivuswinkel. Das Verfahren ist ganz ebenso wie beim Horariuswinkel: Ist t der Schnitt des Parallelkreisdurchmessers mit der Scheitellinie gd , so macht man $tr = tm$. Dann ist gr der gesuchte Descensivkreisbogen, dessen numerischer Wert wie früher durch Abgreifen auf HOK ermittelt wird.

Der Punkt q für den Horariusbogen und der Punkt r für den Descensivusbogen hätten auch mit Hilfe des Platysma gefunden werden können, da, wie wir sahen, qn auf ab und rn auf gd senkrecht stehen. *Ptolemäus* zieht offenbar die reine Zirkelablesung vor.

4. Der Meridianwinkel. Man legt eine Seite des Platysmas, das in diesem Falle bloß als Lineal benutzt wird, so an Γn an, daß auf dem Meridian der Schnittpunkt o bestimmt wird. Dann ist derjenige der beiden Bögen ao oder bo , der kleiner als 90° ist (in Tafel 1 bo), der gesuchte Meridianbogen. Er wird in der üblichen Weise abgegriffen. Übrigens war der Punkt o schon bei der Bestimmung des Hektemorosbögen mit dem Platysma eingestellt.

5. Der Vertikalkreiswinkel. Man legt die eine Kathete des Platysmas so an gd , daß die andere durch n geht. Liegt dann der Scheitelpunkt des rechten Winkels des Platysmas in v , so greifen wir mn mit dem Zirkel ab, setzen die eine Zirkelspitze auf v und die andere in v_1 hart an die durch n gehende Kathete. Indem wir diese letzte Spitze nun in v_1 fest stehen lassen, drehen und verschieben wir das Platysma, bis die der Zirkelspitze anliegende Kathete durch Γ geht. Dabei soll diese Kathete hart an der Zirkelspitze liegen bleiben. Schneidet die Kathete dann den Meridiankreis in s , so ist gs der gesuchte und in der üblichen Weise abzugreifende Vertikalkreisbogen.

1) a. a. O. S. 464.

2) a. a. O. S. 6.

6. Der Horizontwinkel. Das Verfahren ist dem vorhergehenden ganz analog: Man legt das Platysma so mit der einen Kathete an ab , daß die andere durch n geht. Ist jetzt w der Scheitel des rechten Winkels, so macht man $ww_1 = mn$ und dreht und verschiebt wieder die der Zirkelspitze in w_1 anliegende Kathete, bis sie durch I geht. Schneidet sie dann den Meridian in c , so ist cg der gesuchte Horizontbogen.

Übrigens kommen bei der Bestimmung des Vertikalreisbogens und des Horizontbogens die beiden Einstellungen des Platysmas vor, die, wie wir sahen, auch für die Bestimmung der für den Horarius- und Descensuswinkel erforderlichen Punkte q und r verwendbar gewesen wären.

7. Der Äquatorwinkel. Wir greifen $Iy = mn$ auf Ig ab, legen das Platysma ¹⁾ so an, daß der Scheitel des rechten Winkels auf y und die eine Kathete auf yI fällt und machen durch Abgreifen $yy_1 = nh$. Dann drehen und verschieben wir das Platysma, dessen eine Kathete der Zirkelspitze bei y_1 dauernd anliegt, bis diese Kathete durch I geht. Trifft sie dann den Meridiankreis in einem Punkte f , so ist gf der gesuchte Äquatorbogen, dessen Winkelwert wie gewöhnlich abgegriffen wird.

Über die Richtigkeit der Gewinnung der 6 ersten Bögen ist kein Wort zu verlieren, da das Verfahren ja die genaue nomographische Wiederholung der früher gegebenen graphischen Methode ist. Beim 7. Winkel ist nur das Dreieck hmn , d. i. das Dreieck OMN der Figur 5 so in das Dreieck Iyy_1 der Tafel 1 nomographisch umgelegt worden, daß der gesuchte Winkel als Zentriwinkel des Meridiankreises auftritt und damit als Bogen gf dieses Kreises abgreifbar wird.

Wir haben hier wieder sofort den allgemeinen Fall einer von null verschiedenen Deklination dargestellt. *Ptolemäus* schickt wie früher den Sonderfall für die Äquinoktien voraus. In diesem Fall fällt der Hektemoroskreis mit dem Äquator zusammen und der Hektemorosbogen, der mit dem Äquatorbogen zusammenfällt, kann ohne weiteres vom Meridiankreis abgegriffen werden. Die unbestimmt gewordenen reinen Zirkelabgriffe für Horarius- und Descensuswinkel werden durch die schon angegebenen Methoden ersetzt, bei denen die Punkte q und r mit dem Platysma gewonnen werden.

6. Die Eintragung der 6 von *Ptolemäus* eingeführten Winkel in Tabellen. (222, 14–223, 18.)

Ptolemäus behandelt zum Schluß die tabellarische Aufzeichnung der 6 mit dem Analemma zu berechnenden Winkel. (Den Äquatorwinkel hat er nun fallen lassen.) Für den Anfangspunkt jedes Tierkreiszeichens und für jedes Klima ist eine Tabelle anzulegen. Doch sind immer die Tabellen für je zwei Tierkreispunkte gleicher Deklination, z. B. für den Anfangspunkt des Stiers und den der Jungfrau, identisch. So bleiben die folgenden 7 Sonnenlängen übrig: 0° , 30° , 60° , 90° , 210° , 240° , 270° . Da auch 7 verschiedene Klimata angenommen wurden, so kommen 49 Tabellen heraus. Eine derselben finden wir am Ende der Schrift wiedergegeben. Zu jeder Vor- und Nachmittagstunde ist in sie der Wert jedes der 6 Winkel eingetragen. Da *Ptolemäus* keine stumpfen Winkel anwendet und deshalb z. B. den Horariusbogen einmal vom Südpunkt und einmal vom Nordpunkt aus messen muß,

so ist vor die Spalte der Stunden noch eine Spalte gesetzt, in der vermerkt wird, ob sich die Sonne südlich oder nördlich des ersten Vertikals befindet. Die eingetragenen Zahlen sind nicht alle richtig erhalten, lassen aber deutlich erkennen, daß *Ptolemäus* alle Ergebnisse auf Vielfache von 5 Minuten abgerundet hat. *Drecker* hat die Tabelle nachgerechnet. Er fand, daß der Fehler an 4 Stellen einen Grad überschreitet und daß der mittlere Fehler $23'$ beträgt.

Commandinus nimmt an, daß die übrigen Tabellen im Laufe der Zeit verloren gegangen sind. Wenn *Ptolemäus* wirklich, wie man ja wohl nach dem Text annehmen muß, alle 49 Tabellen mit dem Analemma ermittelt und seiner Schrift beigelegt hatte — diese hatte dann etwa eine doppelt so große Ausdehnung wie der uns erhaltene Teil — so hatte er damit den weiteren Gebrauch des Analemmas überflüssig gemacht. Denn sieht man von Interpolationen zwischen den durch Linien oder Teilstriche dargestellten Werten der Klimata, Sonnenlängen oder Stunden ab, so hatte er dann alle aus dem Analemma zu gewinnenden Ergebnisse numerisch vertafelt. Das so erhaltene Tabellenwerk konnte sich an Umfang mit den größeren Tabellen des *Almagest* messen.

7. Der nomographische Charakter des Verfahrens.

Unter einer graphischen Rechentafel oder einem Nomogramm verstehen wir eine aus unbezifferten und bezifferten Punkten und Linien, Punktescharen und Linienscharen bestehende Zeichnung, aus der, oft mit Hilfe eines oder mehrerer Ablesegeräte, zu beliebig gegebenen Werten von unabhängigen Veränderlichen die ihnen gesetzmäßig zugeordneten Werte abhängiger Veränderlichen entnommen werden können.

Das Analemma des *Ptolemäus* können wir als eine solche graphische Rechentafel bezeichnen. Es besteht aus ungeteilten Linien und solchen, die mit Teilungen versehen sind, also »Skalen« oder »Leitern«, für die Veränderlichen. Infolge der Eintragung der 7 Klimata an eine nach Winkelgraden geteilte Leiter ist sogar eine »Doppelleiter« $N\bar{E}$ entstanden. Die Veränderlichen sind Polhöhe, Tagesstunde und die gesuchten Winkel. Wenn man will, ist die veränderliche Sonnenlänge ebenfalls durch eine Schar dargestellt, nämlich durch die Parallelkreisdurchmesser, von denen aber nur 4, AE , OH , $P\Sigma$, TY , gezeichnet zu sein brauchen.

Die Werte der gesuchten Veränderlichen, nämlich der 7 Winkel, werden nicht durch Zeichnung, sondern durch Einstelloperationen mit besonderen Ablesegeräten, dem Zirkel und dem rechten Winkel, gefunden, Ablesegeräten, die übrigens beide auch in der modernen Nomographie Verwendung finden. Operationen, wie die Einstellung des Platysmas in die Lage oIp (Tafel 1), wo also der mehr oder weniger stumpfe Scheitelpunkt des Platysmas auf einen Punkt I der Grundtafel zu stellen ist, wird man natürlich im Interesse der Genauigkeit beanstanden. Heute würde man das Platysma aus einem durchsichtigen Zellhornblatt herstellen können, bei dem die Schenkel des rechten Winkels noch ein Stück über den Scheitel hinaus verlängert sind.

Auch zu den für jede spezielle Polhöhe eintragbaren und auslöschbaren Linien und Teilstrichen (zweite Schicht der Konstruktion) hat die moderne Nomographie Analogien.

¹⁾ Während wir für die bisherigen Aufgaben das Platysma immer ganz eingezeichnet haben, geschieht dies hier nicht mehr, um die Figur nicht zu überlasten.

Allerdings sind solche vorübergehenden Eintragungen heute selten mehr als einzelne Linien oder Teilstriche.

Bemerkenswert ist die Sorgfalt und das Geschick, wie *Ptolemäus* alle möglichen praktischen Vorteile wahrnimmt. Größe und Anordnung der Kreise, Halbkreise und Teilungen sind, soweit über sie frei verfügt werden konnte, günstig gewählt. Man denke z. B. an die viermalige Anbringung der Teilung für die Klimata oder an die Verteilung der Halbmeridiane auf beiden Seiten des Äquators, die so getroffen ist, daß sich die Skalen auf den Halbkreisen und ihren Durchmessern möglichst wenig nahekommen, wie der Verfasser ausdrücklich hervorhebt. Man denke an die hiermit in Zusammenhang stehende Drehbarkeit der Tafel um 180° , die einen Sommerparallel gleich in einen Winterparallel umwandelt und damit die Tafel vor Überlastung mit Skalen bewahrt. Vor allem aber beachte man, daß *Ptolemäus* die Ablesoperationen so gewählt und angeordnet hat, daß man rasch in einem Zuge eine Reihe von Winkelbestimmungen vornehmen kann.

Ebenso wie *Ptolemäus* im Anfang der Schrift einen mehr theoretischen Gegenstand, den Koordinatenbegriff mit dem Bewußtsein seiner prinzipiellen Bedeutung eingeführt hat, so führt er hier auch seine praktischen Anordnungen bewußt und unter Äußerungen über ihre Zweckmäßigkeit ein. Dabei kennzeichnet er wiederholt sein Verfahren durch Eigenschaftsbezeichnungen, die uns stark an diejenigen erinnern, mit denen man noch heute die Vorzüge nomographischer Methoden empfiehlt. »Bequem« (*εὐπόριστος*, 202, griech. 25, wörtlich »leicht zu beschaffen«), »handlich« (*facile* in promptu 216, 23) nennt er sein Verfahren. »Leicht« (*ῥαδίως*) könne man durch Einstellung des Platysmas Lote erhalten. Beim Vergleich mit dem genaueren numerischen Verfahren bringt er, wie wir sahen, hinsichtlich der Genauigkeit das uns noch heute geläufige Argument vor, daß die Genauigkeit hinreichend für den praktischen Zweck ist. Und wenn er betont, daß die Tafel nicht mit verwirrenden Einzelkonstruktionen belastet, sondern »nackt« gehalten wird, so erinnert das lebhaft daran, daß man an den modernen Leitertafeln die »Leere des Schlachtfeldes« rühmt. (*L. Bieberbach* gebraucht diesen Ausdruck.)

Eine spezielle nomographische Fachterminologie hatte sich noch nicht herausgebildet, ist aber vielleicht doch schon in ihren Anfängen zu erkennen. So sind mit den *σημειώσεις* (210, griech. 19) die Gesamtheiten der Teilstriche auf den betreffenden Halbkreisen und Durchmessern gemeint, und man könnte deshalb dieses Wort geradezu mit »Teilungen« oder »Skalen« wiedergeben, ebenso wie das anderswo gebrauchte »divisiones«.

Von einer Bezifferung der Teilstriche ist nicht ausdrücklich die Rede. Daß aber etwa an die Zehnerstriche der 90° -Teilungen die Zahlen geschrieben wurden, darf man wohl für möglich halten. Wie sollte man sonst die Größen »promptas in numeris« haben (201, 24)? Eine Bezifferung der Stundenpunkte auf den Parallelkreisen und ihren Durchmessern

liegt ebenfalls nahe. Brachte man sie nicht wirklich an¹⁾, so standen die Ziffern natürlich vor dem geistigen Auge des Benutzers. Kann man doch die »divisio eiusdem ordinis« (S. 219, 25) geradezu als den »Teilstrich mit derselben Bezifferung« deuten. Über die Bezifferung der vier kongruenten Klimaleitern ist Ähnliches zu vermuten.

Um die Gleichungen der im Analemma vorkommenden Funktionsleitern in der heute üblichen analytischen Form aufzustellen, bezeichnen wir wie früher die Polhöhe mit φ , die Deklination der Sonne mit δ und ihren Stundenwinkel mit t . Ferner sei die Länge der Sonne λ , und die Stundenzahl im antiken Sinne, d. h. die Zahl, die angibt, wieviel Sechstel des jeweiligen halben Lichttags abgelaufen sind, sei τ . Bezeichnen wir weiter mit d_0 den halben Tagbogen des längsten Tages für eine Polhöhe φ , so durchläuft, da die längsten Tage 13, $13\frac{1}{2}$, 14, ..., 16 Stunden dauern sollen, d_0 die Werte $97^\circ 30'$, $101^\circ 15'$, 105° , ..., 120° . Für *Ptolemäus* sind φ (oder statt dessen d_0 , das eine eindeutige Funktion von φ ist), λ und τ die unabhängigen Variablen. Nehmen wir mit *Ptolemäus* die Schiefe der Ekliptik $= 23^\circ 50'$ an, so ergibt sich für den halben Tagbogen d_0 des längsten Tages die Formel

$$\cos d_0 = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} 23^\circ 50'. \quad (17)$$

Dies ist demnach die Gleichung der in dem Analemma enthaltenen Klimaleiter. Setzt man in ihr für d_0 der Reihe nach die Werte $97^\circ 30'$, $101^\circ 15'$, 105° , ..., 120° ein, so erhält man die zugehörigen Werte φ , bei denen die betreffenden Klimaleiterteile anbringen sind.

Nehmen wir den Halbmesser IA des Meridians gleich 1, so hat ein beliebiger Parallelkreisdurchmesser, z. B. OII , die Länge $2 \cos \delta$. Hätte *Ptolemäus* den halben Parallelkreis nach Äquinoktialstunden $t' = t/15$ geteilt, so wäre auf jedem Parallelkreisdurchmesser eine Cosinusleiter

$$f(t') = \cos \delta \cos t = \cos \delta \cos 15t' \quad (18)$$

entstanden. In dieser Gleichung bedeutet der für jeden Parallelkreisdurchmesser konstante Faktor $\cos \delta$ weiter nichts als den Maßstab der Leiter. Für *Ptolemäus* gelten aber statt δ und t als unabhängige Variable λ und τ , die nun statt δ und t einzuführen sind.

Wir tun dies mit Hilfe folgender drei Gleichungen:

$$\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin 23^\circ 50' \quad (19)$$

$$t = d \left(\frac{1}{6} \tau - 1 \right) \quad (20)$$

$$\cos d = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (21)$$

In diesen Gleichungen bedeutet d den halben Lichttagbogen des Tages von der Deklination δ . Die Gleichung (20) verknüpft den Stundenwinkel t mit der Anzahl τ der antiken Stunden und ergibt sich daraus, daß für $\tau = 0$, d. h. bei Sonnenaufgang, $t = -d$ und für $\tau = 6$, d. h. mittags, $t = 0$ sein muß.

Drückt man aus diesen 3 Gleichungen unter Elimination von d die Größen $\cos \delta$ und $\cos t$ als Funktionen von λ und τ aus und setzt die erhaltenen Ausdrücke in (2) ein, so erhält man die Gleichung der zu dem Halbtagebogen auf dem Parallelkreisdurchmesser gehörigen τ -Teilung:

$$f(\tau) = \sqrt{(1 - \sin^2 \lambda \sin^2 23^\circ 50')} \cdot \cos \left[\left(\frac{\tau}{6} - 1 \right) \cdot \arccos \frac{-\operatorname{tg} \varphi \sin \lambda \sin 23^\circ 50'}{\sqrt{(1 - \sin^2 \lambda \sin^2 23^\circ 50')}} \right] \quad (22)$$

¹⁾ Auf den Sonnenuhren der Alten scheinen die Stundenlinien unbeziffert geblieben zu sein. Vergl. darüber *Bilfinger*, a. a. O., S. 35–37.

In diese Gleichung wären für λ und φ die jeweilig als Konstanten gegebenen Werte einzusetzen und dann für τ der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, ... 6.

Wir haben die infolge der Benutzung der antiken Stunden etwas umständliche τ -Leitergleichung (22) aus formalem Interesse aufgestellt, um zu einer Funktionsleiter der ptolemäischen Tafel wirklich einmal die Gleichung mit den von *Ptolemäus* benutzten Veränderlichen in geschlossener Form anzugeben. Für die punktweise Berechnung der Leiter würde man natürlich nicht mit der Gleichung (22) arbeiten, sondern aus φ , λ und τ für jeden Punkt der Leiter nach den Gleichungen (19), (20) und (21) die Werte von δ und z berechnen und diese in (18) einsetzen.

Die Leitergleichung (22) gilt nur für die über dem Horizont liegenden Leiterpunkte. Die anderen Stundenpunkte werden bekanntlich zu Lichttagpunkten, wenn man das Analemma um 180° dreht, wobei in der Rechnung δ durch $-\delta$ zu ersetzen oder λ um 180° zu vermehren ist. Dadurch tritt in (22) anstelle des arccos sein Supplementbogen.

Für $\lambda = 0^\circ$ und $\lambda = 180^\circ$ geht die Gleichung (22) in die Gleichung der auf dem Äquatordurchmesser sichtbaren Sinusleiter

$$f(\tau) = \cos(15^\circ \cdot \tau - 90^\circ) = \sin(15^\circ \cdot \tau) \quad (22a)$$

über.

Während bei *Ptolemäus* das Gesetz, nach welchem die Variablen zusammenhängen, nur durch das Gefüge und die Ablesungsmethode des Analemmas graphisch zum Ausdruck kommt, drückt die moderne Mathematik dieses Gesetz durch eine oder mehrere Gleichungen aus. Da 7 Variable als Unbekannte auftreten, müssen die Rechnungen des Analemmas durch 7 Gleichungen ausdrückbar sein. Betrachten wir neben φ als unabhängige Veränderliche δ und z , so sind dies die Gleichungen (10) bis (16). Wiederum müßten wir aber, um die gesuchten Bögen als Funktionen derjenigen Größen darzustellen, mit denen *Ptolemäus* in seine Tafel eingeht, mit Hilfe der Gleichungen (19) (20) und (21) anstelle von δ und z in diesen 7 Gleichungen die Variablen λ und τ einführen. So würden wir die eigentlichen, durch die Rechentafel dargestellten Gleichungen zwischen den gegebenen und gesuchten Veränderlichen erhalten. Wir können uns die Ausführung dieser Substitutionen ersparen, da die Aufstellung der in geschlossener Form ziemlich umständlichen Gleichungen höchstens formales Interesse hat.

Streng genommen müßten wir in den Gleichungen und ebenso auch in (22) sogar φ durch die Dauer d_0 des längsten Lichttages ersetzen, also nach (17) für φ die Funktion

$$\varphi = \arctg \frac{-\cos d_0}{\operatorname{tg} 23^\circ 50'}$$

einsetzen.

Es besteht naturgemäß ein großer Unterschied zwischen der Rechentafel des *Ptolemäus* und einem modernen Nomogramm. Er ergibt sich schon aus der Entstehungsweise und der hierdurch bedingten Gebundenheit der ptolemäischen Darstellung. Sie ist hervorgegangen aus einer aus Orthogonalprojektionen und Umklappungen bestehenden darstellend-

geometrischen Wiedergabe eines räumlichen Gebildes. Diese Figur wurde zunächst zur zeichnerischen Ermittlung der gesuchten Stücke benutzt, und dann hat *Ptolemäus* die Ausführung dieser graphischen Konstruktionen dadurch erleichtert, daß er das wirkliche Ziehen eines Teils der Linien durch nomographische Praktiken ersetzte. Heute würde man von der darzustellenden Formel ausgehen, die man nach Methoden der analytischen und synthetischen Geometrie auf viel mannigfaltigere Weise abbilden kann, indem man die Veränderlichen als Bezifferungen irgendwie gestalteter bezifferter Linien- oder Punktescharen auftreten läßt. Man vergleiche etwa die Nomogramme, die *M. d'Ocagne*¹⁾ zu Formeln der sphärischen Trigonometrie entworfen hat. Bei *Ptolemäus* kann von allgemeinen, theoretischen Methoden der Nomographie selbstverständlich nicht die Rede sein, sondern nur von nomographischen Praktiken, die anscheinend erstmalig und vereinzelt dastehen, wenn man an die Nomographie im engeren Sinne denkt, an die eigentlichen Rechentafeln unter Ausschluß der Sonnenuhren. Deshalb muß auch das Analemma des *Ptolemäus*, wenn man es aus dem Gesichtspunkt der modernen Nomogrammformen betrachtet, unvollkommen erscheinen. Von den in jeder der 7 dargestellten Formeln ursprünglich vorhandenen 4 Veränderlichen erfordert eine, die Polhöhe φ , noch ein besonderes Zeichnen von Linien und Leitern, sodaß das eigentliche Nomogramm nachher nur noch ein solches für 7 Gleichungen mit jedesmal 3 Veränderlichen ist. Man könnte ferner aussetzen, daß die Veränderlichen δ und τ nur wenige Werte annehmen können, aber der Gebraucher wünschte und brauchte für die Sonnenuhren nur diese Werte. Ein weiterer Nachteil ist es, daß jede dieser Veränderlichen δ und τ durch zwei Systeme dargestellt ist. Wollte man — was aber dem *Ptolemäus* fern lag — das Nomogramm für stetige Folgen von Werten von δ und τ einrichten, so ergäben sich zwei Netze (δ , τ), deren eines noch dazu von sehr unglücklicher Form und Lage wäre. Wir hätten also ein »überzähliges System«, das man doch möglichst zu vermeiden sucht. Hinzu kommt, daß *Ptolemäus* zwei Ablesegeräte und mehrere Einstellungen für jede Ablesung benötigt. Aber solche modernen Maßstäbe darf man billigerweise nicht an jene primitiveren Methoden legen.

Was führt natürlicher zu bezifferten Punkt- und Linien-scharen als die Astronomie, in der der bewegte Himmel selbst nicht nur die Variablen, sondern auch die Struktur des Nomogramms darbietet? Das Analemma barg, hauptsächlich wohl durch sein geometrisches Gefüge überhaupt, sicher aber auch durch die besondere Ausgestaltung, die *Ptolemäus* ihm gab, den Stoff zu weiteren nomographischen Schöpfungen in sich. Es wäre eine den Rahmen dieser Arbeit überschreitende, reizvolle aber umfangreiche Aufgabe, zu untersuchen, wie sich die Konstruktion des Analemmas von der alten bis in die neue Zeit ausgewirkt hat, nicht nur in trigonometrischen, sondern auch in graphischen und nomographischen Methoden. Wie das von *Ptolemäus* behandelte Planisphärium — auch eine Projektion der Himmelskugel auf die Ebene, und zwar eine Zentralprojektion — die mathematische Begründung zum verbreitetsten Nomogramm des Mittelalters, dem ebenen Astro-

¹⁾ Bull. astron. XI, 1894, S. 5. Siehe auch *M. d'Ocagne*, Traité de Nomographie, 2. Aufl., Paris 1921, S. 332–352.

labium¹⁾, darbietet, so war das Analemma im Altertum und später, bis in die Neuzeit hinein, die Grundlage zur Konstruktion von Sonnenuhren. Diese sind Gebilde von durchaus nomographischem Charakter und unterscheiden sich von den Nomogrammen im engeren Sinne nur dadurch, daß sie in einer vorgeschriebenen Stellung dem vom Horizont und der beweglichen Sonne gebildeten System eingefügt werden und mit diesem System zusammen gewissermaßen ein riesengroßes räumliches Nomogramm bilden, in dem der Licht- oder Schattenstrahl die Rolle des »Weisers« oder Ablesegeräts übernimmt. Die 49 numerischen Tabellen des *Ptolemäus* werden bei der Konstruktion der Sonnenuhren wohl kaum eine große Rolle gespielt haben. Jedenfalls sehen wir, wie z.B. *Commandinus*, der seiner verdienstvollen Ausgabe des Analemmas ein Buch über das Entwerfen von Sonnenuhren angliederte, die gesuchten Bögen nicht numerisch sondern graphisch aus dem Analemma entnimmt, um sie unmittelbar zur Konstruktion von Sonnenuhren weiter zu verwenden.

Als ich vor einigen Jahren zum ersten Male auf die Verwandtschaft der modernen Nomographie mit der alten Gnomonik hinwies²⁾, untersuchte ich aus dem Gesichtspunkt der neueren nomographischen Methoden das »Quadratum horarium generale«³⁾, eine tragbare Sonnenuhr für alle Breiten, die uns zuerst in den Kalendern des Regiomontanus, dann

Marburg, 1926 November.

bei einer Reihe von Gnomonikern des 16. und 17. Jahrhunderts begegnet. Dieses nur aus geraden Leitern und bezifferten Geradenscharen sehr geschickt zusammengesetzte nomographische Instrument für die zwischen φ , δ , t und Sonnenhöhe h bestehende Gleichung, d. h. im wesentlichen für unsere Gleichung (10), verblüfft als Leistung um so mehr, als alle älteren Mathematiker, *Clavius* nicht ausgenommen, den Nachweis der Richtigkeit schuldig bleiben. Wie konnte jener schöne Entwurf wohl erfunden werden? Ich sehe im Analemma den Schlüssel zur Lösung der Frage und hoffe dies bei späterer Gelegenheit begründen zu können.

Eine andere Konstruktion, die sich in natürlicher Weise an das Analemma anknüpfen läßt, ist die »analemmatische Sonnenuhr«⁴⁾, in der die Beziehung zwischen φ , δ , t und dem Azimut α , also im wesentlichen unsere Gleichung (11), graphisch zum Ausdruck kommt. Diese Uhr ist allerdings, soweit mir bekannt, immer nur für konstantes φ entworfen worden, wenn man von einem nicht sehr glücklichen Verallgemeinerungsversuche von *De Lalande*⁵⁾ absieht. Als ich sie auf beliebige Breiten verallgemeinerte⁶⁾, war mir nicht bekannt, daß schon *P. Weir*⁷⁾ nach elementarer projizierender Methode dieselbe Darstellung als ein Azimutnomogramm für variable Breiten entworfen hatte, das noch heute bei der Marine eine Rolle spielt.

P. Luckey.

¹⁾ Auch das ebene Astrolabium hatten die Griechen schon. Vergl. *P. Tannery*, Notes critiques sur le Traité de l'Astrolabe de *Philopon*. Mémoires scientifiques, IV, p. 241–260. Toulouse und Paris 1920.

²⁾ *P. Luckey*. Zur älteren Geschichte der Nomographie. Unterrichtsblätter f. Mathematik und Naturwiss. 29, S. 54–59, 1923, Nr. 5 u. 6. *M. d'Ocagne* hat meine Ergebnisse hinsichtlich des Quadratum horarium generale dargestellt in der Arbeit: Le calcul nomographique avant la nomographie. Annales de la Soc. scient. de Bruxelles, volume jubilaire, 1926, S. 55–66.

³⁾ Vergl. die seitdem erschienene Behandlung durch *J. Drecker*, a. a. O., S. 93–96. ⁴⁾ *J. Drecker*, a. a. O., S. 98.

⁵⁾ *J. J. De Lalande*, Mém. de l'Acad. des Sciences 1757, S. 483–489.

⁶⁾ *P. Luckey*. Ein Sonnenkompaß. Zeitschr. f. mathem. u. nat. Unterr. 52 (1921), S. 168–175.

⁷⁾ *P. Weir*. Theoretical Description of a New »Azimuth Diagram«. Proc. Roy. Soc. Edinb. 16 (1888–89) S. 354ff. Vergl. dazu *H. Bell*, Note on Captain *Weir's* Azimuth Diagram and its anticipation of a Spherical Triangle Nomogram. Proc. Roy. Soc. Edinb., 36 (1915 bis 1916) S. 192ff.

Mitteilungen über Kometen.

Grigg-Skjellerupscher periodischer Komet (1927e).

Durch eine sorgfältige rechnerische Verfolgung der Bewegung des Kometen 1922 I (*Skjellerup*) durch *G. Merton* war die Identität dieses Kometen mit dem Kometen 1902 II (*Grigg*) nahezu zur Gewißheit geworden. Der Komet war in der Zeit des Aphels 1904 Nov. 23 dem Jupiter sehr nahe gewesen und hatte erhebliche Störungen erlitten. Die größte Annäherung an Jupiter bis auf 0.163 a. E. fand 1905 Jan. 24 statt. Die sechs rohen Beobachtungen, die aus 1902 vorliegen, wurden unter der Annahme der Identität der beiden Kometen mit einem m. F. von ± 1.2 in Deklination dargestellt, während in den mit großer Unsicherheit behafteten beobachteten Rektaszensionen ein m. F. von ± 9.3 übrig blieb. *Merton* hatte als Zeit der diesjährigen Wiederkehr zur Sonnennähe Mai 10.34 Weltzeit gefunden. Der Komet ist von *Merton* auf einer von *F. J. Hargreaves* in Kingswood am 27. Mai aufgenommenen Platte 5' vom vorausberechneten Orte aufgefunden. Die infolge des diffusen Aussehens des Kometenbildes anfangs nicht als zweifelsfrei betrachtete Beobachtung wurde durch eine in Bergedorf von *Schorr* und *Baade* am 31. März erhaltene Aufnahme bestätigt. Die berechnete Perihelzeit erforderte nur die geringe Korrektur von -0.095 .

K.

Provisional Elements of Comet *Grigg-Skjellerup* 1927e.

$T = 1927 \text{ May } 10.245 \text{ U.T. (Oscul. } 1926 \text{ Dec. } 11.0 \text{ U.T.)}$

$\omega = 355^\circ 2' 22.5''$ $e = 0.694211$

$\Omega = 215 32 1.8$ 1927.0 $\log a = 0.465239$

$i = 17 29 18.1$ $\log q = 9.950661$

$g = 43 57 51.7$ $\text{Period} = 4.98722 \text{ years}$

$n = 711.456$

Constants for equator 1927.0:

$x = -2.506443 (\cos E - e) + 1.012446 \sin E$

$y = -1.340654 (\cos E - e) - 1.837633 \sin E$

$z = -0.664186 (\cos E - e) - 0.111427 \sin E.$

These will require slight modification when accurate observations are available.

G. Merton.

Observations of comets.

1927 U.T. RA. 1927.0 Dec. 1927.0 $\log pA$ Mag.

Comet 1926f (*Comas Solá*).

March 23.8729 $4^h 36^m 26.67 + 30^\circ 27' 43.5$ 9.588 0.674 $12\frac{1}{2}$
Diam. of condensation $15''$, short tail.

Hargreaves (Kingswood) and *Merton*¹⁾.

Comet 1927c (*Pons-Winnecke*).

Febr. 25.06804 14 4 25.54 + 23 49 13.6 9.335n 0.644 15
Diam. $15''$. (Greenwich, 30-inch Reflector) *Merton*.

¹⁾ Plates by *Hargreaves*, Reductions etc. by *Merton*.