

Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.

VON A. EINSTEIN.

Es ist wohlbekannt, daß die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta \phi = 4\pi K\rho \quad (1)$$

in Verbindung mit der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes die NEWTONSche Fernwirkungstheorie noch nicht vollständig ersetzt. Es muß noch die Bedingung hinzutreten, daß im räumlich Unendlichen das Potential ϕ einem festen Grenzwerte zustrebt. Analog verhält es sich bei der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativität; auch hier müssen zu den Differentialgleichungen Grenzbedingungen hinzutreten für das räumlich Unendliche, falls man die Welt wirklich als räumlich unendlich ausgedehnt anzusehen hat.

Bei der Behandlung des Planetenproblems habe ich diese Grenzbedingungen in Gestalt folgender Annahme gewählt: Es ist möglich, ein Bezugssystem so zu wählen, daß sämtliche Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ im räumlich Unendlichen konstant werden. Es ist aber a priori durchaus nicht evident, daß man dieselben Grenzbedingungen ansetzen darf, wenn man größere Partien der Körperwelt ins Auge fassen will. Im folgenden sollen die Überlegungen angegeben werden, welche ich bisher über diese prinzipiell wichtige Frage angestellt habe.

§ 1. Die NEWTONSche Theorie.

Es ist wohlbekannt, daß die NEWTONSche Grenzbedingung des konstanten Limes für ϕ im räumlich Unendlichen zu der Auffassung hinführt, daß die Dichte der Materie im Unendlichen zu null wird. Wir denken uns nämlich, es lasse sich ein Ort im Weltraum finden, um den herum das Gravitationsfeld der Materie, im großen betrachtet, Kugelsymmetrie besitzt (Mittelpunkt). Dann folgt aus der Poissonschen Gleichung, daß die mittlere Dichte ρ rascher als $\frac{1}{r^2}$ mit wachsender Entfernung r vom Mittelpunkt zu null herabsinken muß, damit ϕ im

Unendlichen einem Limes zustrebe¹. In diesem Sinne ist also die Welt nach NEWTON endlich, wenn sie auch unendlich große Gesamtmasse besitzen kann.

Hieraus folgt zunächst, daß die von den Himmelskörpern emittierte Strahlung das NEWTONSche Weltsystem auf dem Wege radial nach außen zum Teil verlassen wird, um sich dann wirkungslos im Unendlichen zu verlieren. Kann es nicht ganzen Himmelskörpern ebenso ergehen? Es ist kaum möglich, diese Frage zu verneinen. Denn aus der Voraussetzung eines endlichen Limes für ϕ im räumlich Unendlichen folgt, daß ein mit endlicher kinetischer Energie begabter Himmelskörper das räumlich Unendliche unter Überwindung der NEWTONSchen Anziehungskräfte erreichen kann. Dieser Fall muß nach der statistischen Mechanik solange immer wieder eintreten, als die gesamte Energie des Sternsystems genügend groß ist, um — auf einen einzigen Himmelskörper übertragen — diesem die Reise ins Unendliche zu gestatten, von welcher er nie wieder zurückkehren kann.

Man könnte dieser eigentümlichen Schwierigkeit durch die Annahme zu entrinnen versuchen, daß jenes Grenzpotential im Unendlichen einen sehr hohen Wert habe. Dies wäre ein gangbarer Weg, wenn nicht der Verlauf des Gravitationspotentials durch die Himmelskörper selbst bedingt sein müßte. In Wahrheit werden wir mit Notwendigkeit zu der Auffassung gedrängt, daß das Auftreten bedeutender Potentialdifferenzen des Gravitationsfeldes mit den Tatsachen im Widerspruch ist. Dieselben müssen vielmehr von so geringer Größenordnung sein, daß die durch sie erzeugbaren Sternengeschwindigkeiten die tatsächlich beobachteten nicht übersteigen.

Wendet man das BOLTZMANNsche Verteilungsgesetz für Gasmoleküle auf die Sterne an, indem man das Sternsystem mit einem Gase von stationärer Wärmebewegung vergleicht, so folgt, daß das NEWTONSche Sternsystem überhaupt nicht existieren könne. Denn der endlichen Potentialdifferenz zwischen dem Mittelpunkt und dem räumlich Unendlichen entspricht ein endliches Verhältnis der Dichten. Ein Verschwinden der Dichte im Unendlichen zieht also ein Verschwinden der Dichte im Mittelpunkt nach sich.

Diese Schwierigkeiten lassen sich auf dem Boden der NEWTONSchen Theorie wohl kaum überwinden. Man kann sich die Frage vorlegen, ob sich dieselben durch eine Modifikation der NEWTONSchen Theorie beseitigen lassen. Wir geben hierfür zunächst einen Weg an.

¹ ρ ist die mittlere Dichte der Materie, gebildet für einen Raum, der groß ist gegenüber der Distanz benachbarter Fixsterne, aber klein gegenüber den Abmessungen des ganzen Sternsystems.

der an sich nicht beansprucht, ernst genommen zu werden: er dient nur dazu, das Folgende besser hervortreten zu lassen. An die Stelle der Poisson'schen Gleichung setzen wir

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi K \rho. \quad (2)$$

wobei λ eine universelle Konstante bedeutet. Ist ρ_0 die (gleichmäßige) Dichte einer Massenverteilung, so ist

$$\phi = - \frac{4\pi K}{\lambda} \rho_0 \quad (3)$$

eine Lösung der Gleichung (2). Diese Lösung entspräche dem Falle, daß die Materie der Fixsterne gleichmäßig über den Raum verteilt wäre, wobei die Dichte ρ_0 gleich der tatsächlichen mittleren Dichte der Materie des Weltraumes sein möge. Die Lösung entspricht einer unendlichen Ausdehnung des im Mittel gleichmäßig mit Materie erfüllten Raumes. Denkt man sich, ohne an der mittleren Verteilungsdichte etwas zu ändern, die Materie örtlich ungleichmäßig verteilt, so wird sich über den konstanten ϕ -Wert der Gleichung (3) ein zusätzliches ϕ überlagern, welches in der Nähe dichter Massen einem NEWTON'schen Felde um so ähnlicher ist, je kleiner λ_ϕ gegenüber $4\pi K \rho$ ist.

Eine so beschaffene Welt hätte bezüglich des Gravitationsfeldes keinen Mittelpunkt. Ein Abnehmen der Dichte im räumlich Unendlichen müßte nicht angenommen werden, sondern es wäre sowohl das mittlere Potential als auch die mittlere Dichte bis ins Unendliche konstant. Der bei der NEWTON'schen Theorie konstatierte Konflikt mit der statistischen Mechanik ist hier nicht vorhanden. Die Materie ist bei einer bestimmten (äußerst kleinen) Dichte im Gleichgewicht, ohne daß für dies Gleichgewicht innere Kräfte der Materie (Druck) nötig wären.

§ 2. Die Grenzbedingungen gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie.

Im folgenden führe ich den Leser auf dem von mir selbst zurückgelegten, etwas indirekten und holperigen Wege, weil ich nur so hoffen kann, daß er dem Endergebnis Interesse entgegenbringe. Ich komme nämlich zu der Meinung, daß die von mir bisher vertretenen Feldgleichungen der Gravitation noch einer kleinen Modifikation bedürfen, um auf der Basis der allgemeinen Relativitätstheorie jene prinzipiellen Schwierigkeiten zu vermeiden, die wir im vorigen Paragraphen für die NEWTON'sche Theorie dargelegt haben. Diese Modifikation entspricht vollkommen dem Übergang von der Poisson'schen Gleichung (1) zur Gleichung (2) des vorigen Paragraphen. Es ergibt sich dann

schließlich, daß Grenzbedingungen im räumlich Unendlichen überhaupt entfallen, da das Weltkontinuum bezüglich seiner räumlichen Erstreckungen als ein in sich geschlossenes von endlichem, räumlichem (dreidimensionalem) Volumen aufzufassen ist.

Meine bis vor kurzem gehegte Meinung über die im räumlich Unendlichen zu setzenden Grenzbedingungen fußte auf folgenden Überlegungen. In einer konsequenten Relativitätstheorie kann es keine Trägheit gegenüber dem »Raume« geben, sondern nur eine Trägheit der Massen gegeneinander. Wenn ich daher eine Masse von allen anderen Massen der Welt räumlich genügend entferne, so muß ihre Trägheit zu Null herabsinken. Wir suchen diese Bedingung mathematisch zu formulieren.

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist der (negative) Impuls durch die drei ersten Komponenten, die Energie durch die letzte Komponente des mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten kovarianten Tensors

$$m\sqrt{-g}g_{u\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} \quad (4)$$

gegeben, wobei wie stets

$$ds^2 = g_{uv}dx_u dx_v \quad (5)$$

gesetzt ist. In dem besonders übersichtlichen Falle, daß das Koordinatensystem so gewählt werden kann, daß das Gravitationsfeld in jedem Punkte räumlich isotrop ist, hat man einfacher

$$ds^2 = -A(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + Bdx_4^2.$$

Ist gleichzeitig noch

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B},$$

so erhält man für kleine Geschwindigkeiten in erster Näherung aus (4) für die Impulskomponenten

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4} \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4} \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

und für die Energie (im Fall der Ruhe)

$$m\sqrt{B}.$$

Aus den Ausdrücken des Impulses folgt, daß $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ die Rolle der trägen Masse spielt. Da m eine dem Massenpunkt unabhängig von seiner Lage eigentümliche Konstante ist, so kann dieser Ausdruck unter Wahrung der Determinantenbedingung im räumlich Unendlichen nur dann verschwinden, wenn A zu null herabsinkt, während B ins

Unendliche anwächst. Ein solches Ausarten der Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ scheint also durch das Postulat von der Relativität aller Trägheit gefordert zu werden. Diese Forderung bringt es auch mit sich, daß die potentielle Energie $m\sqrt{B}$ des Punktes im Unendlichen unendlich groß wird. Es kann also ein Massenpunkt niemals das System verlassen; eine eingehendere Untersuchung zeigt, daß gleiches auch von den Lichtstrahlen gelten würde. Ein Weltsystem mit solchem Verhalten der Gravitationspotentiale im Unendlichen wäre also nicht der Gefahr der Verödung ausgesetzt, wie sie vorhin für die NEWTONsche Theorie besprochen wurde.

Ich bemerke, daß die vereinfachenden Annahmen über die Gravitationspotentiale, welche wir dieser Betrachtung zugrunde legten, nur der Übersichtlichkeit wegen eingeführt sind. Man kann allgemeine Formulierungen für das Verhalten der $g_{\mu\nu}$ im Unendlichen finden, die das Wesentliche der Sache ohne weitere beschränkende Annahmen ausdrücken.

Nun untersuchte ich mit der freundlichen Hilfe des Mathematikers J. GROMMER zentrisch symmetrische, statische Gravitationsfelder, welche im Unendlichen in der angedeuteten Weise degenerierten. Die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ wurden angesetzt und aus denselben auf Grund der Feldgleichungen der Gravitation der Energietensor $T_{\mu\nu}$ der Materie berechnet. Dabei zeigte sich aber, daß für das Fixsternsystem derartige Grenzbedingungen durchaus nicht in Betracht kommen können, wie neulich auch mit Recht von dem Astronomen DE SITTER hervorgehoben wurde.

Der kontravariante Energietensor $T^{\mu\nu}$ der ponderablen Materie ist nämlich gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \quad (5)$$

wobei ρ die natürlich gemessene Dichte der Materie bedeutet. Bei geeignetem gewähltem Koordinatensystem sind die Sternengeschwindigkeiten sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Man kann daher ds durch $\sqrt{g_{34}} dx_4$ ersetzen. Daran erkennt man, daß alle Komponenten von $T^{\mu\nu}$ gegenüber der letzten Komponente T^{44} sehr klein sein müssen. Diese Bedingung aber ließ sich mit den gewählten Grenzbedingungen durchaus nicht vereinigen. Nachträglich erscheint dies Resultat nicht verwunderlich. Die Tatsache der geringen Sternengeschwindigkeiten läßt den Schluß zu, daß nirgends, wo es Fixsterne gibt, das Gravitationspotential (in unserem Falle \sqrt{B}) erheblich größer sein kann als bei uns; es folgt dies aus statistischen Überlegungen, genau wie im Falle der NEWTONschen Theorie. Jedenfalls haben mich

unsere Rechnungen zu der Überzeugung geführt, daß derartige Degenerationsbedingungen für die g_{uv} im Räumlich-Unendlichen nicht postuliert werden dürfen.

Nach dem Fehlschlagen dieses Versuches bieten sich zunächst zwei Möglichkeiten dar.

a) Man fordert, wie beim Planetenproblem, daß im räumlich Unendlichen die g_{uv} sich bei passend gewähltem Bezugssystem den Werten

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

nähern.

b) Man stellt überhaupt keine allgemeine Gültigkeit beanspruchenden Grenzbedingungen auf für das räumlich Unendliche; man hat die g_{uv} an der räumlichen Begrenzung des betrachteten Gebietes in jedem einzelnen Falle besonders zu geben, wie man bisher die zeitlichen Anfangsbedingungen besonders zu geben gewohnt war.

Die Möglichkeit b entspricht keiner Lösung des Problems, sondern dem Verzicht auf die Lösung desselben. Dies ist ein unanfechtbarer Standpunkt, der gegenwärtig von DE SITTER eingenommen wird¹. Ich muß aber gestehen, daß es mir schwer fällt, so weit zu resignieren in dieser prinzipiellen Angelegenheit. Dazu würde ich mich erst entschließen, wenn alle Mühe, zur befriedigenden Auffassung vorzudringen, sich als nutzlos erweisen würde.

Die Möglichkeit a ist in mehrfacher Beziehung unbefriedigend. Erstens setzen diese Grenzbedingungen eine bestimmte Wahl des Bezugssystems voraus, was dem Geiste des Relativitätsprinzips widerstrebt. Zweitens verzichtet man bei dieser Auffassung darauf, der Forderung von der Relativität der Trägheit gerecht zu werden. Die Trägheit eines Massenpunktes von der natürlich gemessenen Masse m ist nämlich von den g_{uv} abhängig; diese aber unterscheiden sich nur wenig von den angegebenen postulierten Werten für das räumlich Unendliche. Somit würde die Trägheit durch die (im Endlichen vorhandene) Materie zwar beeinflußt aber nicht bedingt. Wenn nur ein einziger Massenpunkt vorhanden wäre, so besäße er nach dieser Auffassungsweise Trägheit, und zwar eine beinahe gleich große wie in dem Falle, daß er von den übrigen Massen unserer tatsächlichen Welt umgeben ist. Endlich sind gegen diese Auffassung jene statisti-

¹ DE SITTER. Akad. van Wetensch. Te Amsterdam. 8. November 1916.

schen Bedenken geltend zu machen, welche oben für die Newtonsche Theorie angegeben worden sind.

Es geht aus dem bisher Gesagten hervor, daß mir das Aufstellen von Grenzbedingungen für das räumlich Unendliche nicht gelungen ist. Trotzdem existiert noch eine Möglichkeit, ohne den unter b angegebenen Verzicht auszukommen. Wenn es nämlich möglich wäre, die Welt als ein nach seinen räumlichen Erstreckungen geschlossenes Kontinuum anzusehen, dann hätte man überhaupt keine derartigen Grenzbedingungen nötig. Im folgenden wird sich zeigen, daß sowohl die allgemeine Relativitätsforderung als auch die Tatsache der geringen Sternengeschwindigkeiten mit der Hypothese von der räumlichen Geschlossenheit des Weltganzen vereinbar ist; allerdings bedarf es für die Durchführung dieses Gedankens einer verallgemeinernden Modifikation der Feldgleichungen der Gravitation.

§ 3. Die räumlich geschlossene Welt mit gleichmäßig verteilter Materie.

Der metrische Charakter (Krümmung) des vierdimensionalen raumzeitlichen Kontinuums wird nach der allgemeinen Relativitätstheorie in jedem Punkte durch die daselbst befindliche Materie und deren Zustand bestimmt. Die metrische Struktur dieses Kontinuums muß daher wegen der Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Materie notwendig eine äußerst verwickelte sein. Wenn es uns aber nur auf die Struktur im großen ankommt, dürfen wir uns die Materie als über ungeheure Räume gleichmäßig ausgebreitet vorstellen, so daß deren Verteilungsdichte eine ungeheuer langsam veränderliche Funktion wird. Wir gehen damit ähnlich vor wie etwa die Geodäten, welche die im kleinen äußerst kompliziert gestaltete Erdoberfläche durch ein Ellipsoid approximieren.

Das Wichtigste, was wir über die Verteilung der Materie aus der Erfahrung wissen, ist dies, daß die Relativgeschwindigkeiten der Sterne sehr klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Ich glaube deshalb, daß wir fürs erste folgende approximierende Annahme unserer Betrachtung zugrunde legen dürfen: Es gibt ein Koordinatensystem, relativ zu welchem die Materie als dauernd ruhend angesehen werden darf. Relativ zu diesem ist also der kontravariante Energietensor T^{uv} der Materie gemäß (5) von der einfachen Form:

$$\left. \begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \rho \end{array} \right\} \quad (6)$$

Der Skalar ρ der (mittleren) Verteilungsdichte kann a priori eine Funktion der räumlichen Koordinaten sein. Wenn wir aber die Welt als räumlich in sich geschlossen annehmen, so liegt die Hypothese nahe, daß ρ unabhängig vom Orte sei; diese legen wir dem Folgenden zugrunde.

Was das Gravitationsfeld anlangt, so folgt aus der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0,$$

daß ein materieller Punkt in einem statischen Gravitationsfelde nur dann in Ruhe verharren kann, wenn g_{44} vom Orte unabhängig ist. Da wir ferner Unabhängigkeit von der Zeitkoordinate x_4 für alle Größen voraussetzen, so können wir für die gesuchte Lösung verlangen, daß für alle x_ν

$$g_{44} = 1 \quad (7)$$

sei. Wie stets bei statischen Problemen wird ferner

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0 \quad (8)$$

zu setzen sein. Es handelt sich nun noch um die Festlegung derjenigen Komponenten des Gravitationspotentials, welche das rein räumlich-geometrische Verhalten unseres Kontinuums bestimmen ($g_{11}, g_{12}, \dots, g_{33}$). Aus unserer Annahme über die Gleichmäßigkeit der Verteilung der das Feld erzeugenden Massen folgt, daß auch die Krümmung des gesuchten Maßraumes eine konstante sein muß. Für diese Massenverteilung wird also das gesuchte geschlossene Kontinuum der x_1, x_2, x_3 bei konstantem x_4 ein sphärischer Raum sein.

Zu einem solchen gelangen wir z. B. in folgender Weise. Wir gehen aus von einem Euklidischen Raume der $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ von vier Dimensionen mit dem Linienelement $d\sigma$: es sei also

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \quad (9)$$

In diesem Raume betrachten wir die Hyperfläche

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2, \quad (10)$$

wobei R eine Konstante bedeutet. Diese Punkte dieser Hyperfläche bilden ein dreidimensionales Kontinuum, einen sphärischen Raum vom Krümmungsradius R .

Der vierdimensionale Euklidische Raum, von dem wir ausgingen, dient nur zur bequemen Definition unserer Hyperfläche. Uns interessieren nur die Punkte der letzteren, deren metrische Eigenschaften mit denen des physikalischen Raumes bei gleichmäßiger Verteilung der Materie übereinstimmen sollen. Für die Beschreibung dieses dreidi-

mensionalen Kontinuums können wir uns der Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 bedienen (Projektion auf die Hyperebene $\xi_4 = 0$), da sich vermöge (10) ξ_4 durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 ausdrücken läßt. Eliminiert man ξ_4 aus (9), so erhält man für das Linienelement des sphärischen Raumes den Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wobei $\delta_{\mu\nu} = 1$, wenn $\mu = \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$, und $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ gesetzt wird. Die gewählten Koordinaten sind bequem, wenn es sich um die Untersuchung der Umgebung eines der beiden Punkte $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ handelt.

Nun ist uns auch das Linsenelement der gesuchten raum-zeitlichen vierdimensionalen Welt gegeben. Wir haben offenbar für die Potentiale $g_{\mu\nu}$, deren beide Indizes von 4 abweichen, zu setzen

$$g_{\mu\nu} = - \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right), \quad (12)$$

welche Gleichung in Verbindung mit (7) und (8) das Verhalten von Maßstäben, Uhren und Lichtstrahlen in der betrachteten vierdimensionalen Welt vollständig bestimmt.

§ 4. Über ein an den Feldgleichungen der Gravitation anzubringendes Zusatzglied.

Die von mir vorgeschlagenen Feldgleichungen der Gravitation lauten für ein beliebig gewähltes Koordinatensystem

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \\ G_{\mu\nu} &= - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Das Gleichungssystem (13) ist keineswegs erfüllt, wenn man für die $g_{\mu\nu}$ die in (7), (8) und (12) gegebenen Werte und für den (kontravarianten) Tensor der Energie der Materie die in (6) angegebenen Werte einsetzt. Wie diese Rechnung bequem auszuführen ist, wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden. Wenn es also sicher wäre, daß die von mir bisher benutzten Feldgleichungen (13) die einzigen mit dem Postulat der allgemeinen Relativität vereinbaren wären, so

müßten wir wohl schließen, daß die Relativitätstheorie die Hypothese von einer räumlichen Geschlossenheit der Welt nicht zulasse.

Das Gleichungssystem (14) erlaubt jedoch eine naheliegende, mit dem Relativitätspostulat vereinbare Erweiterung, welche der durch Gleichung (2) gegebenen Erweiterung der Poissonschen Gleichung vollkommen analog ist. Wir können nämlich auf der linken Seite der Feldgleichung (13) den mit einer vorläufig unbekanntem universellen Konstante $-\lambda$ multiplizierten Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hinzufügen, ohne daß dadurch die allgemeine Kovarianz zerstört wird; wir setzen an die Stelle der Feldgleichung (13)

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (13a)$$

Auch diese Feldgleichung ist bei genügend kleinem λ mit den am Sonnensystem erlangten Erfahrungstatsachen jedenfalls vereinbar. Sie befriedigt auch Erhaltungssätze des Impulses und der Energie, denn man gelangt zu (13a) an Stelle von (13), wenn man statt des Skalars des RIEMANSCHEN Tensors diesen Skalar, vermehrt um eine universelle Konstante, in das HAMILTONSCHE Prinzip einführt, welches Prinzip ja die Giltigkeit von Erhaltungssätzen gewährleistet. Daß die Feldgleichung (13a) mit unseren Ansätzen über Feld und Materie vereinbar ist, wird im folgenden gezeigt.

§ 5. Durchführung der Rechnung. Ergebnis.

Da alle Punkte unseres Kontinuums gleichwertig sind, genügt es, die Rechnung für einen Punkt durchzuführen, z. B. für einen der beiden Punkte mit den Koordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Dann sind für die $g_{\mu\nu}$ in (13a) die Werte

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

überall da einzusetzen, wo sie nur einmal oder gar nicht differenziert erscheinen. Man erhält also zunächst

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\begin{array}{c} \mu\nu \\ 1 \end{array} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\begin{array}{c} \mu\nu \\ 2 \end{array} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\begin{array}{c} \mu\nu \\ 3 \end{array} \right] + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Mit Rücksicht auf (7), (8) und (13) findet man hieraus leicht, daß sämtlichen Gleichungen (13a) Genüge geleistet ist, wenn die beiden Relationen erfüllt sind

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\varkappa \rho}{2}$$

$$-\lambda = -\frac{\varkappa \varepsilon}{2}$$

oder

$$\lambda = \frac{\varkappa \varepsilon}{2} = \frac{1}{R^2} \quad (14)$$

Die neu eingeführte universelle Konstante λ bestimmt also sowohl die mittlere Verteilungsdichte ε , welche im Gleichgewichte verharren kann, als auch den Radius R des sphärischen Raumes und dessen Volumen $2\pi^2 R^3$. Die Gesamtmasse M der Welt ist nach unserer Auffassung endlich, und zwar gleich

$$M = \varepsilon \cdot 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R^3}{\varkappa} = \frac{\sqrt{3} 2\pi^2}{\sqrt{\varkappa^3 \varepsilon}} \quad (15)$$

Die theoretische Auffassung der tatsächlichen Welt wäre also, falls dieselbe unserer Betrachtung entspricht, die folgende. Der Krümmungscharakter des Raumes ist nach Maßgabe der Verteilung der Materie zeitlich und örtlich variabel, läßt sich aber im großen durch einen sphärischen Raum approximieren. Jedenfalls ist diese Auffassung logisch widerspruchsfrei und vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie die naheliegendste: ob sie, vom Standpunkte des heutigen astronomischen Wissens aus betrachtet, haltbar ist, soll hier nicht untersucht werden. Um zu dieser widerspruchsfreien Auffassung zu gelangen, mußten wir allerdings eine neue, durch unser tatsächliches Wissen von der Gravitation nicht gerechtfertigte Erweiterung der Feldgleichungen der Gravitation einführen. Es ist jedoch hervorzuheben, daß eine positive Krümmung des Raumes durch die in demselben befindliche Materie auch dann resultiert, wenn jenes Zusatzglied nicht eingeführt wird: das letztere haben wir nur nötig, um eine quasi-statische Verteilung der Materie zu ermöglichen, wie es der Tatsache der kleinen Sterngeschwindigkeiten entspricht.