
APERÇU DES MÉTHODES
POUR LA
DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES
ET DES PLANÈTES,
PAR M. O. CALLANDREAU.

INTRODUCTION.

Il semble qu'il n'y ait aucun motif pour reprendre l'étude d'un problème qui a provoqué de nombreux travaux de la part des géomètres et des astronomes les plus éminents.

Toutefois, on doit reconnaître que les découvertes des dernières années, en ce qui concerne les petites planètes et les comètes périodiques, invitent les astronomes à reviser les méthodes, en les rendant aussi simples que possible, en écartant les développements purement mathématiques qui, malgré leur intérêt, éloignent l'attention de l'objet même à atteindre. Publier quelques types de calcul, en vue d'une pratique immédiate, serait céder à un formalisme étroit. Il semble préférable de laisser au calculateur la liberté de se mouvoir, après avoir assigné les étapes de la route à parcourir, en caractérisant les éléments essentiels des problèmes à résoudre, en faisant choix des formules les plus aisément assimilables à l'esprit dans l'état actuel de la Science, en rappelant enfin, à propos, les essais des inventeurs, qui trop souvent sont négligés (1).

Tisserand a contribué à une telle revision par sa discussion du calcul des orbites circulaires; j'ai voulu suivre son exemple.

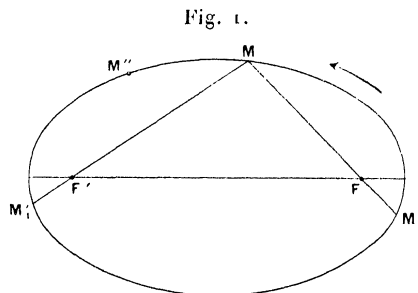
(1) L'histoire de la détermination de l'orbite des comètes et des planètes serait digne d'un Ouvrage comme ceux que Todhunter a composés. Nous nous bornerons à citer le Chapitre I de l'Ouvrage bien connu d'Olbers, les Notices de Lagrange (t. IV des *Œuvres*), la Préface du *Theoria motus* de Gauss; enfin, l'Introduction étendue, écrite par le D^r N. Herz, qui ouvre le *Nouveau dictionnaire astronomique* du D^r Valentiner.

CHAPITRE I.

LES LOIS DE KEPLER DANS LE MOUVEMENT GÉOCENTRIQUE.

Nous réunissons dans ce Chapitre les théorèmes et relations utiles pour la suite : le théorème général de Lambert; les relations exprimant que l'orbite se trouve dans un plan passant par le Soleil; l'expression du rapport du secteur elliptique au triangle, nécessaire pour traduire le principe des aires....

1. Le théorème de Lambert ⁽¹⁾, qui, *par sa simplicité et par sa généralité, doit être regardé comme l'une des plus ingénieuses découvertes qui aient été faites dans la théorie du système du monde* (Lagrange), a pour objet d'exprimer le temps nécessaire à l'astre pour aller d'un point M à un autre point M'' de l'orbite en fonction des deux rayons vecteurs r, r'' , de la corde $MM'' = z$ et du demi grand axe a .



Soient (*fig. 1*) E et E'' les anomalies excentriques des deux points MM'' ; $E'' > E$; $E'' - E < 2\pi$.

On a

$$r = a(1 - e \cos E), \quad r'' = a(1 - e \cos E''),$$

$$r + r'' = 2a \left(1 - e \cos \frac{E'' - E}{2} \cos \frac{E'' + E}{2} \right),$$

et, en posant $\frac{E'' - E}{2} = g$, $\frac{E'' + E}{2} = G$,

$$(1) \quad r + r'' = 2a(1 - e \cos g \cos G).$$

Pour la corde z , la relation

$$z^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2$$

⁽¹⁾ *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, § 210.

devient, en y introduisant les valeurs de x , y ,

$$x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad \dots,$$

et les auxiliaires g , G ,

$$(2) \quad x^2 = 4a^2 \sin^2 g (1 - e^2 \cos^2 G).$$

L'intervalle de temps $t'' - t$ est donné par

$$(3) \quad \begin{aligned} n(t'' - t) &= E'' - E - e(\sin E'' - \sin E), \\ n(t'' - t) &= 2g - 2e \sin g \cos G. \end{aligned}$$

Donc, d'après les relations (1), (2) et (3), $\frac{r+r''}{a}$, $\frac{x}{a}$, $n(t'' - t)$ dépendant seulement de *deux* quantités g et $e \cos G$, on aura la relation cherchée en faisant l'élimination.

On peut toujours poser

$$e \cos G = \cos h, \quad 0 < h < \pi;$$

les relations (1), (2), (3) deviennent

$$\begin{aligned} r + r'' &= 2a(1 - \cos g \cos h), \\ x &= 2a \sin g \sin h, \\ n(t'' - t) &= 2g - 2 \sin g \cos h; \end{aligned}$$

il n'existe pas d'ambiguïté pour la seconde.

On peut écrire

$$\begin{aligned} r + r'' + x &= 2a[1 - \cos(g + h)], \\ r + r'' - x &= 2a[1 - \cos(h - g)], \\ n(t'' - t) &= 2g - [\sin(g + h) - \sin(h - g)]; \end{aligned}$$

alors il s'agit d'éliminer

$$h - g = \delta, \quad h + g = \varepsilon$$

entre

$$\begin{aligned} (4) \quad r + r'' + x &= 2a(1 - \cos \varepsilon), \\ (5) \quad r + r'' - x &= 2a(1 - \cos \delta), \\ (6) \quad n(t'' - t) &= \varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta); \end{aligned}$$

mais il est nécessaire, en tirant ε et δ des deux premières, de préciser les déterminations.

Pour cela, on utilise les relations déduites de

$$\sqrt{r} \sin \frac{\nu}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}, \quad \sqrt{r''} \sin \frac{\nu''}{2} = \dots,$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{\nu}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}, \quad \sqrt{r''} \cos \frac{\nu''}{2} = \dots,$$

d'où

$$(7) \quad \sqrt{rr''} \cos \frac{\nu'' - \nu}{2} = a(\cos g - e \cos G) = a(\cos g - \cos h) = 2a \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(8) \quad \sqrt{rr''} \sin \frac{\nu'' - \nu}{2} = a\sqrt{1-e^2} \sin g = a\sqrt{1-e^2} \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2} \right).$$

$\sin \frac{\varepsilon}{2}$ est toujours > 0 ; l'hypothèse $\cos \frac{\varepsilon}{2} = 0$ entraîne

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = 1, \quad r + r'' + x = 4a, \quad x = 2a - r + 2a - r''.$$

En considérant l'autre foyer F' et la droite MF' , qui coupe en M_1 l'ellipse, la condition trouvée signifie que M'' est en M_1 ; MM_1 est comme une ligne de séparation.

D'après la valeur du produit $\sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2}$ [relation (7)], $\sin \frac{\delta}{2}$ garde le signe + si M'' s'éloigne de M , et change de signe pour la ligne de séparation MF_1 . L'hypothèse $\cos \frac{\delta}{2} = 0$, qui entraînerait [relation (5)] $r + r'' - x = 4a$, est impossible.

Cela posé, quand M'' part de M ,

$$g = 0, \quad \varepsilon = \delta = h, \quad \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta}{2} = \frac{h}{2} < \frac{\pi}{2};$$

$\cos \frac{\delta}{2}$, $\cos \frac{\varepsilon}{2}$ sont > 0 . On est amené à distinguer les trois régions de l'ellipse

$$M - M_1, \quad M_1 - M_1, \quad M_1 - M.$$

$\frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{\delta}{2}$ étant les angles *aigus* définis par

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r + r'' + x}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r + r' - x}{4a}},$$

Pour la région $M - M_1 \dots$ $n(t'' - t) = \varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta)$;

Pour la région $M_1 - M_1 \dots$ $n(t'' - t) = 2\pi - \varepsilon - \delta + \sin \varepsilon + \sin \delta$;

Pour la région $M_1 - M \dots$ $n(t'' - t) = 2\pi - \varepsilon + \sin \varepsilon + (\delta - \sin \delta)$.

En résumé, il y a à calculer les deux combinaisons

$$\varepsilon - \sin \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta - \sin \delta,$$

$\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{\delta}{2}$ étant les angles aigus définis ci-dessus.

2. Avec l'expression sous forme explicite du théorème de Lambert, il y a lieu de considérer la relation approchée suivante qui s'en déduit et qui aura une grande importance dans la suite.

Remarque-t-on que

$$D_x [2 \arcsin(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\sqrt{1-x}] = \frac{2x}{\sqrt{x-x^2}},$$

il vient

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = \int_0^{\frac{r+r''+x}{4a}} \frac{2x dx}{\sqrt{x-x^2}};$$

et, si le point M'' est voisin du point M ,

$$n(t'' - t) = \frac{k(t'' - t)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_{\frac{r+r''-x}{4a}}^{\frac{r+r''+x}{4a}} \frac{x dx}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}} \int_{\frac{r+r''-x}{2}}^{\frac{r+r''+x}{2}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z} - \frac{1}{2a}}},$$

en posant $\frac{z}{2a} = x$ (1).

Soit, suivant l'usage,

$$k(t'' - t) = \theta'.$$

Développe-t-on l'intégrale du second membre suivant les puissances de x , il vient

$$\theta' \sqrt{2} = 2 \left[Z \frac{x}{2} + \frac{d^2 Z}{dz^2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{2 \cdot 3} + \frac{d^4 Z}{dz^4} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right],$$

$$Z = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z} - \frac{1}{2a}}};$$

après les dérivations, z sera remplacé par $\frac{1}{2}(r + r'')$.

(1) L'expression de $t'' - t$ par une intégrale définie se trouve déjà dans l'Ouvrage de Lambert, *Insigniores orbitae cometarum proprietates*, § 201.

Pour former les dérivées, on utilise l'équation différentielle à laquelle Z satisfait.

On a

$$\frac{1}{Z^3} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2a}, \quad \frac{2}{Z^3} \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{z^2}, \quad \frac{z^2}{Z^3} \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2},$$

différentiant de nouveau,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} \frac{z^2}{Z^3} + \frac{1}{2} \frac{Z^3}{z^2} \frac{2zZ - \frac{3}{2} z^2 \frac{Z^3}{z^2}}{Z^4} = 0,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{Z^3}{z^3} + \frac{3}{4} \frac{Z^5}{z^4}.$$

Bornons-nous pour le moment aux termes en κ^3 dans le développement; il vient, Z tenant la place de

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{r+r''}{2} - \frac{1}{2a}}},$$

$$\theta' \sqrt{z} = Z \kappa - \frac{1}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} \frac{Z^3 \kappa^3}{24} + \frac{1}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} \frac{Z^5 \kappa^3}{32},$$

d'où, par approximations successives,

$$\frac{1}{Z} = \frac{\kappa}{\sqrt{2} \theta'},$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\kappa}{\sqrt{2} \theta'} \left[1 - \frac{1}{12} \frac{\theta'^2}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} + \frac{1}{8} \frac{\frac{\theta'^4}{\kappa^2}}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} \right] \dots$$

ensuite

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{\frac{r+r''}{2}} - \frac{1}{Z^2},$$

d'où

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{\frac{r+r''}{2}} - \frac{\kappa^2}{2\theta'^2} + \frac{1}{12} \frac{\kappa^2}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} - \frac{1}{8} \frac{\theta'^2}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} + \dots$$

Les deux premiers termes de droite redonnent les termes connus par le théorème des forces vives. Les deux termes qui suivent sont petits dans les cas

habituels et se détruisent en partie; leur effet au total est :

$$\text{Pour une orbite circulaire...} \quad \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{24} \right) \frac{\theta'^2}{\left(\frac{r' + r''}{2} \right)^3};$$

$$\text{Pour une orbite parabolique.} \quad \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = +\frac{1}{24} \right) \frac{\theta'^2}{\left(\frac{r' + r''}{2} \right)^3};$$

Pour une orbite parabolique $\frac{1}{a} = 0$, il vient une relation entre Δ et Δ'' ; un résultat analogue a lieu si l'on se donne la valeur de α .

3. Nous réunissons ci-après ce qui se rapporte au calcul de la corde x et des rayons r , r'' en partant de la connaissance des distances Δ , Δ'' de l'astre à la Terre.

Soient pour les deux époques t et t''

$$\alpha, \delta, X, Y, Z; \quad \alpha'', \delta'', X'', Y'', Z''$$

les coordonnées tirées de l'observation, l'ascension et la déclinaison, et les coordonnées rectangulaires équatoriales du Soleil; ces éléments sont rapportés à l'équateur et à l'équinoxe moyens du commencement de l'année.

Il vient pour les coordonnées rectangulaires héliocentriques de l'astre

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha - X, & x'' &= \Delta'' \cos \delta'' \cos \alpha'' - X'', \\ y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha - Y, & y'' &= \Delta'' \cos \delta'' \sin \alpha'' - Y'', \\ z &= \Delta \sin \delta - Z, & z'' &= \Delta'' \sin \delta'' - Z''; \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} x'' - x &= \frac{\Delta'' + \Delta}{2} (\cos \delta'' \cos \alpha'' - \cos \delta \cos \alpha) + \frac{\Delta'' - \Delta}{2} (\cos \delta'' \cos \alpha'' + \cos \delta \cos \alpha) - (X'' - X), \\ y'' - y &= \frac{\Delta'' + \Delta}{2} (\cos \delta'' \sin \alpha'' - \cos \delta \sin \alpha) + \frac{\Delta'' - \Delta}{2} (\cos \delta'' \sin \alpha'' + \cos \delta \sin \alpha) - (Y'' - Y), \\ z'' - z &= \frac{\Delta'' + \Delta}{2} (\sin \delta'' - \sin \delta) + \frac{\Delta'' - \Delta}{2} (\sin \delta'' + \sin \delta) - (Z'' - Z). \end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned} \cos \delta'' \cos \alpha'' - \cos \delta \cos \alpha &= f \cos \varphi \cos F, & \cos \delta'' \cos \alpha'' + \cos \delta \cos \alpha &= h \cos \eta \cos H, \\ \cos \delta'' \sin \alpha'' - \cos \delta \sin \alpha &= f \cos \varphi \sin F, & \cos \delta'' \sin \alpha'' + \cos \delta \sin \alpha &= h \cos \eta \sin H, \\ \sin \delta'' - \sin \delta &= f \sin \varphi; & \sin \delta'' + \sin \delta &= h \sin \eta; \end{aligned}$$

la relation

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \eta + \cos(F - H) = 0$$

contrôle les calculs.

Ensuite observant que, ε désignant l'obliquité moyenne de l'écliptique, L et R la longitude et le rayon vecteur du Soleil,

$$X = R \cos L, \quad Y = R \sin L \cos \varepsilon, \quad Z = R \sin L \sin \varepsilon,$$

on détermine les auxiliaires g , γ , G' , G par les formules

$$\frac{R''}{R} \cos(L'' - L) - 1 = \frac{g}{R} \cos(G' - L),$$

$$\frac{R''}{R} \sin(L'' - L) = \frac{g}{R} \sin(G' - L);$$

$$\cos G' = \cos \gamma \cos G,$$

$$\sin G' \cos \varepsilon = \cos \gamma \sin G,$$

$$\sin G' \sin \varepsilon = \sin \gamma;$$

alors

$$X'' - X = g \cos \gamma \cos G,$$

$$Y'' - Y = g \cos \gamma \sin G,$$

$$Z'' - Z = g \sin \gamma;$$

les valeurs de X , Y , Z ; X'' , Y'' , Z'' sont connues, les auxiliaires g , γ , G doivent vérifier les trois relations précédentes.

Cela posé,

$$\begin{aligned} x^2 = & g^2 + f^2 \left(\frac{\Delta'' + \Delta}{2} \right)^2 + h^2 \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{2} \right)^2 \\ & - 2fg [\cos \varphi \cos \gamma \cos(F - G) + \sin \varphi \sin \gamma] \frac{\Delta'' + \Delta}{2} \\ & - 2hg [\cos \eta \cos \gamma \cos(H - G) + \sin \eta \sin \gamma] \frac{\Delta'' - \Delta}{2}; \end{aligned}$$

$$r^2 = \Delta (\Delta - 2R \cos \psi) + R^2, \quad R \cos \psi = X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta,$$

$$r''^2 = \Delta'' (\Delta'' - 2R'' \cos \psi'') + R''^2, \quad R'' \cos \psi'' = X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta''.$$

La vérification des calculs précédents se fera en comparant les résultats pour $\Delta'' = \Delta = 1$, $-\Delta'' = \Delta = 1$, avec ceux que donne le calcul direct.

4. On a mis en première ligne le théorème de Lambert. La condition d'une orbite plane dans un plan passant par le Soleil est considérée maintenant ainsi que la condition des aires décrites proportionnelles aux temps.

La manière sans doute la plus simple d'écrire la condition du plan est de rem-

placer, dans le déterminant $[x \ y \ z]$, x, y, z par leurs expressions

$$x = \Delta \cos \delta \cos \alpha - X, \quad \dots;$$

il vient ainsi une relation entre $\Delta, \Delta', \Delta''$ linéaire par rapport à chaque Δ et sans terme constant (quand on néglige la latitude du Soleil).

A l'exemple de Lagrange, on met à profit la circonstance que les observations sont peu distantes entre elles (1).

La condition de l'orbite plane conduit aux relations

$$\begin{aligned} c' x' &= c x + c'' x'', \\ c' y' &= c y + c'' y'', \\ c' z' &= c z + c'' z'', \end{aligned}$$

où c, c', c'' sont les rapports des triangles n, n', n'' (compris entre les rayons vecteurs r, r', r'') au quadrilatère $n + n''$. Mais en posant (k constante de Gauss)

$$\begin{aligned} \theta &= k(t'' - t'), & \theta' &= k(t'' - t), & \theta'' &= k(t' - t), \\ c &= \frac{\theta}{\theta'} + \gamma, & c'' &= \frac{\theta''}{\theta'} - \gamma, & c' &= 1 - e, \end{aligned}$$

on a, à fort peu près, comme on le verra tout à l'heure,

$$e = \frac{\theta \theta''}{2 r'^3}, \quad \gamma : e = \frac{\theta'' - \theta}{3 \theta'};$$

de sorte qu'une connaissance approchée de r' conduit à des relations assez précises *linéaires par rapport aux* Δ (après qu'on a remplacé les x, y par leurs expressions).

Développons les relations ci-dessus.

$$\begin{aligned} c' \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' &= c \Delta \cos \delta \cos \alpha + c'' \Delta'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + (c' X' - c X - c'' X''), \\ c' \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' &= c \Delta \cos \delta \sin \alpha + c'' \Delta'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + (c' Y' - c Y - c'' Y''), \\ c' \Delta' \sin \delta' &= c \Delta \sin \delta + c'' \Delta'' \sin \delta'' + (c' Z' - c Z - c'' Z''). \end{aligned}$$

Pour la Terre, si l'on néglige la latitude du Soleil, on a pareillement

$$\begin{aligned} C' X' &= C X + C'' X'', \\ C' Y' &= C Y + C'' Y'', \\ C' Z' &= C Z + C'' Z''; \\ C &= \frac{\theta}{\theta'} + \Gamma, & C'' &= \frac{\theta''}{\theta'} - \Gamma, & C' &= 1 - E \end{aligned}$$

(1) RADAU (R.), *Bulletin astronomique*, t. II.

et

$$\mathbf{E} = \frac{\theta\theta''}{2R'^3}, \quad \Gamma : \mathbf{E} = \frac{\theta'' - \theta}{3\theta'}.$$

Cela posé,

$$c'X' - cX - c''X'' = -(C' - c')X' + (C - c)(X - X'') = (\mathbf{E} - e) \left[X' - \frac{C - c}{\mathbf{E} - e} (X'' - X) \right].$$

Il pourra arriver qu'en prenant $\frac{C - c}{\mathbf{E} - e} = \frac{\theta'' - \theta}{3\theta'}$ et posant

$$c'X' - cX - c''X'' = (\mathbf{E} - e) \left[X' - \frac{\theta'' - \theta}{3\theta'} (X'' - X) \right] + \text{terme correctif},$$

le terme correctif soit très petit.

Enfin, si l'intervalle de temps était si court qu'on pût considérer comme permise l'interpolation des coordonnées X par parties proportionnelles, il est clair que la quantité entre crochets serait la valeur de X pour le temps $t' = \frac{(t' - t) - (t'' - t')}{3} = \frac{t + t' + t''}{3}$, c'est-à-dire la moyenne des trois dates; mais cette simplification donnée par Legendre, dans son *Second Supplément aux nouvelles méthodes pour la détermination des orbites*, n'est pas nécessaire.

En résumé, ayant déterminé les auxiliaires \mathfrak{R}' , \mathfrak{A}' , \mathfrak{O}' par les formules

$$X' - \frac{C - c}{\mathbf{E} - e} (X'' - X) = \mathfrak{R}' \cos \mathfrak{A}' \cos \mathfrak{O}',$$

$$Y' - \frac{C - c}{\mathbf{E} - e} (Y'' - Y) = \mathfrak{R}' \sin \mathfrak{A}' \cos \mathfrak{O}',$$

$$Z' - \frac{C - c}{\mathbf{E} - e} (Z'' - Z) = \mathfrak{R}' \sin \mathfrak{O}',$$

où

$$\frac{C - c}{\mathbf{E} - e}$$

déduit des premières valeurs approchées diffère peu de $\frac{\theta'' - \theta}{3\theta'}$, on pourra écrire les équations

$$(1) \quad c' \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' = c \Delta \cos \delta \cos \alpha + c'' \Delta'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + (\mathbf{E} - e) \mathfrak{R}' \cos \mathfrak{O}' \cos \mathfrak{A}',$$

$$(2) \quad c' \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' = c \Delta \cos \delta \sin \alpha + c'' \Delta'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + (\mathbf{E} - e) \mathfrak{R}' \cos \mathfrak{O}' \sin \mathfrak{A}',$$

$$(3) \quad c' \Delta' \sin \delta' = c \Delta \sin \delta + c'' \Delta'' \sin \delta'' + (\mathbf{E} - e) \mathfrak{R}' \sin \mathfrak{O}'.$$

5. Souvent on prend comme point de départ les trois équations précédentes

et, par l'élimination des deux distances extrêmes Δ , Δ'' , on arrive à une équation ne renfermant plus qu'une inconnue, telle que

$$c'\Delta' = K(E - e) = K' \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right).$$

Mais, le déterminant des équations approchant de zéro, il y a lieu d'éviter de considérer cette équation, à cause de l'incertitude qui peut affecter le calcul de K ou de K' , et, suivant ce qui se pratique dans la détermination des orbites de comètes, de n'utiliser que les relations obtenues en éliminant une seule distance Δ' conjointement avec la relation déduite du théorème de Lambert. Il y aura à faire des hypothèses sur α , dans le cas des astéroïdes, et à constater comment les observations sont compatibles avec des orbites de différentes périodes (¹).

Le premier résultat utile s'obtient en ajoutant les deux premières relations respectivement multipliées par $-\sin\alpha'$, $+\cos\alpha'$,

$$0 = c\Delta \cos\delta \sin(\alpha - \alpha') + c''\Delta'' \cos\delta'' \sin(\alpha'' - \alpha') + (E - e)R' \cos\mathcal{D}' \sin(\mathcal{A}' - \alpha'),$$

qu'on écrit

$$\begin{aligned} 0 = & \cos\delta \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\theta''} \left(1 + \gamma \frac{\theta'}{\theta} \right) \Delta \\ & + \cos\delta'' \frac{\sin(\alpha'' - \alpha')}{\theta} \left(1 - \gamma \frac{\theta'}{\theta''} \right) \Delta'' + (E - e) \frac{\theta'}{\theta\theta''} R' \cos\mathcal{D}' \sin(\mathcal{A}' - \alpha'). \end{aligned}$$

Cette relation deviendrait incertaine si le mouvement en ascension droite était faible.

Dans la relation suivante, c'est la variation en déclinaison qui se trouve mise en évidence :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\cos\delta \sin\delta' \cos(\alpha - \alpha') - \sin\delta \cos\delta'}{\theta''} \left(1 + \gamma \frac{\theta'}{\theta} \right) \Delta \\ & + \frac{\cos\delta'' \sin\delta' \cos(\alpha'' - \alpha') - \sin\delta'' \cos\delta'}{\theta} \left(1 - \gamma \frac{\theta'}{\theta''} \right) \Delta'' \\ & + (E - e) \frac{\theta'}{\theta\theta''} R' [\cos\mathcal{D}' \cos(\mathcal{A}' - \alpha') \sin\delta' - \sin\mathcal{D}' \cos\delta']. \end{aligned}$$

Pour arriver à la relation d'Olbers, on élimine, entre les trois équations,

(¹) Legendre (*Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes*, 2^e Supplément, nos 10 et suiv.; 1820) a discuté le degré de certitude des conclusions à tirer des trois équations.

Δ' et $(E - e)$; on forme les combinaisons suivantes des équations (1), (2), (3):

$$(1) \quad \text{tang } \delta' - (3) \cos \alpha' = 0 = c \Delta (\cos \delta \text{ tang } \delta' \cos \alpha - \sin \delta \cos \alpha') + c'' \Delta'' (\cos \delta'' \text{ tang } \delta' \cos \alpha'' - \sin \delta'' \cos \alpha') \\ - (C - c) [(X'' - X) \text{ tang } \delta' - (Z'' - Z) \cos \alpha'] + (E - e) (X' \text{ tang } \delta' - Z' \cos \alpha'),$$

$$(2) \quad \text{tang } \delta' - (3) \sin \alpha' = 0 = c \Delta (\cos \delta \text{ tang } \delta' \sin \alpha - \sin \delta \sin \alpha') + c'' \Delta'' (\cos \delta'' \text{ tang } \delta' \sin \alpha'' - \sin \delta'' \sin \alpha') \\ - (C - c) [(Y'' - Y) \text{ tang } \delta' - (Z'' - Z) \sin \alpha'] + (E - e) (Y' \text{ tang } \delta' - Z' \sin \alpha');$$

on pose

$$\frac{Y' \text{ tang } \delta' - Z' \sin \alpha'}{X' \text{ tang } \delta' - Z' \cos \alpha'} = \text{tang } K.$$

En multipliant les deux relations précédentes par $-\sin K$ et $+\cos K$, il vient

$$0 = c \Delta [\cos \delta \text{ tang } \delta' \sin (\alpha - K) - \sin \delta \sin (\alpha' - K)] \\ + c'' \Delta'' [\cos \delta'' \text{ tang } \delta' \sin (\alpha'' - K) - \sin \delta'' \sin (\alpha' - K)] \\ + (C - c) [(X'' - X) \text{ tang } \delta' \sin K - (Y'' - Y) \text{ tang } \delta' \cos K + (Z'' - Z) \sin (\alpha' - K)].$$

A cause de

$$C - c = \Gamma - \gamma = \frac{\theta'' - \theta}{3\theta'} (E - e),$$

la seconde ligne disparaît dans le cas des intervalles égaux (¹).

Dans ce qui précède, les distances Δ , Δ'' sont les distances géocentriques pour les lieux extrêmes. Il est clair que l'élimination d'une autre distance que Δ' se fait de la même manière.

Legendre (*Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes*, 2^e Supplément, n^o 15) a indiqué d'autres combinaisons qui peuvent offrir des avantages particuliers. Oppolzer a repris plus tard les formules de Legendre (*Traité de la détermination des orbites...*; édition française, p. 288 et suiv.). Il est clair que, φ étant un angle arbitraire, on éliminera Δ' par exemple, en multipliant respectivement les équations par

$$\cos \varphi, \quad \sin \varphi, \quad -\cot \delta' \cos (\varphi - \alpha');$$

l'angle φ arbitraire sera choisi pour assurer la précision du résultat.

6. Lagrange a calculé comme il suit les rapports rapprochés des triangles n , n' , n'' compris entre les rayons vecteurs $r'r''$, rr'' , rr' .

Soient pour un moment x, y ; x', y' ; x'', y'' les coordonnées de trois positions successives de l'astre prises par rapport à deux axes rectangulaires dans le plan de l'orbite.

(¹) Du Séjour a publié, en 1782, des formules identiques à celles d'Olbiers (*Cf.* W. FABRITIUS, *Astr. Nach.*, t. CVI).

Si l'on considère que x, y sont les valeurs des coordonnées pour une époque précédant de $t' - t$ celle qui répond aux valeurs x', y' , on a, par la formule de Taylor, τ étant mis pour kt et les dérivées calculées pour l'époque t' ,

$$x = x' - \theta'' \frac{dx'}{d\tau} + \frac{\theta''^2}{2} \frac{d^2x'}{d\tau^2} - \frac{\theta''^3}{6} \frac{d^3x'}{d\tau^3} + \frac{\theta''^4}{24} \frac{d^4x'}{d\tau^4} + \dots;$$

de même, pour la coordonnée x'' qui se rapporte à $t'' = t' + t'' - t'$,

$$x'' = x' + \theta \frac{dx'}{d\tau} + \frac{\theta^2}{2} \frac{d^2x'}{d\tau^2} + \frac{\theta^3}{6} \frac{d^3x'}{d\tau^3} + \frac{\theta^4}{24} \frac{d^4x'}{d\tau^4} + \dots;$$

des développements analogues ont lieu pour y, y'' .

On a d'ailleurs, par les équations différentielles,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{d\tau^2} &= -\frac{x'}{r'^3}, \\ \frac{d^3x'}{d\tau^3} &= -\frac{1}{r'^3} \frac{dx'}{d\tau} + 3 \frac{x'}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau}, \\ \frac{d^4x'}{d\tau^4} &= \frac{6}{r'^4} \frac{dx'}{d\tau} \frac{dr'}{d\tau} + \dots, \end{aligned}$$

et les développements analogues pour y , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{A}x' - \mathbf{B} \frac{dx'}{d\tau}, & x'' &= \mathbf{A}''x' + \mathbf{B}'' \frac{dx'}{d\tau}, \\ y &= \mathbf{A}y' - \mathbf{B} \frac{dy'}{d\tau}, & y'' &= \mathbf{A}''y' + \mathbf{B}'' \frac{dy'}{d\tau}, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 1 - \frac{\theta''^2}{2} \frac{1}{r'^3} - \frac{\theta''^3}{2} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \dots, \\ \mathbf{B} &= \theta'' - \frac{\theta''^3}{6} \frac{1}{r'^3} - \frac{\theta''^4}{4} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \dots, \\ \mathbf{A}'' &= 1 - \frac{\theta^2}{2} \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta^3}{2} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \dots, \\ \mathbf{B}'' &= \theta - \frac{\theta^3}{6} \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta^4}{4} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \dots \end{aligned}$$

Les doubles des aires des triangles considérés sont

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' &= \mathbf{B}'' \left(x' \frac{dy'}{d\tau} - y' \frac{dx'}{d\tau} \right), \\ xy'' - yx'' &= (\mathbf{A}\mathbf{B}'' + \mathbf{B}\mathbf{A}'') \left(x' \frac{dy'}{d\tau} - y' \frac{dx'}{d\tau} \right), \\ xy' - yx' &= \mathbf{B} \left(x' \frac{dy'}{d\tau} - y' \frac{dx'}{d\tau} \right); \end{aligned}$$

On en déduit

$$c = \frac{[r' r'']}{[r' r''] + [r r']} = \frac{B''}{B + B''}, \quad c'' = \frac{[r r']}{[r' r''] + [r r']} = \frac{B}{B + B''};$$

$$c' = 1 - e = \frac{AB'' + BA''}{B + B''}, \quad e = \frac{(1-A)B'' + (1-A'')B}{B + B''}.$$

Or

$$B + B'' = \theta' \left(1 - \frac{\theta^3 + \theta''^3}{6\theta'} \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta^4 - \theta''^4}{4\theta'} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \dots \right),$$

$$(1-A)B'' + (1-A'')B = \theta\theta'' \left(\frac{\theta''}{2} \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta''^2}{2} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \frac{\theta}{2} \frac{1}{r'^3} - \frac{\theta^2}{2} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \dots \right),$$

$$= \frac{\theta\theta''\theta'}{2r'^3} \left(1 + \frac{\theta'' - \theta}{r'} \frac{dr'}{d\tau} + \dots \right),$$

ce qui donne

$$e = \frac{\theta\theta''}{2r'^3} \left(1 + \frac{\theta'' - \theta}{r'} \frac{dr'}{d\tau} + \dots \right),$$

ensuite

$$c = \frac{\theta}{\theta'} + \gamma, \quad c'' = \frac{\theta''}{\theta'} - \gamma,$$

$$2\gamma = c - c'' + \frac{\theta'' - \theta}{\theta'} = \frac{B'' - B}{B'' + B} + \frac{\theta'' - \theta}{\theta'} = 2\theta\theta'' \left(\frac{\theta'' - \theta}{6\theta'} \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta^3 + \theta''^3}{4\theta'^2} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} + \dots \right).$$

On voit que l'on a à peu près

$$\gamma = \frac{\theta'' - \theta}{3\theta'} e.$$

Les développements qui précèdent sont surtout convergents pour les petits intervalles de temps et les astéroïdes. Pour la Terre, les résultats sont d'une précision moindre, et il est préférable de calculer directement E et Γ .

Au degré d'approximation employé, on peut encore écrire

$$r = r' - \theta'' \frac{dr'}{d\tau}, \quad r'' = r' + \theta \frac{dr'}{d\tau},$$

$$\frac{dr'}{d\tau} = \frac{r'' - r}{\theta'}, \quad r' = \frac{r + r''}{2} + \frac{1}{2} \frac{\theta'' - \theta}{\theta'} (r'' - r),$$

$$e = \frac{\theta\theta''}{2 \left(\frac{r + r''}{2} \right)^3} \left(1 - \frac{\theta'' - \theta}{\theta'} \frac{r'' - r}{r'' + r} \right),$$

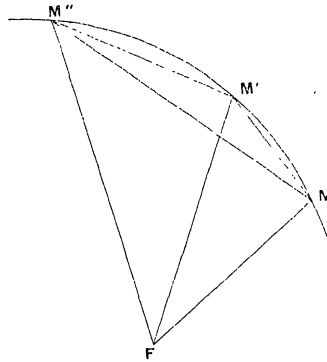
$$\gamma = \theta\theta'' \left[\frac{\theta'' - \theta}{6\theta'} \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2} \right)^3} + \frac{\theta\theta''}{2\theta'^2} \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2} \right)^3} \frac{r'' - r}{r'' + r} \right].$$

7. La manière de procéder de Lagrange nécessite le calcul des rapports $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ introduits comme auxiliaires; d'abord, la connaissance d'une valeur approchée du rayon permet d'évaluer $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$. Mais la question se pose d'obtenir, d'une manière générale, en vue de l'approximation suivante, les valeurs de $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ résultant de l'approximation actuelle. Il importe surtout d'arriver aux valeurs numériques de ces rapports.

Le théorème général de Lambert, n° 4, se prête bien à cet objet.

Partant d'une valeur supposée de $\frac{n''}{n'} = \frac{\text{tri. MF}M'}{\text{tri. MF}M''} = \frac{r' \sin \widehat{\text{MF}M'}}{r'' \sin \widehat{\text{MF}M''}}$ (fig. 2) et de r'

Fig. 2.



dont on peut avoir une valeur approchée de diverses manières, par exemple en se rappelant les équations

$$c' x' = c x + c'' x'',$$

$$c' y' = c y + c'' y'',$$

$$c' z' = c z + c'' z'',$$

d'où

$$\begin{aligned} r'^2 &= \left(\frac{c}{c'}\right)^2 r^2 + \left(\frac{c''}{c'}\right)^2 r''^2 + 2 \frac{c}{c'} \frac{c''}{c'} (x x'' + y y'' + z z'') \\ &= \left[\left(\frac{c}{c'}\right)^2 + \frac{c}{c'} \frac{c''}{c'}\right] r^2 + \left[\left(\frac{c''}{c'}\right)^2 + \frac{c}{c'} \frac{c''}{c'}\right] r''^2 - \frac{c}{c'} \frac{c''}{c'} z^2, \end{aligned}$$

on conclut la valeur de $\sin \widehat{\text{MF}M'}$.

On a, pour la corde MM' ,

$$\overline{\text{MM}'}^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \widehat{\text{MF}M'} = (r' - r)^2 + 4 r r' \sin^2 \frac{\widehat{\text{MF}M'}}{2}.$$

Le théorème de Lambert fait alors connaître, d'après la corde MM' , les

rayons vecteurs r , r' et le demi grand axe a supposé également connu, le temps nécessaire à l'astre pour aller de M en M' (1). Soit $[t' - t]$ cet intervalle calculé.

Il est clair qu'une valeur corrigée de $\frac{n''}{n'}$ sera $\frac{n''}{n'} \frac{t' - t}{[t' - t]}$.

Dans le cas des orbites paraboliques, le problème de calculer le rayon vecteur intermédiaire r' et le rapport $\frac{n''}{n'}$ a été résolu d'une manière très satisfaisante, au point de vue du calcul numérique, par M. Lœwy (*Travaux divers de M. Lœwy*, Paris, 1872). Bessel avait déjà traité le même problème au moyen des séries. (*Bessel, Abhandlungen, Engelmann*, t. I, p. 13.)

L'expression du rapport $\frac{\text{secteur}}{\text{triangle}}$ se rattache aussitôt au théorème de Lambert.

On a

$$\frac{\text{secteur}}{\text{triangle}} = \frac{k\sqrt{p}(t'' - t)}{xy'' - yx''};$$

d'après les formules du n° 1,

$$\begin{aligned} xy'' - yx'' &= a^2 \sqrt{1 - e^2} [\sin E'' (\cos E - e) - \sin E (\cos E'' - e)] \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} (\sin 2g - 2e \sin g \cos G) \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} [\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)]; \end{aligned}$$

de là

$$\frac{\text{secteur}}{\text{triangle}} = \frac{\varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta)}{\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)};$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r + r'' + x}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r + r'' - x}{4a}}.$$

Le rapport secteur : triangle dépend donc seulement des deux quantités ε et δ ou, si l'on veut, de $\frac{r + r''}{4a}$ et $\frac{x}{4a}$. A la place de x , dans la dernière, on peut mettre sa valeur déduite de la relation du n° 2,

$$\theta' \sqrt{2} = Zx - \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2}\right)^3} \frac{Z^3 x^3}{24} + \frac{1}{\left(\frac{r + r''}{2}\right)^4} \frac{Z^5 x^3}{32} + \dots,$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\frac{r + r''}{2}} - \frac{1}{2a}}}.$$

(1) Le calcul de l'intervalle de temps est facilité par les Tables de Marth, *Auxiliary Tables for the solution of Lambert's equation* (*Astr. Nach.*, n°s 1557-1560).

d'où

$$\frac{x^2}{2\theta'^2} = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{6} \frac{\theta'^2}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{8} \frac{\theta'^2}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} - \dots;$$

le rapport en question se trouve alors exprimé en fonction des rayons r , r'' et de a qui entre dans Z . Voici les premiers termes du développement :

$$\frac{\text{secteur}}{\text{triangle}} = 1 + \frac{1}{6} \frac{\theta'^2}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} + \frac{1}{10} \frac{\theta'^4}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^5} \frac{1}{Z^2} - \frac{11}{360} \frac{\theta'^4}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^6} + \dots;$$

il suffira, pour avoir les rapports $\frac{n''}{n'}$, $\frac{n}{n'}$, de connaître r' .

Le calcul du rayon r' est facilité par la relation très approchée (1)

$$\theta r^2 + \theta'' r''^2 = \theta' r'^2 + \theta \theta' \theta'' \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{a} \right),$$

qui se démontre en développant $r^2 - r'^2$ et $r''^2 - r'^2$, d'après les formules du n° 6 et tenant compte de la relation

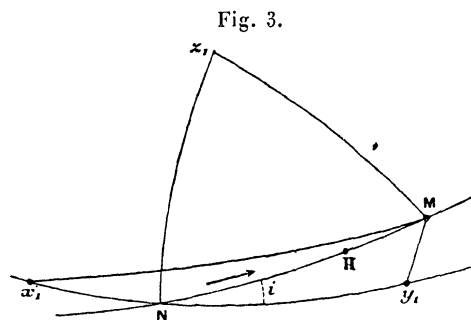
$$\frac{1}{2} \frac{d^2 r'^2}{dt^2} - \frac{1}{r'} + \frac{1}{a} = 0.$$

La relation

$$\theta r^2 + \theta'' r''^2 = \theta' r'^2$$

peut parfois donner une précision suffisante.

8. Les approximations successives étant supposées terminées, on connaît en même temps que les deux positions héliocentriques ayant pour coordonnées x ,



y , z et x'' , y'' , z'' , le demi-grand axe a , élément essentiel; les procédés de calcul seront disposés pour ce but.

(1) RADAU (R.), *Bulletin astronomique*, t. II, p. 11.

Il s'agit maintenant de calculer les autres éléments de l'orbite et de construire une éphéméride.

Prenons la surface sphérique de rayon égal à l'unité et ayant son centre au Soleil; l'écliptique la coupera suivant le grand cercle $x_1 y_1$ (x_1 est l'équinoxe moyen) (*fig. 3*) et le plan de l'orbite suivant le grand cercle $N\Pi$, Π répondant au périhélie; M est la trace du rayon vecteur sur la sphère. Le plan de l'orbite est déterminé par $x_1 N = \Omega$, longitude du nœud ascendant et par l'inclinaison i du plan sur l'écliptique; la position de l'orbite dans son plan est déterminée par $N\Pi = \varpi - \Omega$.

La formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique appliquée aux trois triangles $x_1 MN$, $y_1 MN$, $z_1 MN$ donne, pour les cosinus des angles que le rayon vecteur r répondant à une anomalie vraie ν fait avec les axes Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 ,

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{r} &= \cos \Omega \cos(\varpi - \Omega + \nu) - \sin \Omega \sin(\varpi - \Omega + \nu) \cos i, \\ \frac{y_1}{r} &= \sin \Omega \cos(\varpi - \Omega + \nu) + \cos \Omega \sin(\varpi - \Omega + \nu) \cos i, \\ \frac{z_1}{r} &= \sin(\varpi - \Omega + \nu) \sin i;\end{aligned}$$

r et ν se calculent par les formules connues

$$\begin{aligned}r \cos \nu &= a(\cos E - e), \\ r \sin \nu &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E,\end{aligned}$$

$$E - e \sin E = \text{anomalie moyenne } M = L_0 + nt - \varpi,$$

De là on passe aux coordonnées équatoriales héliocentriques

$$\begin{aligned}x &= x_1 = r \sin a \sin(A + \varpi - \Omega + \nu) = r \sin a \sin(A' + \nu), \\ y &= y_1 \cos \varepsilon - z_1 \sin \varepsilon = r \sin b \sin(B + \varpi - \Omega + \nu) = r \sin b \sin(B' + \nu), \\ z &= y_1 \sin \varepsilon + z_1 \cos \varepsilon = r \sin c \sin(C + \varpi - \Omega + \nu) = r \sin c \sin(C' + \nu);\end{aligned}$$

$\sin a$, A , ... sont les *constantes de Gauss*.

La comparaison des expressions des coordonnées entraîne les relations

$$\begin{aligned}\sin a \sin A &= \cos \Omega, & \sin a \cos A &= -\sin \Omega \cos i, \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \varepsilon, & \sin b \cos B &= \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon, \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \varepsilon, & \sin c \cos C &= \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon,\end{aligned}$$

propres au calcul de $\sin a$, A , ... d'après Ω , i ; on a encore

$$\begin{aligned}\sin b \sin c \sin(B - C) &= \sin \Omega \sin i, \\ \sin c \sin a \sin(C - A) &= -\cos i \sin \varepsilon - \sin i \cos \varepsilon \cos \Omega, \\ \sin a \sin b \sin(A - B) &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega; \\ -\operatorname{tang} i &= \frac{\sin b \sin c \sin(B - C)}{\sin a \cos A},\end{aligned}$$

et les suivantes utiles pour les contrôles :

$$\begin{aligned}\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 2, \\ \sin^2 a \cos 2A + \sin^2 b \cos 2B + \sin^2 c \cos 2C &= 0, \\ \sin^2 a \sin 2A + \sin^2 b \sin 2B + \sin^2 c \sin 2C &= 0.\end{aligned}$$

D'ordinaire on déduit les constantes de Gauss des éléments Ω , i de l'orbite. La marche inverse indiquée par Klinkerfues (*Theoretische Astronomie, passim*) semble ici préférable. Les constantes de Gauss et les éléments autres que Ω , i et a se calculent, d'ailleurs, facilement d'après les coordonnées x , y , z et x'' , y'' , z'' déjà connues.

Soit $\frac{r'' - r}{r'' + r} = \operatorname{tang} \omega$, d'où

$$\begin{aligned}\sin 2\omega &= \frac{(r'' - r)(r'' + r)}{r^2 + r''^2}, & \frac{r + r''}{2} &= \sqrt{\frac{r^2 + r''^2}{2}} \cos \omega; \\ \frac{x''}{r''} - \frac{x}{r} &= 2 \sin a \sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \cos \left(A' + \frac{\varphi + \varphi''}{2} \right), \\ \frac{x''}{r''} + \frac{x}{r} &= 2 \sin a \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \sin \left(A' + \frac{\varphi + \varphi''}{2} \right);\end{aligned}$$

en tenant compte des valeurs de $\sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2}$ et $\cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}$ d'après les relations

$$\begin{aligned}z^2 &= r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos(\varphi'' - \varphi), \\ \sin^2 \frac{\varphi'' - \varphi}{2} &= -\frac{(r'' - r + z)(r'' - r - z)}{4rr''},\end{aligned}$$

on a donc le moyen de calculer $\sin a$ et $A' + \frac{\varphi + \varphi''}{2}$; la même chose a lieu pour les constantes répondant aux coordonnées y et z .

Avant d'aller plus loin, avec $\frac{\varphi'' - \varphi}{2}$ et $A' + \frac{\varphi + \varphi''}{2}$, on forme $A' + \varphi$ et $A' + \varphi''$, ... et les coordonnées x et x'' , ...; on doit retrouver les positions géocentriques comme contrôle.

Ensuite, des relations évidentes

$$\frac{1}{p}(1 + e \cos v) = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{p}(1 + e \cos v'') = \frac{1}{r''},$$

on déduit les relations

$$\frac{2e}{p} \sin \frac{v'' - v}{2} \sin \frac{v'' + v}{2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r''},$$

$$\frac{2e}{p} \cos \frac{v'' - v}{2} \cos \frac{v'' + v}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r''} - \frac{2}{p},$$

propres à faire connaître $\frac{v'' + v}{2}$ et e quand la formule (8) de la page 4

$$\sqrt{rr''} \sin \frac{v'' - v}{2} = a\sqrt{1 - e^2} \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2} \right),$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r + r'' + x}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r + r'' - x}{4a}}$$

est utilisable pour donner p ,

$$\sqrt{p} = \sqrt{\frac{rr''}{a}} \frac{\sin \frac{v'' - v}{2}}{\sin \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2} \right)} = \sqrt{\frac{rr''}{a}} \frac{\sin \frac{v'' - v}{2}}{\frac{x}{2a}} \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} \right).$$

Pour la parabole, il y a simplification :

$$\frac{2}{\sqrt{q}} \sin \frac{v'' - v}{4} \sin \frac{v + v''}{4} = \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r''}},$$

$$\frac{2}{\sqrt{q}} \cos \frac{v'' - v}{4} \cos \frac{v + v''}{4} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r''}}.$$

Ayant $\frac{v + v''}{2}$, on trouvera aussitôt les constantes A' , B' , C' .

Pour obtenir $\varpi - \Omega$, il suffit de remarquer que la tangente $\frac{\tilde{z}_1}{r}$ de l'angle de l'astre avec l'écliptique est telle que l'on a

$$\text{pour } v = -(\varpi - \Omega), \quad \frac{\tilde{z}_1}{r} = 0, \quad \frac{d\tilde{z}_1}{dv} > 0,$$

d'où

$$\sin c \sin(C' + v) \cos \varepsilon - \sin b \sin(B' + v) \sin \varepsilon = 0,$$

$$\sin c \cos(C' + v) \cos \varepsilon - \sin b \cos(B' + v) \sin \varepsilon > 0,$$

conditions qui deviennent, par l'introduction d'un angle auxiliaire s déterminé

par

$$\frac{\sin c}{\sin b} = \operatorname{tang} s,$$

$$\operatorname{tang} \left[\frac{B' + C'}{2} - (\varpi - \Omega) \right] = \frac{\sin(s + \varepsilon)}{\sin(s - \varepsilon)} \operatorname{tang} \frac{B' - C'}{2},$$

avec

$$\begin{aligned} \sin(s - \varepsilon) \cos \left[\frac{B' + C'}{2} - (\varpi - \Omega) \right] \cos \frac{B' - C'}{2} \\ + \sin(s + \varepsilon) \sin \left[\frac{B' + C'}{2} - (\varpi - \Omega) \right] \sin \frac{B' - C'}{2} > 0; \end{aligned}$$

$\varpi - \Omega$ sera déterminé par là sans ambiguïté, ensuite A, B, C; enfin Ω et i le seront par les relations

$$- \operatorname{tang} i = \frac{\sin b \sin c \sin(B - C)}{\sin a \cos A},$$

$$\cos \Omega = \sin a \sin A,$$

$$\sin \Omega \cos \varepsilon = \sin b \sin B,$$

auxquelles on peut joindre

$$\sin \Omega \sin i = \sin b \sin c \sin(B - C).$$

Lambert a insisté dans son Ouvrage, *Insigniores...*, n° 208, sur la facilité qu'apporte dans la détermination de l'orbite elliptique la connaissance du demi-grand axe a . Ce qui précède confirme les remarques de Lambert. Ajoutons qu'il subsiste forcément de l'indétermination dans les résultats conclus des observations portant sur un petit arc de la trajectoire; on pourra exprimer les différents éléments en fonction du grand axe jouant le rôle d'une indéterminée, en particulier les variations de l'ascension droite et de la déclinaison correspondant à un certain changement du moyen mouvement.

On doit à l'astronome anglais Marth des Tables (*Astr. Nach.*, nos 1557-1560) qui facilitent les calculs dans le cas où a est considérable, cas dans lequel les équations finies du n° 1 ne donneraient pas la précision cherchée.

Les raisons qui ont déterminé Marth à entreprendre la construction de ses Tables sont comme un commentaire aux remarques de Lambert. « Dans le cas des orbites de comètes, il sera sans doute toujours à propos de prendre $\frac{1}{a}$ comme une des deux inconnues (les quantités P et Q de Gauss, ou les distances Δ , Δ''). Mais il paraît utile de faire la même chose aussi dans les cas où la période est courte et encore inconnue. Car, si je ne me trompe, le passage

d'une hypothèse à une autre, en ce qui concerne a , est, par le moyen des présentes Tables, si facilement réalisé, et l'avantage de constater directement comment les observations sont compatibles avec des orbites de différentes périodes peut être obtenu avec si peu de peine, que les hypothèses sur le grand axe sont tout indiquées. »

On trouvera plus loin les Tables de Marth avec les remarques utiles pour leur emploi.

Les recherches récentes sur les comètes périodiques, en particulier celles de M. Schulhof, montrent la justesse des prévisions de Marth.

CHAPITRE II.

LES ÉQUATIONS DU PROBLÈME POUR LA DÉTERMINATION D'UNE ORBITE, D'APRÈS TROIS OBSERVATIONS COMPLÈTES. SOLUTION DU PROBLÈME PAR APPROXIMATIONS AU MOYEN DES MÉTHODES INDIRECTES.

1. Les équations du problème s'écrivent aisément en faisant intervenir les distances Δ , Δ' , Δ'' de l'astre à la Terre dans les trois observations et le demi grand axe a .

On écrit que les trois points définis par les distances Δ , Δ' , Δ'' sont dans un plan passant par le Soleil;

On écrit que les temps employés par l'astre pour aller du premier lieu au second et du second au troisième sont respectivement $t' - t$ et $t'' - t'$;

Enfin que l'ellipse définie par les trois points en question a un demi grand axe $= a$.

Cela fait quatre équations à quatre inconnues. On peut concevoir effectuée l'élimination de a : il reste alors trois équations sinon algébriques du moins exprimables en termes finis, entre Δ , Δ' , Δ'' .

Dans le cas d'une orbite parabolique, $\frac{1}{a} = 0$, le théorème de Lambert se réduit à celui d'Euler,

$$6k(t'' - t) = (r + r'' + x)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r'' - x)^{\frac{3}{2}}.$$

Les quatre équations ci-dessus sont algébriques par rapport à Δ , Δ' , Δ'' (1).

(1) Ces relations ont été formulées d'abord par Olbers, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen*, § 8.

Il serait donc théoriquement possible d'obtenir Δ , Δ' , Δ'' en fonction rationnelle des données d'observation.

2. Mais les astronomes ont préféré, le problème général étant regardé comme impossible à résoudre, tirer parti des renseignements fournis par les observations.

D'abord les observations sont faites à des intervalles rapprochés. Il faut remarquer que cette circonstance, qui facilite la mise en équation du problème en autorisant à remplacer les rapports $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ par des développements en séries, entraîne une certaine indétermination dans les résultats; il y aura lieu à perfectionner successivement les résultats d'abord obtenus.

Si l'on ne fait pas d'autre hypothèse que celle des observations rapprochées, il peut arriver dans des conditions favorables, les petites planètes étant prises comme exemple, qu'avec dix jours d'observation on ait des résultats utiles; mais le contraire se présente aussi (*Cf.* Chapitre suivant); l'emploi de la méthode appelée *directe* qui utilise la courbure de la trajectoire apparente est aussi à rejeter si l'orbite est très voisine de l'écliptique.

On se détermine donc à introduire d'autres hypothèses admissibles *a posteriori*. Les orbites à calculer sont partagées en deux classes: les orbites paraboliques des comètes et les orbites presque circulaires des petites planètes.

Dans le cas des comètes qui se perdent dans les rayons du Soleil à une distance notable de la Terre, on admet, comme résultat approché, que le rayon vecteur au moment de la découverte n'est guère différent du rayon de l'orbite terrestre.

Pour les petites planètes, une orbite circulaire, déduite de deux observations complètes, constitue un point de départ utile. Une telle orbite permet de suivre un astre nouveau pendant un mois et de reconnaître s'il s'agit bien d'un astre nouveau; elle abrège notablement le premier calcul de l'ellipse: les observations sont corrigées par son moyen du temps de l'aberration et de la parallaxe.

Tisserand a étudié la détermination des orbites circulaires (1) et prouvé que, dans certains cas exceptionnels, tels que celui de la planète BE (391) considéré par M. Schulhof, il n'est pas possible de faire le calcul d'une orbite circulaire.

Admettons, comme cela a lieu ordinairement, que la planète possédant une inclinaison et une excentricité faibles soit voisine de l'opposition; alors $r'' - r$, $R'' - R$, $\Delta'' - \Delta$ sont du second ordre; les termes en $(\Delta'' - \Delta)^2$ et $(\Delta'' - \Delta)$, dans l'expression du carré de la corde $MM'' = x$ (Ch. I, n° 3), sont du quatrième

(1) *Comptes rendus*, t. CXIX, p. 881. — *Bulletin astronomique*, t. XII, p. 53.

ordre. La relation approchée déduite du théorème de Lambert s'écrit, en négligeant les termes du deuxième ordre,

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{\frac{r+r''}{2}} - \frac{x^2}{2\theta'^2},$$

$$x^2 = g^2 + f^2 \left(\frac{\Delta'' + \Delta}{2} \right)^2 - 2fg [\cos \varphi \cos \gamma \cos (F - G) + \sin \varphi \sin \gamma] \frac{\Delta'' + \Delta}{2};$$

x^2 ne dépend que de $\frac{\Delta'' + \Delta}{2}$.

D'autre part,

$$\left(\frac{r+r''}{2} \right)^2 + \left(\frac{r''-r}{2} \right)^2 = \frac{r^2+r''^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \frac{r^2+r''^2}{2} = & \left(\frac{\Delta'' + \Delta}{2} \right)^2 - 2 \frac{R'' \cos \psi'' + R \cos \psi}{2} \frac{\Delta'' + \Delta}{2} + \frac{R^2 + R''^2}{2} \\ & + \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{2} \right)^2 - 2 \frac{R'' \cos \psi'' - R \cos \psi}{2} \frac{\Delta'' - \Delta}{2}; \end{aligned}$$

$$r'' - r = \frac{r''^2 - r^2}{r'' + r},$$

$$r''^2 - r^2 = R''^2 - R^2 + (\Delta'' - \Delta)(\Delta'' + \Delta - R \cos \psi - R'' \cos \psi'') - (R'' \cos \psi'' - R \cos \psi)(\Delta'' + \Delta).$$

Négligeant les termes du quatrième ordre dans $\frac{r+r''}{2}$, on peut donc poser

$$\frac{r+r''}{2} = r_m,$$

$$r_m^2 = \left(\frac{\Delta'' + \Delta}{2} \right)^2 - 2 \frac{R'' \cos \psi'' + R \cos \psi}{2} \frac{\Delta'' + \Delta}{2} + \frac{R^2 + R''^2}{2};$$

r_m^2 dépend de $\frac{\Delta'' + \Delta}{2}$ comme r^2 , r''^2 de Δ et Δ'' .

La relation approchée déduite du théorème de Lambert devient ainsi

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r_m} - \frac{x^2}{2\theta'^2},$$

où

$$r_m^2 = \left(\frac{\Delta'' + \Delta}{2} \right)^2 - 2 \frac{R'' \cos \psi'' + R \cos \psi}{2} \frac{\Delta'' + \Delta}{2} + \frac{R^2 + R''^2}{2},$$

$$x^2 = g^2 + f^2 \left(\frac{\Delta'' + \Delta}{2} \right)^2 - 2fg [\cos \varphi \cos \gamma \cos (F - G) + \sin \varphi \sin \gamma] \frac{\Delta'' + \Delta}{2}.$$

Dans le cas d'une orbite circulaire, on posera

$$\frac{x^2}{\theta'^2} - \frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_m} - \frac{1}{a} = 0.$$

Cette relation, par laquelle le problème est réduit à une équation du sixième degré où l'inconnue $\frac{\Delta'' + \Delta}{2}$ est la distance géocentrique pour l'époque moyenne, est à rapprocher des résultats suivants dus, dans leur principe, à Boscovich (*Dissertatio de Cometis*, 1744).

Les relations linéaires entre les Δ (Chap. I, n° 5) donnent sensiblement

$$\Delta \cos \delta \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\theta''} + \Delta'' \cos \delta'' \frac{\sin(\alpha'' - \alpha')}{\theta} = 0;$$

d'où se déduisent le rapport $\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta'' + \Delta}$ et l'expression de x^2 au moyen de $\frac{\Delta'' + \Delta}{2}$.

Fait-on ensuite $\frac{1}{a} = 0$ dans la relation approchée

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r + r''} - \frac{x^2}{2\theta'^2} = \frac{1}{r_m} - \frac{x^2}{2\theta'^2},$$

il viendra, pour déterminer $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$, une équation du sixième degré. Oppolzer s'en est servi pour discuter les solutions multiples du problème.

Mais il est préférable de garder l'équation sous la forme

$$\frac{1}{r} - a\Delta^2 - b\Delta - c = 0.$$

Une Table des valeurs de $\frac{1}{r}$ où

$$r^2 = 1 - 2C\Delta + \Delta^2, \quad -1 < C < +1$$

facilite la résolution des deux types d'équations répondant aux orbites circulaires et aux orbites paraboliques.

On calcule le résidu du premier membre de l'équation

$$\frac{1}{r} - a\Delta^2 - b\Delta - c = 0$$

pour une valeur supposée $\Delta = \Delta_0$, et l'on prend comme valeur corrigée

$$\Delta_0 + x \quad \text{où} \quad x = \frac{\text{Résidu}}{2a\Delta_0 + b - \delta},$$

δ étant la variation de $\frac{1}{r}$ pour une unité de variation de l'argument Δ .

La réduction du problème, comme on vient de l'indiquer, à une équation du sixième degré appelle quelques remarques.

Lagrange analysant la solution donnée par Lambert (*Insigniores...*, § 115) qui conduit à une équation du sixième degré, affirme qu'*il est impossible d'abaisser l'équation finale au-dessous du septième degré, quand même on supposerait les intervalles écoulés entre les observations infiniment petits* (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 448).

Olbers (*Abhandlung*, § 15) s'appuyant sur l'autorité de Lagrange a formulé des réserves sur les solutions dues à Boscovich et à Lambert, sans les préciser toutefois.

Or, parmi les nombreuses Notes de Cauchy relatives à la détermination des orbites (*Œuvres complètes*, 1^{re} série, t. X) s'en trouve une ayant pour titre : *Sur l'abaissement que l'on peut faire subir au degré de l'équation donnée par Lagrange...* (voir p. 449 du Vol. cité). Cauchy montre que l'équation même, à laquelle Lagrange parvient dans le Mémoire de 1780, peut être abaissée du septième degré au sixième (1).

Il n'y a donc pas lieu de maintenir les réserves d'Olbers à l'égard de la solution de Boscovich ni de celle de Lambert.

Tisserand a simplifié encore la discussion dans le cas des orbites circulaires.

On prend, en faisant $R = R'' = 1$,

$$r_m = \frac{\Delta + \Delta''}{2} + 1;$$

l'équation devient

$$ar_m^2 + br_m + c - \frac{1}{r_m} = 0;$$

elle doit être satisfaite dans le cas de la Terre, en posant $r_m = 1$. Après suppression du facteur $r_m - 1$, elle devient

$$ar_m + a + b + \frac{1}{r_m} = 0;$$

$$a = \frac{f^2}{g^2} = \frac{f'^2}{g'^2}, \quad -b = \frac{2f^2}{g^2} + \frac{2f}{g} [\cos \varphi \cos \gamma \cos (F - G) + \sin \varphi \sin \gamma].$$

Soit V l'angle de la trajectoire apparente de l'astre avec celle du Soleil,

$$\cos V = [\cos \varphi \cos \gamma \cos (F - G) + \sin \varphi \sin \gamma],$$

il n'y a pas de racines réelles pour r_m si

$$\left(\frac{f^2}{g^2} + 2 \frac{f}{g} \cos V - \frac{2f}{g} \right) \left(\frac{f^2}{g^2} + 2 \frac{f}{g} \cos V + 2 \frac{f}{g} \right) < 0.$$

(1) Cette Note de Cauchy m'a été signalée par M. Radau.

Le second facteur étant > 0 , il faut que l'on ait

$$\frac{f}{g} + 2 \cos V - 2 < 0.$$

Vers l'opposition, les astéroïdes ont un mouvement apparent rétrograde, l'angle de la trajectoire de l'astre avec l'écliptique, sensiblement égal à $180^\circ - V$, est obtus, donc $\cos V > 0$; il faut que le mouvement en déclinaison soit considérable; cela s'est trouvé réalisé pour la planète (391).

3. A part de très rares exceptions, après quatre à dix jours d'observation, il sera possible de calculer une orbite circulaire. Dans les cas exceptionnels, le mieux serait de recourir aux méthodes directes du Chapitre suivant, qui ne font pas d'hypothèse sur l'excentricité de l'orbite.

Soient, pour la première date,

L, R les coordonnées du Soleil tirées de la *Connaissance des Temps*, rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens du commencement de l'année;

$X = R \cos L, Y = R \sin L \cos \varepsilon, Z = R \sin L \sin \varepsilon.$

α et δ l'ascension droite et la déclinaison de la planète rapportées aux mêmes plans;

$\Delta, \psi, \varepsilon$ la distance de l'astre à la Terre, l'angle à la Terre et l'angle à la planète;

$\xi = \cos \alpha, \eta = \sin \alpha, \zeta = \tan \delta$, pour abrégier l'écriture.

On a les relations

$$R \cos \psi \sec \delta = X \xi + Y \eta + Z \zeta,$$

$$(R \sin \psi \sec \delta)^2 = \left[YZ \left(\frac{\eta}{Y} - \frac{\zeta}{Z} \right) \right]^2 + \left[ZX \left(\frac{\zeta}{Z} - \frac{\xi}{X} \right) \right]^2 + \left[XY \left(\frac{\xi}{X} - \frac{\eta}{Y} \right) \right]^2,$$

d'où

$$R \cos \psi, R \sin \psi, \psi \text{ et } R;$$

R doit s'accorder avec la valeur calculée directement.

D'une valeur supposée de $\alpha = r = r''$, on déduit Δ par les formules

$$\sin \varepsilon = \frac{R \sin \psi}{a}, \quad \Delta = \frac{r \sin(\psi + \varepsilon)}{\sin \psi},$$

la relation

$$\Delta = r \cos \varepsilon + R \cos \psi$$

servant de contrôle. On calcule les quantités analogues pour la seconde date.

Ensuite les coordonnées rectangulaires héliocentriques

$$\begin{aligned}x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha - X, & x'' &= \dots, \\y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha - Y, & y'' &= \dots, \\z &= \Delta \sin \delta - Z, & z'' &= \dots;\end{aligned}$$

la corde x

$$x^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2,$$

ensuite le demi-angle au centre $\frac{v'' - v}{2}$ donné par

$$\sin \frac{v'' - v}{2} = \frac{x}{2a}$$

et qui est comparé à

$$\frac{v'' - v}{2} = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \frac{t'' - t}{2 \operatorname{arc} t''}.$$

L'accord entre les deux nombres étant obtenu, les tâtonnements sont terminés.

Les constantes de Gauss pour le calcul des coordonnées rectangulaires héliocentriques

$$\begin{aligned}x &= r \sin a \sin (A + \varpi - \Omega + v) = r \sin a \sin (A' + \mu t), \\y &= r \sin b \sin (B + \varpi - \Omega + v) = r \sin b \sin (B' + \mu t), \\z &= r \sin c \sin (C + \varpi - \Omega + v) = r \sin c \sin (C' + \mu t),\end{aligned}$$

et l'éphéméride s'obtiennent en observant que

$$x'' - x = 2r \sin \frac{v'' - v}{2} \sin a \cos A', \quad x'' + x = 2r \cos \frac{v'' - v}{2} \sin a \sin A';$$

par suite,

$$\begin{aligned}r \sin a \cos A' &= \frac{x'' - x}{2 \sin \frac{v'' - v}{2}}, \\r \sin a \sin A' &= \frac{x'' + x}{2 \cos \frac{v'' - v}{2}};\end{aligned}$$

d'où $r \sin a$ et A' et les quantités analogues $r \sin b$, B' , $r \sin c$, C' . Contrôles :

$$\begin{aligned}\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 2, \\ \sin^2 a \cos 2A' + \sin^2 b \cos 2B' + \sin^2 c \cos 2C' &= 0.\end{aligned}$$

Pour préparer les données du calcul, il faut réduire les observations au commencement de l'année. On se contente ici d'appliquer aux lieux apparents de l'astre les réductions au jour des étoiles de comparaison prises avec un signe

contraire. Comme on a, suivant qu'il s'agit de l'astre ou de l'étoile,

Pos. app. = Pos. moy. + préc. + nut. + aberr. planétaire ou aberr. des étoiles,

et que les corrections de précession et de nutation s'accordent pour les deux, il reste la différence des corrections : aberration planétaire — aberration des étoiles, dont on ne tient pas compte; cette différence est petite et surtout elle varie peu dans l'intervalle des observations utilisées pour un premier calcul d'orbite; de sorte que les époques sont altérées d'une petite quantité à peu près constante, et que l'arc de trajectoire est légèrement déplacé tout en conservant sa courbure; or c'est ce dernier élément (*Cf.* Chapitre suivant) qui détermine essentiellement l'orbite. Par la même raison, la parallaxe, quand les observations ont lieu à peu près vers les mêmes heures, n'a pas d'influence nuisible sur la détermination de l'orbite, puisque son effet se traduit par un déplacement de la trajectoire apparente.

Les tâtonnements peuvent être abrégés en observant que la condition pour l'orbite circulaire s'écrit, en remplaçant r par $1 + \Delta$ (p. 26),

$$\frac{g^2 + f^2 \Delta^2 - 2fgP\Delta}{(1 + \Delta)^2} - \frac{\theta'^2}{(1 + \Delta)^3} = 0,$$

et que la différentielle du premier membre par rapport à Δ est

$$\frac{\theta'^2}{(1 + \Delta)^3} \left[\frac{1 - 2\Delta}{1 + \Delta} + \frac{2f}{\theta'} P(\Delta - 1) + \frac{2f^2}{\theta'^2} \Delta \right] d\Delta.$$

Le coefficient de $d\Delta$ est, en général, < 0 pour les petites planètes; par suite, il faut, après le premier essai, diminuer Δ si $\frac{v'' - v}{2}$ calculé par la Trigonométrie est inférieur à $\frac{v'' - v}{2}$ déduit de la troisième loi de Képler; on aura une valeur approchée de la correction $d\Delta$ en prenant

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{\theta'^2}{a^3}} - 1 = \left[\frac{1 - 2\Delta}{1 + \Delta} + \frac{2f}{\theta'} P(\Delta - 1) + \frac{2f^2}{\theta'^2} \Delta \right] d\Delta.$$

La règle de fausse position donnera la valeur de $\log a$.

Voici l'application numérique à la planète EL Coggia (1).

Planète EL.

Dates.	T. m. de Marseille.	α 1899,0.	α en angle.	δ 1899,0.
1899. Avril 1	^h ^m ^s 11. 0. 10	^h ^m ^s 12.58. 20,07	[°] ['] ^{''} 194. 35'. 1",1	— 6°. 39'. 8",7
	7	10.50. 8	12.53.46,46	193.26.36,9

(1) Les observations sont empruntées aux *Comptes rendus* (séances des 4 et 24 avril 1899).

Calcul de $R \cos \psi$, $R \sin \psi$ (1^{er} lieu).

X.	$l\xi$.	lX .	$lX\xi$.	$l\xi:X$.	$\xi:X$.	$\eta:Y - \zeta:Z$	$l(\)$.	lYZ .	$lYZ\left(\frac{\eta}{Y} - \frac{\zeta}{Z}\right)$.
+0,978149	$\bar{1}_n985777$	$\bar{1},990405$	$\bar{1}_n976182$	$\bar{1}_n995372$	-0,98940	+0,08955	$\bar{2},952066$	$\bar{2},196810$	$\bar{3},148876$
+0,190437	$\bar{1}_n401044$	$\bar{1},279751$	$\bar{2}_n680795$	$0_n121293$	-1,32219	-0,42234	$\bar{1},625662$	$\bar{2},907464$	$\bar{2},533126$
+0,082615	$\bar{1}_n066814$	$\bar{2},917059$	$\bar{3}_n983873$	$0_n149755$	-1,41174	+0,33279	$\bar{1},522170$	$\bar{1},270156$	$\bar{2},792326$
	$lR \cos \psi \sec \delta$		$0_n001829$				$l(R \sin \psi \sec \delta)^2$		$\bar{3},699805$
	$l \cos \delta$		$\bar{1},997066$				$lR \sin \psi \sec \delta$		$\bar{2},849903$
	$lR \cos \psi$		$\bar{1}_n998895$				$l \cos \delta$		$\bar{1},997066$
	$lR \sin \psi$		$\bar{2}_n846969$				$lR \sin \psi$		$\bar{2},846969$
	$l \tan \psi$		$\bar{2}_n848074$		$\psi 175^\circ 38' 6'', 17$				
	$l \cos \psi$		$\bar{1}_n998924$						
	lR		$\bar{1},999971$						

Calcul de $R \cos \psi$, $R \sin \psi$ (2^e lieu).

+0,953317	$\bar{1}_n987934$	$\bar{1},979238$	$\bar{1}_n967172$	$0_n008696$	-1,020226	+0,021808	$\bar{2},338616$	$\bar{2},538196$	$\bar{4},876812$
+0,282121	$\bar{1}_n366400$	$\bar{1},450436$	$\bar{2}_n816836$	$\bar{1}_n915964$	-0,824070	+0,174348	$\bar{1},241417$	$\bar{1},066998$	$\bar{2},308415$
+0,122391	$\bar{1}_n015068$	$\bar{1},087760$	$\bar{2}_n102828$	$\bar{1}_n927308$	-0,845878	-0,196156	$\bar{1}_n292601$	$\bar{1},429674$	$\bar{2},722275$
	$lR \cos \psi \sec \delta$		$0_n002365$				$l(R \sin \psi \sec \delta)^2$		$\bar{3},504831$
	$l \cos \delta$		$\bar{1},997685$				$lR \sin \psi \sec \delta$		$\bar{2},752416$
	$lR \cos \psi$		$0,000050$				$l \cos \delta$		$\bar{1},997685$
	$lR \sin \psi$		$\bar{2},750101$				$lR \sin \psi$		$\bar{2},750101$
	$l \tan \psi$		$\bar{2}_n750051$		$\psi 176^\circ 46' 51'', 73$				
	$l \cos \psi$		$\bar{1}_n999314$						
	lR		$0,000736$						

Les lR calculés doivent s'accorder avec les valeurs tirées des Éphémérides.

Contrôles particuliers :

$$lX\xi + l\xi:X = 2l\xi, \quad \dots,$$

$$\sum lYZ = 2lXYZ,$$

$$\sum \left(\frac{\eta}{Y} - \frac{\zeta}{Z} \right) = 0.$$

Si l'on ne tient pas à la vérification préparée par le double calcul de $R \cos \psi$ et $R \sin \psi$, il suffit de déduire $\sin \psi$ de $\cos \psi$ obtenu avec une décimale de plus par la formule

$$R \cos \psi \sec \delta = X\xi + Y\eta + Z\zeta.$$

Tâtonnements.

9922AnPar...23G...1C

$R \sin \psi$	2,846969	2,750101	$\bar{2},846969$	$\bar{2},750101$	$\bar{2},846969$	$\bar{2},750101$
la	0,448000	0,448000	0,446000	0,446000	0,446949	0,446949
$l \cos z$	$\bar{1},999864$	$\bar{1},999913$	$\bar{1},999863$	$\bar{1},999912$	$\bar{1},999863$	$\bar{1},999912$
$l \sin z = \frac{R \sin \psi}{a}$	$\bar{2},398969$	$\bar{2},302101$	$\bar{2},400969$	$\bar{2},304101$	$\bar{2},400020$	$\bar{2},303152$
z	1° 26' 9",40	1° 8' 55",75	1° 26' 33",26	1° 9' 14",85	1° 26' 21",93	1° 9' 5",78
ψ	175.58. 6,17	176.46.51,73	175.58. 6,17	176.46.51,73	175.58. 6,17	176.46.51,73
$\psi + z$	177.24.15,57	177.55.47,48	177.24.39,43	177.56. 6,58	177.24.28,10	177.55.57,51
$l \sin(\psi + z)$	$\bar{2},655979$	$\bar{2},557783$	$\bar{2},654870$	$\bar{2},556670$	$\bar{2},655397$	$\bar{2},557200$
$\cos \sin \psi$	1,153002	1,250635	1,153002	1,250635	1,153002	1,250635
ln	0,448000	0,448000	0,446000	0,446000	0,446949	0,446949
$l\Delta$	0,256981	0,256418	0,253872	0,253305	0,255348	0,254784
$lr \cos z$	0,447864	0,447913	0,445863	0,445912	0,446812	0,446861
$r \cos z$	2,80456	2,80487	2,79166	2,79198	2,79777	2,79809
$R \cos \psi$	-0,99746	-1,00012	-0,99746	-1,00012	-0,99746	-1,00012
Δ	1,80710	1,80475	1,79420	1,79186	1,80031	1,79797
$l\Delta$	0,256982	0,256417	0,253871	0,253304	0,255348	0,254783
$l \cos \delta$	$\bar{1},997066$	$\bar{1},997685$	$\bar{1},997066$	$\bar{1},997685$	$\bar{1},997066$	$\bar{1},997685$
$l\Delta \cos \delta$	0,254048	0,254102	0,250937	0,250989	0,252414	0,252468
$la^{\frac{3}{2}}$	0,672000		0,669000		0,670424	
lx	$\bar{2},788667$		$\bar{2},790714$		$\bar{2},789757$	
lxr	0,749030		0,747030		0,747979	
$l \sin \frac{v'' - v}{2}$	$\bar{2},039637$		$\bar{2},043684$		$\bar{2},041778$	
$\frac{v'' - v}{2}$	37' 39",81		38' 0",96		37' 50",97	
$l(t'' - t)$	0,777647		0,777647		0,777647	
$l \frac{k(t'' - t)}{2 \operatorname{arc} 1''}$	4,026624		4,026624		4,026624	
$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \frac{t'' - t}{2 \operatorname{arc} 1''}$	3,354624		3,357624		3,356200	
$\frac{v'' - v}{2}$	37' 42",68		37' 58",37		37' 50",91	

Coordonnées rectangulaires héliocentriques.

$la = 0,448.$

$\Delta \cos \delta \cos z.$	$\Delta'' \cos \delta'' \cos z''.$	$x + X.$	$X.$	$x.$	$x''.$	$x'' + X''.$	$X''.$	$x'' - x.$	$l(x'' - x).$
$0_n 239825$	$0_n 242036$	-1,737100	+0,978149	-2,715249	-2,699287	-1,745970	+0,953317	+0,015962	$\bar{2},203087$
$\bar{1}_n 655092$	$\bar{1}_n 620502$	-0,451952	+0,190437	-0,642389	-0,699473	-0,417352	+0,282121	-0,057084	$\bar{2}_n 756514$
$\bar{1}_n 320862$	$\bar{1}_n 269170$	-0,209345	+0,082615	-0,291960	-0,308247	-0,185853	+0,122394	-0,016287	$\bar{2}_n 211841$

$la = 0,446.$

$0_n 236714$	$0_n 238923$	-1,724700	+0,978149	-2,702849	-2,686817	-1,733500	+0,953317	+0,016032	$\bar{2},204988$
$\bar{1}_n 651981$	$\bar{1}_n 617389$	-0,448726	+0,190437	-0,639163	-0,696492	-0,414371	+0,282121	-0,057329	$\bar{2}_n 758374$
$\bar{1}_n 317751$	$\bar{1}_n 266057$	-0,207850	+0,082615	-0,290465	-0,306920	-0,184526	+0,122394	-0,016455	$\bar{2}_n 216298$

$la = 0,446949.$

$0_n 238191$	$0_n 240402$	-1,730580	+0,978149	-2,708729	-2,692727	-1,739410	+0,953317	+0,016002	$\bar{2},204174$
$\bar{1}_n 653458$	$\bar{1}_n 618868$	-0,450254	+0,190437	-0,640691	-0,697905	-0,415784	+0,282121	-0,057214	$\bar{2}_n 757502$
$\bar{1}_n 319228$	$\bar{1}_n 267536$	-0,208559	+0,082615	-0,291174	-0,307549	-0,185155	+0,122394	-0,016375	$\bar{2}_n 214181$

Constantes de Gauss.

$l_2 \sin \frac{v'' - v}{2}, \quad \bar{2},342808;$ $l_2 \cos \frac{v'' - v}{2}, \quad 0,301004.$

$x'' + x.$	$l(x'' + x).$	$l(x'' - x).$	$lr \sin \alpha \sin A'.$	$lr \sin \alpha \cos A'.$	$l \tan g A'.$	$A'.$	$lr \sin \alpha.$	$l \sin \alpha.$
-5,401456	$0_n 732511$	$\bar{2},204174$	$0_n 431507$	$\bar{1}_n 984822$	$\bar{1},861366$	$0_n 570141$	-74°56'23",1	0,446685
-1,338596	$0_n 126650$	$\bar{2}_n 717502$	$\bar{1}_n 825646$	$\bar{1}_n 986048$	$0_n 414694$	$\bar{1},410952$	194.26.43,9	0,428646
-0,598723	$\bar{1}_n 777226$	$\bar{2}_n 214181$	$\bar{1}_n 476222$	$\bar{1}_n 967384$	$\bar{1}_n 871373$	$\bar{1},604849$	201.55.43,0	$\bar{1},903989$

Éphéméride de EL pour les deux dates et avril 30-mai 8.

L'origine est au milieu des deux dates : Avril 1,44995

$\frac{7,44299}{8,89294} = 4,44647$

Le moy. m^t est $\frac{2(3,356200)}{(0,777647)} = 757'',850 = 12'37'',850.$

Le m^t, depuis l'origine jusqu'à avril 30,5, sera : 5°28'24",10
 m^t en 8 jours : 1°41'2",80. $\frac{40,6}{5^h 29' 4'',7} = 0,05353$ 26 jours.

A' + v.	l sin.	l x.	x.	X.	x + X.	l(x + X).	l cos z.	l Δ cos δ.	
-75.34.16,0	$\bar{1}_n 98608$	$0_n 43277$	-2,7088	+0,9781	-1,7307	$0_n 23823$	$\bar{1}_n 98578$	0,25245	
-74.18.34,2	$\bar{1}_n 98351$	$0_n 43020$	-2,6928	+0,9533	-1,7395	$0_n 24043$	$\bar{1}_n 98793$	0,25250	
-69.27.20,4	$\bar{1}_n 97146$	$0_n 41815$	-2,6191	+0,7678	-1,8513	$0_n 26748$	$\bar{1}_n 99378$	0,27370	
-67.46.17,6	$\bar{1}_n 96647$	$0_n 41316$	-2,5892	+0,6741	-1,9151	$0_n 28219$	$\bar{1}_n 99479$	0,28740	
B' + v.	l sin.	l y.	y.	Y.	y + Y.	l(y + Y).	l(x + X).	l tang z.	z.
193.48.53,0	$\bar{1}_n 37800$	$\bar{1}_n 80665$	-0,64070	+0,19044	-0,45026	$\bar{1}_n 65346$	$0_n 23823$	$\bar{1},41523$	194.34.57
195.4.34,8	$\bar{1}_n 41515$	$\bar{1}_n 84380$	-0,69791	+0,28212	-0,41579	$\bar{1}_n 61887$	$0_n 24043$	$\bar{1},37844$	193.26.34
199.55.48,6	$\bar{1}_n 53259$	$\bar{1}_n 96124$	-0,91462	+0,59906	-0,31556	$\bar{1}_n 49908$	$0_n 26748$	$\bar{1},23160$	189.40.24
201.36.51,4	$\bar{1}_n 56626$	$\bar{1}_n 99491$	-0,98835	+0,68988	-0,29847	$\bar{1}_n 47490$	$0_n 28219$	$\bar{1},19271$	188.51.23
C' + v.	l sin.	l z.	z.	Z.	z + Z.	l(z + Z).	l Δ cos δ.	l tang δ.	δ.
201.17.52,1	$\bar{1}_n 56017$	$\bar{1}_n 46416$	-0,29118	+0,08262	-0,20856	$\bar{1}_n 31923$	0,25245	$\bar{1}_n 06678$	-0.39.27
202.33.33,9	$\bar{1}_n 58393$	$\bar{1}_n 48792$	-0,30755	+0,12239	-0,18516	$\bar{1}_n 26755$	0,25250	$\bar{1}_n 01505$	-5.54.38
207.24.47,7	$\bar{1}_n 66314$	$\bar{1}_n 56713$	-0,36909	+0,25989	-0,10920	$\bar{1}_n 03822$	0,27370	$\bar{2}_n 76452$	-3.19.40
209.5.50,5	$\bar{1}_n 68690$	$\bar{1}_n 59089$	-0,38985	+0,29929	-0,09056	$\bar{2}_n 95694$	0,28740	$\bar{2}_n 66954$	-2.40.31

L'éphéméride Fabry (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 1032) donne :

Avril 30,5.....	$\alpha 12^h 38^m 23^s$	$\delta -3^{\circ} 16',7$
Mai 8,5.....	$12^h 34^m 46^s$	$-2^{\circ} 34',5$

Les corrections étaient - 10", + 1' vers le 15 mai, d'après Fabry.

Les corrections de l'éphéméride circulaire sont, pour les deux dates :

Avril 30,5.....	- 29"	+ 4'
Mai 8,5.....	- 50"	+ 7'

Quelques remarques sont à faire sur le calcul précédent d'une orbite circulaire, que l'on doit considérer comme une préparation fort utile au calcul de l'ellipse.

Il n'y a pas nécessité de prendre plus de cinq décimales. Les coordonnées du Soleil X, Y, Z se déduisent alors par une interpolation facile des éphémérides de la *Connaissance des Temps*.

Quand on ne tient pas à la vérification procurée par l'accord de $R \cos \psi$ et $R \sin \psi$, le plus simple paraît de déduire Δ de r par la formule

$$r^2 = \Delta^2 - 2\Delta \cdot R \cos \psi + R^2, \quad \text{d'où} \quad \Delta = R \cos \psi \pm \sqrt{R^2 \cos^2 \psi - R^2 \pm r^2};$$

il n'y a pas, en général, de difficulté pour le signe à choisir.

4. Le mode de calcul qu'on trouve indiqué dans l'Ouvrage d'Oppolzer, pour l'orbite circulaire, se distingue par une plus grande recherche dans les formules : il y a à effectuer, comme opération préliminaire, la transformation des ascensions droites et déclinaisons en longitudes et latitudes, et ce calcul demande, pour être contrôlé comme le propose Oppolzer, autant de travail que celui des coordonnées écliptiques (1).

Avec Klinkerfues, j'estime qu'il vaut mieux, pour la simplicité et l'uniformité, employer toujours les coordonnées rapportées à l'équateur, que nous fournissent aussitôt les observations, et auxquelles il faut toujours revenir lors de la comparaison du calcul et de l'observation.

Mais les indications données par Klinkerfues pour le calcul des constantes de Gauss ont besoin d'être complétées. On trouve dans l'exemple ci-dessus que les deux conditions $\Sigma \sin^2 a = 2$, $\Sigma \sin^2 a \cos 2A = 0$ sont bien vérifiées, mais non $\Sigma \sin^2 a \sin 2A = 0$. Les trois conditions sont vérifiées quand, ayant calculé les coordonnées rectangulaires $x, y, z; x'', y'', z''$ des deux lieux héliocentriques, ensuite

$$x^2 = \Sigma (x'' - x)^2, \quad 2(r^2 + r''^2) = \Sigma (x'' + x)^2 + x^2, \quad \sin 2\omega = \frac{\Sigma (x'' - x)(x'' + x)}{r^2 + r''^2},$$

(1) L'expérience montre que l'emploi des formules ordinaires

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin \lambda &= n \cos(N - \epsilon), & n, N, \text{ auxiliaires, calculées par les relations} \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \alpha \cos \delta, & n \sin N = \sin \delta, \\ \sin \beta &= n \sin(N - \epsilon), & n \cos N = \sin \alpha \cos \delta, \end{aligned}$$

combiné avec la formule de vérification

$$\cos \beta \sec \delta \frac{\sin \lambda}{\sin \alpha} = \cos(N - \epsilon) \sec N,$$

ne garantit pas contre les erreurs.

puis $\sin \frac{v'' - v}{2}$, d'après la relation de la page 19 :

$$\sin^2 \frac{v'' - v}{2} = \frac{x^2 - (r'' - r)}{4r'r''} = \frac{x^2 - (r + r'')^2 \tan^2 \omega}{(r + r'')^2 \cos^2 2\omega'}, \quad \text{où} \quad \sin 2\omega' = \tan \omega,$$

on déduit, comme on l'a dit page 19, les constantes de Gauss des relations

$$\frac{x''}{r''} - \frac{x}{r} = 2 \sin \frac{v'' - v}{2} \sin a \cos \left(A' + \frac{v + v''}{2} \right) = [x'' - x - \tan \omega (x'' + x)] \frac{1}{\frac{r + r''}{2} \cos^2 2\omega'},$$

$$\frac{x''}{r''} + \frac{x}{r} = 2 \cos \frac{v'' - v}{2} \sin a \sin \left(A' + \frac{v + v''}{2} \right) = [x'' + x - \tan \omega (x'' - x)] \frac{1}{\frac{r + r''}{2} \cos^2 2\omega'};$$

on constate facilement sur ces expressions que les contrôles sont vérifiés.

On calculera ainsi x^2 , $2(r^2 + r''^2)$, $\sin 2\omega$, ..., dans le cas d'une orbite parabolique et d'une orbite elliptique, afin de ne pas négliger les vérifications que comporte le calcul des éléments (*Cf.* p. 19). Pour une orbite circulaire, les éléments n'ont qu'une importance accessoire.

5. Arrivons aux orbites paraboliques. Il suffit de combiner la relation d'Euler-Lambert avec une autre équation de condition entre Δ , Δ' , soit l'une des deux relations de la page 11 (suivant que le mouvement apparent est plus grand en ascension droite ou en déclinaison, ou encore dans le cas d'une observation incomplète), soit de préférence la relation d'Olbers (p. 12).

On sait que le problème peut avoir une ou trois solutions étudiées en dernier lieu par le D^r E. Pasquier, auquel est due l'édition française de l'Ouvrage d'Oppolzer; mais il n'y a pas à insister ici sur cette discussion.

En principe, les équations de condition dépendent des quantités auxiliaires e et γ dont on a donné (p. 14) les expressions en séries procédant suivant les puissances de θ , θ' , θ'' , $\frac{r'' - r}{r'' + r}$. Dans une première approximation, on néglige certaines puissances de ces petites quantités, dont on tient compte dans les approximations suivantes. Il est facile de se convaincre de la nécessité d'avoir égard au moins aux termes du second degré en θ , θ' , θ'' . En effet, les relations fournies par la condition de l'orbite plane sont évidemment vérifiées si l'on fait $\theta' = 0$, $\Delta'' - \Delta = 0$; $\frac{\Delta'' + \Delta}{2}$ figure dans les relations avec un facteur comparable à θ' . Si l'on ne tenait compte que des termes comparables à θ' , il en résulterait donc pour $\frac{\Delta + \Delta'}{2}$ une erreur du premier ordre, et les éléments pourraient être entachés d'erreurs finies.

Oppolzer, dans son *Traité*, et plus récemment Gibbs (¹), ont donné le moyen de tenir compte, dès la première approximation, des termes du troisième ou même du quatrième ordre; mais il ne paraît pas que ces recherches, intéressantes pour la théorie, comportent de véritables avantages dans la pratique (²), et il vaut autant laisser de côté, pour commencer, les termes d'ordre supérieur au second; comme conséquence, les auxiliaires \mathfrak{A}' , \mathfrak{D}' et \mathfrak{R}' (p. 10) sont de simples constantes.

6. La relation d'Olbers (p. 12), si utile pour la détermination des orbites paraboliques, souffre un cas d'exception quand les coefficients de Δ et Δ'' sont nuls; alors on a

$$\cos \delta \operatorname{tang} \delta' \sin(\alpha - K) - \sin \delta \sin(\alpha' - K) = 0,$$

$$\cos \delta'' \operatorname{tang} \delta'' \sin(\alpha'' - K) - \sin \delta'' \sin(\alpha' - K) = 0,$$

et aussi

$$\operatorname{tang} \delta'(Y' - X' \operatorname{tang} K) - Z'(\sin \alpha' - \cos \alpha' \operatorname{tang} K) = 0;$$

on vérifie facilement que de ces trois relations résulte que les deux lieux géocentriques extrêmes de l'astre (α, δ) et (α'', δ'') se trouvent sur un même grand cercle avec le lieu intermédiaire du Soleil. Il est clair qu'on peut imaginer des observations d'un astre cadrant avec cette condition, qui donne lieu au cas d'exception. En particulier, cette circonstance se présente pour les comètes périodiques dont l'inclinaison est faible, qui ont été découvertes fréquemment dans les derniers temps.

Même alors, la relation d'Olbers n'est pas déstituée de toute utilité parce que, souvent, le rayon vecteur de la comète diffère peu du rayon de l'orbite terrestre, de sorte que $(E - e)$ est petit. La circonstance, signalée par Holetschek (³), que les découvertes ont souvent lieu dans le cas des comètes à grande distance périhélie, au voisinage de l'opposition, ce qui est la règle pour les petites planètes, dont on sait les affinités avec les comètes périodiques, affaiblit aussi l'erreur des suppositions.

Quoi qu'il en soit, il est nécessaire de préciser davantage dans le cas d'exception, afin de savoir si l'orbite parabolique suffit ou non. Il faut que la relation

(¹) La méthode de Gibbs se trouve exposée dans un Chapitre de la nouvelle édition du *Manuel de Klinkerfues*, revue et complétée par le D^r H. Buchholtz. Braunsweig, 1899.

(²) Consulter sur ce point le Travail plein de renseignements du D^r E. WEISS, *Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelkörpers*; 1893 (Extrait du Tome LX des *Denkschriften* de l'Académie des Sciences de Vienne).

(³) Voir aussi la Thèse de M. LOUIS FABRY, *Sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes*, IV^e Partie.

employée s'adapte spécialement au cas cité des comètes périodiques, comme celle d'Holmes, à orbite presque circulaire. Une relation susceptible de compléter celle d'Olbers s'obtient en multipliant les deux relations du haut de la page 12 par $\cos K$ et $\sin K$; il vient

$$\begin{aligned} 0 = & c\Delta [\cos\delta \operatorname{tang}\delta' \cos(\alpha - K) - \sin\delta \cos(\alpha' - K)] \\ & + c''\Delta'' [\cos\delta'' \operatorname{tang}\delta' \cos(\alpha'' - K) - \sin\delta'' \cos(\alpha' - K)] \\ & - (C - c)[(X'' - X) \operatorname{tang}\delta' \cos K + (Y'' - Y) \operatorname{tang}\delta' \sin K - (Z'' - Z) \cos(\alpha' - K)] \\ & + (E - e)k; \end{aligned}$$

on a posé

$$Y' \operatorname{tang}\delta' - Z' \sin\alpha' = k \sin K, \quad X' \operatorname{tang}\delta' - Z' \cos\alpha' = k \cos K.$$

La relation précédente s'écrit encore

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\cos\delta \operatorname{tang}\delta' \cos(\alpha - K) - \sin\delta \cos(\alpha' - K)}{\theta''} \left(1 + \gamma \frac{\theta'}{\theta}\right) \Delta \\ & + \frac{\cos\delta'' \operatorname{tang}\delta' \cos(\alpha'' - K) - \sin\delta'' \cos(\alpha' - K)}{\theta} \left(1 - \gamma \frac{\theta'}{\theta''}\right) \Delta'' \\ & - (C - c) \frac{\theta'}{\theta\theta''} [(X'' - X) \operatorname{tang}\delta' \cos K + (Y'' - Y) \operatorname{tang}\delta' \sin K - (Z'' - Z) \cos(\alpha' - K)] \\ & + 2 \frac{E - e}{\theta\theta''} \frac{k\theta'}{2}; \end{aligned}$$

l'écriture est abrégée quand on introduit la simplification de Legendre (p. 10), le terme en $(C - c)$ disparaît. Les équations (1), (2), (3) de la page 10 signifient que le vecteur $c'\Delta'$, orienté suivant le lieu géocentrique (α', δ') , est résultante géométrique des vecteurs $c\Delta$, $c''\Delta''$, suivant les lieux extrêmes, et du vecteur $(E - e)\mathcal{A}'$, dans une direction qui se confond avec le lieu du Soleil pour l'époque $\frac{t + t' + t''}{3}$, lorsqu'on emploie la simplification de Legendre. En projetant le contour polygonal sur une droite dans un plan perpendiculaire à (α', δ') , on élimine Δ' . Si l'on choisit cette droite en même temps perpendiculaire au lieu du Soleil, il reste une relation, celle d'Olbers, entre Δ et Δ'' .

A l'égard de la relation dite *complémentaire*, à employer dans le cas d'exception, on remarque que les coefficients de Δ , Δ'' , considérés comme fonctions de K , sont alors maximum ou minimum; ils ne sont pas influencés par les variations de K et ne peuvent être nuls à la fois. Il est facile de constater que si les coefficients de Δ , Δ'' , dans la relation d'Olbers et dans la relation complémentaire,

étaient à la fois nuls, on aurait $\alpha = \alpha' = \alpha''$; $\delta = \delta' = \delta''$. Donc si la relation d'Olbers fait défaut, la seconde écrite ci-dessus subsiste, telle que

$$A\Delta + B\Delta'' + C \frac{2(E-e)}{\theta\theta''} \theta' = 0 \quad \text{ou} \quad a \frac{\Delta + \Delta''}{2} + b \frac{\Delta'' - \Delta}{2\theta'} + c \frac{2(E-e)}{\theta\theta''} = 0.$$

Laisse-t-on de côté l'influence très faible des termes en γ , on peut écrire, en développant les cosinus de $\alpha - K$ et $\alpha'' - K$ remplacés par $\alpha - \alpha' + \alpha' - K$ et $\alpha'' - \alpha' + \alpha' - K$,

$$A \cos \delta' = \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\theta''} \cos(\alpha' - K) \cos(\alpha - \alpha') - \sin \delta' \cos \delta \sin(\alpha' - K) \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\theta''},$$

$$B \cos \delta' = \frac{\sin(\delta' - \delta'')}{\theta} \cos(\alpha' - K) \cos(\alpha'' - \alpha') - \sin \delta' \cos \delta'' \sin(\alpha' - K) \frac{\sin(\alpha'' - \alpha')}{\theta}.$$

Dans les cas d'exception où, comme on le constatera plus loin, il s'agit généralement de comètes périodiques, A et $-B$ diffèrent peu; $a:b$ est petit: la relation dite *complémentaire* se réduit à une relation entre $\frac{\Delta'' - \Delta}{2\theta'}$, $\Delta + \Delta''$ et $\frac{E-e}{\theta\theta''}$, où le coefficient de $\Delta + \Delta''$ est petit.

Il y a donc ici un changement de forme de la relation à combiner avec la relation d'Euler-Lambert. En fait, un doute subsistait sur ce changement de forme, puisque Oppolzer s'efforce, dans le cas d'exception, de conserver la relation d'Olbers, tandis que M. E. Weiss (Ouvrage cité, p. 19, 20) insiste sur ce que l'on doit avoir généralement dans le même cas une valeur petite pour $\frac{E-e}{\theta\theta''}$, conclusion qui n'est vérifiée que pour quelques-uns des nombres du Tableau ci-après.

Dans tous les cas, ayant commencé par le calcul de la relation d'Olbers, si celle-ci se montre inutilisable, la relation complémentaire s'obtiendra aisément. Dans $r + r'' = \sqrt{2(r^2 + r''^2)} \cos \omega$, on remplacera $r^2 + r''^2$ par sa valeur en $\Delta + \Delta''$ (p. 24) et $\cos \omega$ par l'unité, en négligeant les quantités du second ordre; e et $E - e$ ne dépendront que de la valeur supposée pour $\Delta + \Delta''$.

7. Il importe de juger la valeur des méthodes en prenant les cas qui se présentent effectivement.

Le Tableau suivant permet de se rendre compte, d'après les résultats de sept années, des circonstances des découvertes des comètes; les comètes dont le retour était prévu n'y figurent pas.

RELEVÉ, DE 1892 A 1900, D'APRÈS LES ÉPHÉMÉRIDES PROVISOIRES DES « ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN ».
CIRCONSTANCES DU MOUVEMENT APPARENT DES COMÈTES LORS DE LEUR DÉCOUVERTE.

Valeurs approchées des éléments T , $\log q$, $\log r$, $\log \Delta$.

Astre.	Date découverte.	Date éphém.	R.		Déclinaison.		T.	$\log q$.	$\log r$.	$\log \Delta$
			Δ_1 .	Δ_2 .	Δ_1 .	Δ_2 .				
1892 I....	Mars 6	Mars 29	+ 3.58 ^m 8 ^s	-0. 2 ^m 2 ^s	+1. 4' 0"	0'	Avril 6	0,01	0,02	0,02
1892 II....	Mars 18	Mars 30	+ 6.12	-0. 2	+0. 2	0	Mai 6	0,30	0,31	0,38
1892 III...	Nov. 6	Nov. 14	- 0.41	+0. 7	-0.12	0	Avril 20	0,23	0,49	0,35
1892 VI..	Août 28	Sept. 29	+ 2.58	+0. 2	-0.16	- 1	Déc. 28	1,99	0,25	0,22
1893 I....	92 Nov. 19	Nov. 29	+ 1.43	+0. 4	+0.37	+ 1	93 Janv. 7	0,08	0,13	0,17
*1893 II....	Juill. 8	Juill. 8	+39. 0	-2. 8	-0.17	-49	Juill. 7	1,83	1,83	1,61
1893 IV...	Oct. 16	Oct. 25	+ 1.28	+0. 2	+0.42	+ 1	Sept. 19	1,91	0,02	0,22
1894 I....	Mars 26	Avril 1	+ 3.13	-0. 5	-0.32	0	Fév. 13	0,08	0,15	1,74
*1894 II....	Avril 3	Avril 29	+13. 1	-0.31	+3.57	+ 6	Avril 13	1,99	0,01	1,54
1894 IV...	Nov. 20	Déc. 17	+ 2.42	-0. 2	+0.20	0	Oct. 19	0,18	0,25	0,10
*1895 III...	Nov. 21	Nov. 26	- 4.12	-0.21	+3.18	+16	Oct. 20	1,92	0,03	1,53
1895 IV...	Nov. 16	Nov. 17	+ 2. 8	+0. 6	-0.30	- 1	Déc. 18	1,29	1,97	0,20
*1896 I....	Fév. 15	Fév. 29	+25.56	-2. 3	+0.59	-26	Janv. 31	1,77	1,93	1,66
*1896 III...	Avril 13	Avril 28	- 4.34	-0.19	+2. 0	- 7	Avril 17	1,75	1,79	1,78
1896 IV...	Sept. 4	Sept. 4	+ 6.56	+ 0.2	-0. 4	- 1	Juill. 16	0,08	0,16	0,23
1896 Giac.	Sept. 4	Oct. 1	+ 2.39	+0. 2	-0. 8	+ 1	Oct. 17	0,22	0,22	0,16
1896 VII..	Déc. 8	Déc. 30	+ 5.33	-0. 8	-0. 9	+ 1	Nov. 25	0,08	0,09	1,58
1897 I....	96 Nov. 2	96 Nov. 6	- 1.32	+0. 5	-0.47	+ 1	97 Fév. 4	0,07	0,26	0,19
*1897 III...	Oct. 16	Oct. 29	-42. 8	+2.19	-0. 1	-17	Déc. 7	0,13	0,17	1,91
1898 I....	Mars 19	Avril 6	+ 4.33	+0. 3	+0.54	- 1	Mars 17	0,04	0,06	0,21
*1898 Giac.	Juin 18	Juill. 5	-12.31	+0.52	+0.48	- 1	Juill. 24	0,20	0,18	1,77
1898 Perr.	Juin 14	Juill. 1	+ 5.18	-0. 5	-0.31	- 1	Août 16	1,80	0,05	0,25
1898 VII..	Juin 11	Juill. 25	- 1.56	+0. 3	-0.17	0	Sept. 15	0,23	0,26	0,12
1898 IX...	Sept. 13	Nov. 3	+ 6.52	+0. 2	-1. 1	+ 2	Oct. 20	1,62	1,74	0,17
*1898 X....	Oct. 20	Oct. 22	+18.56	-2.16	-2.38	-10	Nov. 23	1,88	1,99	1,79
1898 VIII..	Nov. 14	Déc. 28	+ 0.44	+0. 1	+0.10	0	Sept. 21	0,36	0,41	0,28
*1899 a....	Mars 4	Mars 9	- 4.26	+0.12	+1.19	+ 2	Avril 13	1,51	1,98	1,93
1899 e....	Sept. 30	Oct. 1	+ 1.26	0. 0	+0.20	0	Sept. 14	0,25	0,25	0,32

Sur 28 \llcorner il y en a 9 pour lesquelles $\Delta_2 z > 10^5$ ou $\Delta_2 \delta > 5'$.

8. Remarquons d'abord que si le mouvement d'une comète est faible, il n'y a pas de difficulté à la suivre; on se trouve dans un cas analogue à celui des petites planètes: il faut attendre que l'arc de trajectoire ait une certaine étendue, quelques degrés, pour entreprendre un calcul utile.

Mais le Tableau contient, à peu près dans la proportion d'un tiers, des comètes à mouvement relativement fort, marquées d'un astérisque, pour lesquelles une simple extrapolation par parties proportionnelles, en partant de deux observations complètes, donnerait des résultats très douteux. Le Tableau montre toutefois que les différences secondes des coordonnées, bien que notables, sont petites relativement aux différences premières. Il en résulte que le rapport $\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta'' + \Delta}$, Δ et Δ'' étant les distances géocentriques pour deux jours consécutifs, est très petit.

En effet, des relations de la page 11 entre Δ et Δ'' , on déduit, les petits termes étant laissés de côté,

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \delta \sin^2(\alpha - \alpha') + \sin^2(\delta - \delta')}{\theta''^2}} \Delta - \sqrt{\frac{\cos^2 \delta'' \sin^2(\alpha'' - \alpha') + \sin^2(\delta'' - \delta')}{\theta^2}} \Delta'' = 0;$$

le coefficient de Δ représente la vitesse moyenne sur la trajectoire apparente entre le premier et le second lieu; le coefficient de Δ'' la vitesse entre le second et le troisième. Supposons que les dates t et t'' répondent à deux jours consécutifs dans une éphéméride; que $t' = \frac{t + t''}{2}$; que l'on remplace la trajectoire apparente sur la sphère par la tangente dans le voisinage de la portion considérée, il est clair que σ , σ' , σ'' étant les trois segments de la tangente comptés à partir d'un point arbitraire et répondant aux dates t , t' , t'' , on aura

$$\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta'' + \Delta} = \frac{\sigma + \sigma'' - 2\sigma'}{\sigma'' - \sigma},$$

c'est-à-dire un nombre comparable au quart du rapport de la différence seconde de l'éphéméride à la différence première. On est donc fondé à admettre, dans une première approximation, que le rapport $\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta'' + \Delta}$ déduit, en général, de la relation d'Olbers, est ici très petit. On arriverait au même résultat en partant des relations de la page 11.

Toutes choses égales d'ailleurs, la rapidité du mouvement de la comète assure la précision du rapport $\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta'' + \Delta}$; la méthode d'Olbers s'applique surtout à ce cas, que nous allons examiner.

9. Il y a lieu de transformer la relation d'Euler-Lambert.

Les relations de la page 24 s'écrivent

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2(r^2 + r'^2) = (\Delta + \Delta'' - R \cos \psi - R'' \cos \psi'')^2 + (\Delta'' - \Delta - R'' \cos \psi'' + R \cos \psi)^2 \\
 & \quad + 2(R^2 + R''^2) - 2(R^2 \cos^2 \psi + R''^2 \cos^2 \psi''), \\
 (2) \quad & r'^2 - r^2 = (\Delta + \Delta'' - R \cos \psi - R'' \cos \psi'')(\Delta'' - \Delta - R'' \cos \psi'' + R \cos \psi) \\
 & \quad + R''^2 - R^2 - R''^2 \cos^2 \psi'' + R^2 \cos^2 \psi; \\
 (3) \quad & \frac{x^2}{2\theta'^2} = \frac{f^2}{2\theta'^2} \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} - P \frac{g}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{2\theta'^2} \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{2} \right)^2 - \frac{2hgQ}{2\theta'^2} \frac{\Delta'' - \Delta}{2} + \frac{(1 - P^2)g^2}{2\theta'^2};
 \end{aligned}$$

$\frac{g}{f}$ est petit, puisque le mouvement géocentrique de la comète est fort.

La marche du calcul est celle-ci : on fait d'abord (1)

$$\frac{r + r''}{2} = \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} \right)^2 - (R \cos \psi + R'' \cos \psi'') \frac{\Delta + \Delta''}{2} + 1};$$

l'expression de x^2 étant réduite à celle d'un trinôme en $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$ par la connaissance du rapport $\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta'' + \Delta}$, on est amené à résoudre une équation de la forme indiquée page 25. Voici, comme exemple, quelques nombres qui se rapportent à la comète 1899 *a*, en admettant la condition $\Delta'' - \Delta = 0$:

$$R \cos \psi = 0,48095, \quad R'' \cos \psi'' = 0,50990, \quad a = 1,453, \quad b = 0,407, \quad c = 0,507.$$

Le calcul de $\frac{1}{r}$, au moyen de la Table, pour quelques valeurs de Δ et le calcul du trinôme permettent de former un Tableau comme celui-ci :

Δ .	$1 : r$.	Trinôme.	Résidus.
0,5	1,151	- 1,074	+ 0,077
0,6	1,143	- 1,274	- 0,131
0,7	1,120	- 1,504	

Ensuite on corrige (p. 25) la première valeur $\Delta_0 = 0,5$ qui devient $\Delta_0 + x$:

$$x = \frac{\text{résidu}}{2a\Delta_0 + b - \delta} = \frac{+ 0,077}{1,453 + 0,407 + 0,008} = 0,041.$$

(1) Le Tableau de la page 38 montre que le champ de variation de r est à peu près aussi étendu que celui de Δ ; de sorte que les essais peuvent porter aussi bien sur Δ que sur r .

En principe, il vaut mieux rapporter les longueurs r , Δ , g , $R \cos \psi$, ... à une longueur telle que $\sqrt{RR''}$ peu différente du rayon de la Terre; par suite de ce changement d'unité de longueur, $\theta'^2 = k^2(t'' - t)^2$, est à multiplier par le cube du rapport de l'ancienne unité à la nouvelle.

On part de la valeur trouvée $\Delta + \Delta''$ et de celle de $\Delta'' - \Delta$ qui s'en déduit par la relation d'Olbers, et l'on forme successivement

$$2(r^2 + r''^2), \quad r''^2 - r^2, \quad \sin 2\omega = \frac{r''^2 - r^2}{r^2 + r''^2},$$

$$\text{tang } \omega = \frac{\sin 2\omega}{1 + \cos 2\omega}, \quad \frac{r + r''}{2} = \sqrt{\frac{r^2 + r''^2}{2}} \cos \omega,$$

d'après les formules (1), (2) de ce numéro et les formules de la page 19; on calcule $\frac{x^2}{2\theta'^2}$ d'après $\frac{r + r''}{2}$, par la relation d'Euler-Lambert; de la valeur de l'expression (3) de $\frac{x^2}{2\theta'^2}$ on tire celle du premier terme $\frac{f^2}{2\theta'^2} \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} - P \frac{g}{f} \right)^2$, les autres étant calculés, ce qui conduit à une nouvelle valeur de $\Delta + \Delta''$, et ainsi de suite : c'est la méthode ordinaire des approximations successives.

On a réuni ci-dessous les résultats de calculs rapides pour les neuf comètes de la liste générale (p. 38) marquées d'un astérisque et analogues à la comète 1893 II (1) :

Astre.	Éphéméride.		Calcul approché.		Arc décrit.
	Δ	r	Δ	r	
* 1893 II.....	0,43	0,68	0,44	0,67	6,0
* 1894 II.....	0,34	1,04	0,31	1,03	5,0
* 1895 III.....	0,34	1,07	0,18	1,03	3,4
* 1896 I.....	0,45	0,85	0,52	0,86	4,2
* 1896 III.....	0,60	0,62	0,61	0,62	2,1
* 1897 III.....	0,80	1,54	0,78	1,51	1,7
* 1898 V.....	0,59	1,52	0,56	1,51	3,1
* 1898 X.....	0,61	0,97	0,61	0,97	3,8
* 1899 a.....	0,86	0,95	0,55	0,86	1,7

Pour sept des comètes, l'accord, particulièrement pour r , est frappant entre les résultats des calculs approchés et les nombres des éphémérides.

En poussant plus loin pour les deux autres la comparaison du calcul et des éphémérides, on obtient pour le logarithme de la distance périhélie q et l'époque T du passage au périhélie :

Astre.	Éphéméride.		Calcul approché.		Arc décrit.
	$l. q$	T	$l. q$	T	
* 1895 III...	$\bar{1},92$	Oct. 20	$\bar{1},94$	Oct. 28	3°,4
* 1899 a....	$\bar{1},51$	Avril 13	$\bar{1},66$	Avril 10	1°,7

Les écarts paraissent tenir à la petitesse de l'arc parcouru et à celle de la dis-

(1) Voir, dans les *Comptes rendus* du 5 février 1900, l'article publié à ce sujet, en collaboration avec M. G. Fayet.

tance périhélie et de la distance géocentrique; cependant on a des indications utiles sur les éléments des orbites des neuf comètes.

On sait quel intérêt les astronomes qui viennent de découvrir une comète attachent à publier presque en même temps les premiers renseignements sur son orbite, malgré leur incertitude inévitable. Ce qui précède montre que deux observations, en principe insuffisantes, peuvent, quand il s'agit d'astres ayant un mouvement géocentrique assez fort, guère inférieur à 2° par jour, conduire à des résultats encore assez approchés.

10. On revient au Tableau de la page 38 : il montre que, pour la moitié des comètes, le mouvement géocentrique est moindre que celui du Soleil. Toutefois la méthode d'Olbers souffre, en fait, une application assez large; on va le montrer en traitant un exemple voisin du cas d'exception : les calculs serviront de types pour l'application de la méthode d'Olbers et de la méthode à suivre dans le cas d'exception.

Quelques explications sont données ci-dessous sur les Tableaux numériques.

Le calcul des coordonnées X, Y, Z du Soleil, des auxiliaires g , G' et des coefficients de x^2 se fait d'après les formules des pages 7 et 8 et d'après les relations évidentes

$$\text{coeff.} \quad \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2}\right)^2 \dots f^2 = \sum (\cos \delta'' \cos \alpha'' - \cos \delta \cos \alpha)^2,$$

$$\text{coeff.} - 2 \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2}\right) \dots f g P = \sum (\cos \delta'' \cos \alpha'' - \cos \delta \cos \alpha) (X'' - X),$$

$$\text{coeff.} \quad \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{2}\right)^2 \dots h^2 = \sum (\cos \delta'' \cos \alpha'' + \cos \delta \cos \alpha)^2,$$

$$\text{coeff.} - 2 \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{2}\right) \dots h g Q = \sum (\cos \delta'' \cos \alpha'' + \cos \delta \cos \alpha) (X'' - X).$$

Comme vérification de ces coefficients, on calcule directement

$$x^2 = \sum (x'' - x)^2 \quad \text{ou} \quad x^2 : 2 \theta'^2,$$

en donnant à $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$ et $\frac{\Delta'' - \Delta}{2}$ des valeurs arbitraires, ici, telles que 1 et $\pm 0,1$; le résultat doit s'accorder avec ce que donne l'expression de x^2 en fonction de $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$ et $\frac{\Delta'' - \Delta}{2}$.

Dans les essais, la valeur de départ, soit A, est celle fournie par la Table auxiliaire, en prenant de préférence $\sqrt{RR'}$ comme unité de longueur, page 40. Après deux nouveaux essais ayant fourni de nouvelles valeurs A', A'' de $\Delta + \Delta''$, on forme

le Tableau des différences de A , A' , A'' , d'où résulte une nouvelle valeur corrigée :

$$\begin{array}{l} A, \\ A', \\ A'', \end{array} \quad \begin{array}{l} A' - A = \Delta A, \\ A'' - A' = \Delta A', \\ A'' - 2A' + A = \Delta^2 A, \end{array} \quad \text{valeur corrigée} = A'' - \frac{(\Delta A')^2}{\Delta^2 A};$$

les A sont exprimés en unités de la dernière décimale.

Ce résultat se justifie en remarquant que la relation qui permet de déduire A' de A étant écrite sous la forme

$$A' - A = f(A),$$

et $x = A + \varepsilon$ étant la vraie valeur, on doit avoir $f(x) = 0$. De

$$\begin{aligned} A' - A = f(A) &= f[x - (x - A)] = -f'(x)(x - A), \\ A'' - A' &= -f'(x)(x - A'), \end{aligned}$$

résulte

$$\frac{x - A'}{x - A} = \frac{A'' - A'}{A' - A}, \quad x = A'' - \frac{(\Delta A')^2}{\Delta^2 A}.$$

Si l'on a procédé au second essai en partant d'une valeur A'_1 , on trouve d'une manière analogue, A''_1 étant le résultat de l'essai,

$$x = A''_1 - \frac{(A''_1 - A'_1)(A'_1 - A)}{A''_1 - A'_1 - A'_1 + A}.$$

L'expérience montre que la convergence des approximations, surtout rapide pour les forts mouvements géocentriques, est suffisante pour les autres cas; mais on a tout avantage alors à partir d'une valeur assez approchée plutôt que d'essayer des suppositions arbitraires qu'il faudrait corriger ensuite.

Le calcul de q et T est effectué au moyen des relations suivantes, déduites de celles de la page 20,

$$\begin{aligned} \sin \omega' &= \tan \omega, & \sin^2 \frac{\nu'' - \nu}{2} &= \frac{x^2 - (r + r'')^2 \tan^2 \omega}{(r + r'')^2 \cos^2 \omega'}, \\ \sqrt{\frac{\frac{r + r''}{2} \cos^2 \omega'}{q}} \sin \frac{\nu + \nu''}{4} &= \frac{\cos \frac{\nu'' - \nu}{4}}{\cos \frac{\omega'}{2}} \frac{\tan \omega}{\sin \frac{\nu'' - \nu}{2}}, \\ \sqrt{\frac{\frac{r + r''}{2} \cos^2 \omega'}{q}} \cos \frac{\nu + \nu''}{4} &= \frac{\cos \frac{\omega'}{2}}{\cos \frac{\nu'' - \nu}{4}}. \end{aligned}$$

Aussitôt après le calcul de $\sin \frac{v''-v}{2}$ vient le calcul des constantes de Gauss, pour assurer les vérifications, puis celui de $q, T \dots$ du lieu moyen et des éléments conformément aux pages indiquées.

Comète Ed. Swift, 1894.

Dates 1894,		R app.	Réd. au jour.	Décl. app.	Réd. au jour.	α 1894,0.	α en angle.	δ 1894,0.	
Dates.	$l \sin \alpha.$	$l \cos \delta.$	$l \cos \alpha.$	$l \cos \delta \cos \alpha.$	$\cos \delta \cos \alpha.$	$l \cos \delta \sin \alpha.$	$\cos \delta \sin \alpha.$	$l \sin \delta.$	$\sin \delta.$
Nov. 22.....	$\bar{T}_n 613864$	$\bar{T}_n 989453$	$\bar{T}_n 959817$	$\bar{T}_n 949270$	0,889754	$\bar{T}_n 603317$	-0,401159	$\bar{T}_n 337930$	-0,217736
» 25.....	$\bar{T}_n 576598$	$\bar{T}_n 991038$	$\bar{T}_n 966669$	$\bar{T}_n 957707$	0,	$\bar{T}_n 567636$	-0,	$\bar{T}_n 303358$	-0,
» 29.....	$\bar{T}_n 516528$	$\bar{T}_n 993089$	$\bar{T}_n 975205$	$\bar{T}_n 968294$	0,929596	$\bar{T}_n 509617$	-0,323308	$\bar{T}_n 247940$	-0,176986
Nov. 22.	Nov. 25.	Nov. 29.							
Long. \odot	$240^\circ 36' 57'' 8$	$243^\circ 29' 35'' 2$	$247^\circ 37' 26'' 5$	$cs \delta'' cs \alpha'' -$	+0,039842		+0,077851		+0,040730
lR	$\bar{T}_n 994403$	$\bar{T}_n 994181$	$\bar{T}_n 993880$	$cs \delta'' cs \alpha'' +$	+1,819350		-0,724467		-0,394722

Coordonnées rectilignes du \odot (p. 8), $\epsilon. 23^\circ 27' 10'' 9, l \sin \epsilon \bar{T}_n 599880, l \cos \epsilon \bar{T}_n 962552.$

$l \cos L.$	$l \sin L.$	$l \sin L.$	$l \cos L'.$	$l \sin L'.$	$l \sin L'.$	$l \cos L''.$	$l \sin L''.$	$l \sin L''.$
$lR.$	$lR \cos \epsilon.$	$lR \sin \epsilon.$	$lR'.$	$lR' \cos \epsilon.$	$lR' \sin \epsilon.$	$lR''.$	$lR'' \cos \epsilon.$	$lR'' \sin \epsilon.$
$\bar{T}_n 690780$	$\bar{T}_n 940193$	$\bar{T}_n 940193$	$\bar{T}_n 649632$	$\bar{T}_n 951765$	$\bar{T}_n 951765$	$\bar{T}_n 580563$	$\bar{T}_n 966004$	$\bar{T}_n 966004$
$\bar{T}_n 994403$	$\bar{T}_n 956955$	$\bar{T}_n 594283$	$\bar{T}_n 994181$	$\bar{T}_n 956733$	$\bar{T}_n 594061$	$\bar{T}_n 993880$	$\bar{T}_n 956432$	$\bar{T}_n 593760$
$\bar{T}_n 685183$	$\bar{T}_n 897148$	$\bar{T}_n 534476$	$\bar{T}_n 643813$	$\bar{T}_n 908498$	$\bar{T}_n 545826$	$\bar{T}_n 574443$	$\bar{T}_n 922436$	$\bar{T}_n 559764$
X.	Y.	Z.	X'.	Y'.	Z'.	X''.	Y''.	Z''.
-0,484377.....	-0,789128	-0,342355	-0,440365	-0,810024	-0,351420	-0,375356	-0,836442	-0,362881

Calcul des auxiliaires et de $R \cos \psi, R'' \cos \psi''$ (p. 8, 42).

$l \frac{G}{R} \sin(G' - L).$	$\bar{T}_n 085864$	$l \lg(G' - L)$	$\bar{T}_n 148146$	$l \frac{G}{R}$	$\bar{T}_n 086959$	$lX \cos \delta \cos \alpha.$	$X \cos \delta \cos \alpha.$	$lX'' \cos \delta'' \cos \alpha''.$	$X'' \cos \delta'' \cos \alpha''.$
	$\bar{T}_n 998905$	$G' - L$	$94^\circ 4' 0'' 3$	lR	$\bar{T}_n 994403$	$\bar{T}_n 634453$	-0,430976	$\bar{T}_n 542737$	-0,348929
	$\bar{T}_n 850759$	L	$240^\circ 36' 57'' 8$	$l g$	$\bar{T}_n 081362$	$\bar{T}_n 500465$	0,316566	$\bar{T}_n 432053$	0,270429
$l \frac{G}{R} \cos(G' - L).$	$\bar{T}_n 937718$	G'	$334^\circ 40' 58'' 1$			$R \cos \psi$	-0,039867	$R'' \cos \psi''$	-0,014275
		$l(cs \delta'' \cos \alpha'' -).$	$l(X'' - X).$	$l(cs \delta'' \cos \alpha'' +).$	$l(cs \delta'' \cos \alpha'' -) \times (X'' - X).$	$l(cs \delta'' \cos \alpha'' -)^2.$	$\times (X'' - X).$	$l(cs \delta'' \cos \alpha'' +)^2.$	$X'' - X.$
$l \cos G' \dots$	$\bar{T}_n 956146$	$\bar{T}_n 600341$	$\bar{T}_n 037508$	0,259916	$\bar{T}_n 637849$	$\bar{T}_n 200682$	$\bar{T}_n 297424$	0,519832	+0,109021
$l \sin G' \cos \epsilon.$	$\bar{T}_n 593619$	$\bar{T}_n 891264$	$\bar{T}_n 674981$	$\bar{T}_n 860018$	$\bar{T}_n 566245$	$\bar{T}_n 782528$	$\bar{T}_n 534999$	$\bar{T}_n 720036$	-0,047314
$l \sin G' \sin \epsilon.$	$\bar{T}_n 230947$	$\bar{T}_n 610128$	$\bar{T}_n 312309$	$\bar{T}_n 596291$	$\bar{T}_n 922437$	$\bar{T}_n 220256$	$\bar{T}_n 908600$	$\bar{T}_n 192582$	-0,020526

Relation d'Olbers (p. 12).

	log.	Nombres.		log.	Nombres.		log.	Nombres.
Y'	1,908498		K	4° 38' 2",9		K	4° 38' 2",9	
tang δ'	1,312320		α - K	331° 5' 48",8		α" - K	336° 11' 18",4	
X'	1,643813		α' - K	333° 12' 14",8		α' - K	333° 12' 14",8	
Y' tang δ'	1,220818	0,166272	sin(α - K)	1,684244		sin(α" - K)	1,606091	
X' tang δ'	2,956133	0,090393	tang δ'	1,312320		tang δ'	1,312320	
sin α'	1,576598		cos δ	1,989453		cos δ"	1,993089	
Z'	1,545826		cos δ tang δ'	2,986017	0,0968316	cos δ" tang δ'	2,911500	0,0815642
cos α'	1,966669		× sin(α - K)	1,653997		× sin(α" - K)	1,653997	
Z' sin α'	1,122424	0,132564	sin(α' - K)	1,337930		sin(α' - K)	1,247940	
Z' cos α'	1,512495	-0,325458	sin δ	2,991927	0,0981583	sin δ"	2,901937	0,0797878
Y' tg δ' - Z' sn α'	2,527733	0,033708	sin δ sin(α' -)	3,122773	-0,0013267	sin δ" sin(α' -)	3,249541	0,0017764
X' tg δ' - Z' cs α'	1,618938	0,415851	coeff c Δ	0,610273	4,07636	coeff c' Δ'	0,453737	2,84274
lang K	2,908795		l' - l'	3,733046		l' - t	3,703278	
			coeff Δ			coeff Δ"		

Calcul des coefficients de x² (p. 8, 42) l₂ θ'², 2,452293.

	Nombres N.	log N - log 2 θ' ² .	N : 2 θ' ² .		Nombres.	log.	Nombres.
g ²	0,0145453	1,710431	0,513371	R" cs ψ" + Rcs ψ	-0,054142	2,733534	R" + R ² 1,946764
f ²	0,00930873	1,516598	0,328548	R" cs ψ" - Rcs ψ	+0,025592	2,408104	R" - R ² -0,002344
fgP	-0,00017622	3,793762	-0,006220	(R" cs ψ" +) ²		3,467068	2(R" sn ² ψ" + R ² sn ² ψ) 3,889942
h ²	3,99069	2,148755		(R" cs ψ" -) ²		4,816208	R" sn ² ψ" - R ² sn ² ψ. -0,000958
hgQ	0,240725	0,929228		(R" cs ψ" +) × (R" cs ψ" -)		3,141638	

Essais (p. 40, 41) l $\frac{\Delta' - \Delta}{\Delta' + \Delta}$ 2,534782.

	log.	Nombres.	log.	Nombres.	log.	Nombres.
Δ + Δ"	0,414973	2,6	0,413799	2,592974	0,414140	2,59502
Δ" - Δ	2,949755	0,089075	2,948581	0,088834	2,948922	0,088904
Δ + Δ"	0,423924	2,654142	0,422773	2,647116	0,423108	2,64916
Δ" - Δ -	2,802657	0,063483	2,801006	0,063242	2,801486	0,063312
(Δ + Δ") ²	0,847848	7,04447	0,845546	7,00722	0,846216	7,01804
(Δ" - Δ -) ²	3,605314	0,004030	3,602012	0,004000	3,602972	0,00401
(Δ" + Δ -)(Δ" - Δ -)	1,226581	0,168493	1,223779	0,167409	1,224594	0,167723
2(r ² + r' ²)	1,038956	10,938442	1,037472	10,90116	1,037904	10,91199
r' ² - r ²	1,224106	0,167535	1,221287	0,166451	1,222105	0,166765
sin 2 ω	2,486180		2,484845		2,485231	
l(1 + cos 2 ω)	0,300928		0,300929		0,300929	
tang ω	2,185252		2,183916		2,184302	
cos ω	- 51		- 51		- 51	
√2(r ² + r' ²)	0,519478		0,518736		0,518952	
r + r'	0,519427		0,518685		0,518901	
x ² : 2 θ' ²	1,781660	0,604867	1,782400	0,605899	1,782184	0,605597

Essais (p. 40, 41) (suite).

	log.	Nombres.	log.	Nombres.	log.	Nombres.
$A \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} - \frac{B}{A} \right)^2$	$\bar{1},407903$	$0,255801$	$\bar{1},409651$	$0,256833$	$\bar{1},409140$	$0,256531$
$\left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} - \frac{B}{A} \right)^2$	$\bar{1},714294$		$\bar{1},716042$		$\bar{1},715531$	
$\frac{\Delta + \Delta''}{2} - \frac{B}{A}$	$\bar{1},857147$	$0,719693$	$\bar{1},858021$	$0,721141$	$\bar{1},857766$	$0,720718$
$h^2 Q \frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta + \Delta''} : 2\theta'^2$	$\bar{1},464010$	$0,291079$				
$h^2 \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta + \Delta''} \right)^2 : 2\theta'^2$	$\bar{1},218319$	$0,165318$				
A coeff. $\left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} \right)^2$	$\bar{1},693609$	$0,493866$				
B coeff. $-2 \frac{\Delta + \Delta''}{2}$	$\bar{1},454630$	$0,284859$				
B : A	$\bar{1},761021$	$0,576794$				
B ² : A	$\bar{1},215651$	$0,164305$				
$g^2 : 2\theta'^2 - B^2 : A$		$0,349066$				

Coordonnées rectilignes (p. 7, 19, 34) $l\Delta''0,127740, l\Delta0,097972.$

$l\Delta \text{cs} \delta \text{cs} \alpha.$	$l\Delta'' \text{cs} \delta'' \text{cs} \alpha''.$	$x + X.$	$X.$	$x.$	$x''.$	$x'' + X''.$	$X''.$	$x'' - x.$	$x'' + x.$
$0,047242$	$0,096034$	$1,114916$	$-0,484377$	$1,599293$	$1,622836$	$1,247480$	$-0,375356$	$+0,023543$	$3,222129$
$\bar{1}_n701289$	$\bar{1}_n637357$	$-0,502677$	$-0,789128$	$0,286451$	$0,402575$	$-0,433867$	$-0,836442$	$+0,116124$	$0,689026$
$\bar{1}_n435902$	$\bar{1}_n375680$	$-0,272836$	$-0,342355$	$0,069519$	$0,125372$	$-0,237509$	$-0,362881$	$+0,055853$	$0,194891$

$\Sigma(x'' - x)^2 0,0171586, \Sigma(x'' + x)^2 10,8948, \Sigma(x'' - x)(x'' + x) 0,1667565, l \text{ tang} \omega \bar{2},184282, 2(r^2 + r''^2) 10,9120.$

$x + x''.$	$l \text{tg} \omega(x'' - x) \cdot \left(\frac{x''}{r''} + \right) \frac{r+r''}{2} \text{cs}^2.$	$x'' - x.$	$l \text{tg} \omega(x'' + x) \cdot \left(\frac{x''}{r''} - \right) \frac{r+r''}{2} \text{cs}^2.$	$l(x + x'').$	$l(x'' - x).$	$l \text{tg} \omega(x'' - x).$	$l \text{tg} \omega(x'' + x).$
$3,222129$	$0,000360$	$3,221769$	$0,023543$	$0,049252$	$-0,025709$	$0,508143$	$\bar{2},371862$
$0,689026$	$0,001775$	$0,687251$	$0,116124$	$0,010532$	$0,105592$	$\bar{1},838236$	$\bar{1},064922$
$0,194891$	$0,000854$	$0,194037$	$0,055853$	$0,002979$	$0,052874$	$\bar{1},289792$	$\bar{2},747047$

Calcul de $\frac{v'' - v}{2}, \frac{v'' + v}{2}, q, T$ (p. 43), $l \cos \omega' - 51, l \cos \frac{\omega'}{2} - 13.$

log.	Nombres.				
		$l() \text{sn} \frac{v + v''}{4}$	$\bar{1},620753$	v	$43^\circ 13' 37'',4$
$r + r''$	$0,518901$		$\bar{1},585797$	lM	$1,534999$
$\text{tang} \omega$	$\bar{2},184282$		$\bar{1},965104$	$lq^{\frac{3}{2}}$	$0,221786$
$(r + r'') \text{ tang} \omega$..	$\bar{2},703183$	$l() \text{cs} \frac{v + v''}{4}$	$0,000060$	$lMq^{\frac{3}{2}}$	$1,756785$
$(r + r'')^2 \text{ tang}^2 \omega$	$\bar{3},406366$	$l \text{tg} \frac{v + v''}{4}$	$\bar{1},620693$		$1,806443$
x^2		$\frac{v + v''}{4}$	$22^\circ 39' 44'',1$	$t - T$	$57,1196$
$x^2 - (r + r'')^2 \text{tg}^2 \omega$	$\bar{2},164638$	$\frac{v + v''}{2}$	$45^\circ 19' 28'',2$	t	$22,41351$
$\sqrt{\quad}$	$\bar{1},082319$	$\frac{v'' - v}{2}$	$2^\circ 5' 50'',77$		$64,0387$
$(r + r'') \cos \omega' \dots$	$0,518850$	$l()$	$0,034956$	$T \text{ sept.}$	$26,2939$
$\sin \frac{v'' - v}{2}$	$\bar{2},563469$	lq	$0,147857$		$26,2939$

Constantes de Gauss (p. 19, 34).

$$l_2 \sin \frac{v'' - v}{2} \bar{2},864499, \quad l_2 \cos \frac{v'' - v}{2} 0,300739, \quad l \frac{r' + r''}{2} \cos^2 \omega' 0,217769.$$

$l \left(\frac{x''}{r''} + \right) \frac{r' + r''}{2} \cos^2.$	$l \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn}(A' +).$	$l \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cs}(A' +).$	$l \left(\frac{x''}{r''} - \right) \frac{r' + r''}{2} \cos^2.$	$l \operatorname{tg}(A' +).$	$A' +.$	$l \operatorname{sn} \alpha.$	$A'.$
0,508095	$\bar{1},989587$	$\bar{1},989929$	$\bar{1}_n328159$	$\bar{1}_n327817$	$\bar{2}_n410085$	0,661770	102°17'30",7
$\bar{1},837116$	$\bar{1},318608$	$\bar{1},365245$	$\bar{1},988000$	$\bar{1},941363$	$\bar{1},023631$	$\bar{1},377245$	13°24'25",9
$\bar{1},287884$	$\bar{2},769376$	$\bar{1},124515$	$\bar{1},996113$	$\bar{1},640974$	$\bar{2},723242$	$\bar{1},128402$	7°39'17",1
							$\bar{1},999658$ 56°58' 2",5
							$\bar{1},953363$ -31°55' 2",3
							$\bar{1},644861$ -37°40'11",1

Éphéméride. Schéma. Lieu moyen.

$l.$	$t - T.$	$l M_2^{\frac{3}{2}}.$	$l M.$	$v.$	$\frac{v}{2}.$	$l \cos \frac{v}{2}.$	$l \cos^2 \frac{v}{2}.$	
$A' + v \dots$	$l \sin$	lx	x	X	$x + X$	$l(x + X)$	$l \cos \alpha$	$l \Delta \cos \delta$
$B' + v \dots$	"	ly	y	Y	$y + Y$	$l(y + Y)$	$l \operatorname{tang} \alpha$	$l \cos \delta$
$C' + v \dots$	"	lz	z	Z	$z + Z$	$l(z + Z)$	$l \Delta \cos \delta$	$l \operatorname{tang} \delta$
								z
								δ
								Δ
1894 nov. 25.	59,9623	1,777878	1,556092	44°58'53",5	22°29'26",8	$\bar{1},965645$	$\bar{1},931290$	
101°56'56",0	$\bar{1},990487$	0,206712	1,609578	-0,440365	1,169213	0,067894	$\bar{1},966733$	0,101161 337°51'33",5
+13° 3'51",2	$\bar{1},354191$	$\bar{1},524121$	0,334288	-0,810024	-0,475736	$\bar{1}_n677366$	$\bar{1}_n609472$	$\bar{1},991051$ -11°35'29",6
7°18'42",4	$\bar{1},104721$	$\bar{2},966149$	0,092502	-0,351420	-0,258918	$\bar{1}_n413163$	0,101161	$\bar{1}_n312002$ 0,110110

$$O - C : -1'15'',8; \quad -29'',7.$$

$$\text{Éléments (p. 18, 21)} \quad \varepsilon 23^\circ 27' 10'',9, \quad \frac{B' - C'}{2} 2^\circ 52' 34'',4, \quad \frac{B' + C'}{2} - 34^\circ 47' 36'',7.$$

$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	
$\sin c \dots \dots$	$\bar{1},644861$	$s + \varepsilon$	49°37'33",0	$\operatorname{tg} \frac{B' - C'}{2}$	$\bar{2},701065$	$\sin \left(\frac{B' + C'}{2} - \right)$	1,797848	$\varpi - \Omega$ 286°18'56",5
$\sin b \dots \dots$	$\bar{1},953363$	$s - \varepsilon$	2°43'11",2	$\frac{\operatorname{sn}(s + \varepsilon)}{\operatorname{sn}(s - \varepsilon)}$	1,205611	$\cos \left(\frac{B' + C'}{2} - \right)$	$\bar{1},891171$	A 130°39' 6",0
$\frac{\sin c}{\sin b} = \operatorname{tang} s$	$\bar{1},691498$	$\sin(s + \varepsilon)$	$\bar{1},881858$	$\operatorname{tg} \left(\frac{B' + C'}{2} - \right)$	$\bar{1},906676$	$\sin \frac{B' - C'}{2}$	$\bar{2},700517$	B 41°46' 1",2
$s \dots \dots \dots$	26°10'22",1	$\sin(s - \varepsilon)$	$\bar{2},676247$	$\frac{B' + C'}{2} - (\varpi - \Omega)$	38°53'26",8	$\cos \frac{B' - C'}{2}$	$\bar{1},999453$	C 36° 0'52",4

$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	$l.$	
$\sin A \dots \dots$	$\bar{1},880061$	$\sin \alpha$	$\bar{1},999658$	$\sin \alpha \sin A$	$\bar{1},879719$	$-\operatorname{tang} i$	$\bar{2}_n785679$	i 3°29'36",7
$\cos A \dots \dots$	$\bar{1}_n813887$	$\sin \alpha$	$\bar{1},999658$	$\sin \alpha \cos A$	$\bar{1}_n813545$	$\cos \Omega$	$\bar{1},879719$	Ω 40°42'15",7
$\sin B \dots \dots$	$\bar{1},823542$	$\sin b$	$\bar{1},953363$	$\sin b \sin B$	$\bar{1},776905$	$\sin \Omega \cos \varepsilon$	$\bar{1},776905$	
$\sin C \dots \dots$	$\bar{1},769371$	$\sin c$	$\bar{1},644861$	$\sin c \sin C$	$\bar{1},414232$	$\sin \Omega \sin i$	$\bar{2},599224$	
						$\sin \Omega \sin \varepsilon$	$\bar{1},414232$	

Cas d'exception (p. 36) pour la relation d'Olbers. — Relation complémentaire.

	log	Nombres.		log	Nombres.		log	Nombres.
Y'	1̄ _n 908498		K	4°38' 2",6		K	4°38' 2",9	
tang δ'	1̄ _n 312320		α - K	331° 5'48",8		α' - K	336°11'18",4	
X'	1̄ _n 643813		α' - K	333°12'14",8		α' - K	333°12'14",8	
Y' tang δ'	1̄,220818	0,166272	cos δ tang δ'	1̄ _n 301773		cos δ'' tang δ'	1̄ _n 305409	
X' tang δ'	2̄,956133	0,090393	sin (α - K)	1̄ _n 684244		sin (α' - K)	1̄ _n 606091	
sin α'	1̄ _n 576598		cos δ tang δ' sin (α -)	2̄,986017	0,0968316	cos δ'' tang δ' sin (α' -)	2̄,911500	
Z'	1̄ _n 545826		sin δ	1̄ _n 337930		sin δ''	1̄ _n 247940	
cos α'	1̄,966669		sin (α' - K)	1̄ _n 653997		sin (α' - K)	1̄ _n 653997	
Z' sin α'	1̄,122424	0,132564	sin δ sin (α' - K)	2̄,991927	0,0981583	sin δ'' sin (α' - K)	2̄,901937	
Z' cos α'	1̄ _n 512495	-0,325458	coeff. cΔ	3̄ _n 122773	-0,0013267	coeff. c''Δ''	3̄,249541	
Y' tang δ' - Z' sin α'	2̄,527733	0,033708	coeff. cΔ : θ''	2̄ _n 433455		coeff. c''Δ'' : θ	2̄,403687	
X' tang δ' - Z' cos α'	1̄,618938	0,415851	cos δ tang δ'	1̄ _n 301773		cos δ'' tang δ'	1̄ _n 305409	
tang K	2̄,908795		cos (α - K)	1̄,942226		cos (α' - K)	1,961364	
sin K	2̄,907372		cos δ tang δ' cos (α -)	1̄ _n 243999	-0,175388	cos δ'' tang δ' cos (α' -)	1̄ _n 266773	
cos K	1̄,998578		sin δ	1̄ _n 337930		sin δ''	1̄ _n 247940	
k	1̄,620360		cos (α' - K)	1̄,950666		cos (α' - K)	1̄,950666	
θ	2̄,845854		sin δ cos (α' - K)	1̄ _n 288596	-0,194355	sin δ'' cos (α' - K)	1̄ _n 198606	
θ'	1̄,075631		coeff. cΔ	2̄,277999	+0,018967	coeff. c''Δ''	2̄ _n 428928	
θ''	2̄,689318		coeff. cΔ : θ''	1̄,588681	0,387865	coeff. c''Δ'' : θ	1̄ _n 583074	
X'' - X	1̄,037508		Y'' - Y	2̄ _n 674981		Z'' - Z	2̄ _n 312309	
tang δ''	1̄ _n 312320		tang δ'	1̄ _n 312320		-cos (α' - K)	1̄ _n 950666	
cos K	1̄,998578		sin K	2̄,907372				
(X'' - X) tang δ' cos K	2̄ _n 348406		(Y'' - Y) tang δ' sin K	4̄,894673		-(Z'' - Z) cos (α' - K)	2̄,262975	

Relation complémentaire simplifiée (p. 36).

$$\begin{aligned}
 & \frac{+0,387865}{\theta'} \Delta - \frac{0,382890}{\theta'} \Delta'' + k \frac{E - e}{\theta \theta''} = 0, \\
 & \frac{+0,004975}{\theta'} \frac{\Delta + \Delta''}{2} - \frac{0,770755}{2\theta'} \frac{\Delta'' - \Delta}{\theta''} + k \frac{E - e}{\theta \theta''} = 0, \\
 & \frac{\Delta'' - \Delta}{\theta'} = (2,734245)(\Delta + \Delta'') + \frac{1,733443}{RR'R''} \left[1 - RR'R'' : \left(\frac{r+r''}{2} \right)^3 \right].
 \end{aligned}$$

Essais (p. 37). — 1 : RR'R'', 1,041205.

	log.	Nombres.	log.	Nombres.	log.	Nombres.	log.	Nombres.
Δ + Δ''	0,414973	2,6	0,382668	2,413614	0,396896	2,494000	0,395171	2,484111
1 : (r+r'') ³	1̄,344897	0,221257	1̄,404410	0,253752	1̄,378607	0,239115	1̄,381770	0,240863
2/θθ'' (E - e)	1̄,913786	0,819948	1̄,896225	0,787453	1̄,904223	0,802090	1̄,903276	0,800342
terme (E - e)	1̄,647229	0,443843	1̄,629668	0,426254	1̄,637666	0,434176	1̄,636719	0,433230
terme (Δ + Δ'')	1̄,149218	0,141000	1̄,116913	0,130892	1̄,131141	0,135251	1̄,129416	0,134715
Δ'' - Δ / θ'	1̄,767039	0,584843	1̄,745969	0,557146	1̄,755438	0,569427	1̄,754306	0,567945

DES ORBITES DES COMÈTES ET DES PLANÈTES.

	log.	Nombres.	log.	Nombres.	log.	Nombres.	log.	Nombres.
$\Delta'' - \Delta$	$\bar{2},842670$	$0,069610$	$\bar{2},821600$	$0,066313$	$\bar{2},831069$	$0,067775$	$\bar{2},829937$	$0,067599$
$\Delta + \Delta''$	$0,423924$	$2,654142$	$0,392302$	$2,467756$	$0,406224$	$2,548142$	$0,404535$	$2,538253$
$\Delta'' - \Delta$	$\bar{2},643630$	$0,044018$	$\bar{2},609818$	$0,040721$	$\bar{2},625137$	$0,042183$	$\bar{2},623322$	$0,042007$
$(\Delta + \Delta'' -)^2$	$0,847848$	$7,04447$	$0,784604$	$6,08981$	$0,812448$	$6,49304$	$0,809070$	$6,44273$
$(\Delta'' - \Delta -)^2$	$\bar{3},287260$	$0,001938$	$\bar{3},219636$	$0,001658$	$\bar{3},250274$	$0,001779$	$\bar{3},246644$	$0,001765$
$(\Delta + \Delta'' -)(\Delta'' - \Delta -)$	$\bar{1},067554$	$0,116830$	$\bar{1},002120$	$1,000489$	$\bar{1},031361$	$0,107488$	$\bar{1},027857$	$0,106625$
$2(r^2 + r''^2)$	$1,038873$	$10,93635$	$0,999192$	$9,981410$	$1,016397$	$10,384761$	$1,014286$	$10,334437$
$r''^2 - r^2$	$\bar{1},063978$	$0,115872$	$\bar{2},997958$	$0,099531$	$\bar{1},027472$	$0,106530$	$\bar{1},023940$	$0,105667$
$\sin 2\omega$	$\bar{2},326135$		$\bar{2},299796$		$\bar{2},312105$		$\bar{2} 310684$	
$l(1 + \cos 2\omega)$	$0,300982$		$0,300987$		$0,300985$		$0,300985$	
$\text{tang } \omega$	$\bar{2},025153$		$\bar{3},998809$		$\bar{2},011120$		$\bar{2},009699$	
$\cos \omega$	-24		-22		-23		-23	
$\sqrt{2(r^2 + r''^2)}$	$0,519437$		$0,499596$		$0,508199$		$0,507143$	
$r + r''$	$0,519413$		$0,499574$		$0,508176$		$0,507120$	
$x^2 : 2\theta'^2$	$\bar{1},781672$	$0,604884$	$\bar{1},801522$	$0,633173$	$\bar{1},792916$	$0,620749$	$\bar{1},793972$	$0,622260$
$A \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} - \frac{B}{A} \right)^2$..	$\bar{1},312781$	$0,205485$	$\bar{1},377518$	$0,238516$	$\bar{1},350378$	$0,224067$	$\bar{1},353782$	$0,225830$
$\left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} - \frac{B}{A} \right)^2$..	$\bar{1},679810$		$\bar{1},739160$		$\bar{1},714328$		$\bar{1},717446$	
$\frac{\Delta + \Delta''}{2} - \frac{B}{A}$	$\bar{1},839905$	$0,691680$	$\bar{1},869580$	$0,740593$	$\bar{1},857164$	$0,719720$	$\bar{1},858723$	$0,722308$
$(\Delta'' - \Delta) : (\Delta + \Delta'')$	$\bar{2},427697$		$\bar{2},438932$		$\bar{2},434173$		$\bar{2},434766$	
$[(\Delta'' - \Delta) : (\Delta + \Delta'')]^2$	$\bar{4},855394$		$\bar{4},877864$		$\bar{4},868346$		$\bar{4},869532$	
$h g Q \frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta + \Delta''} : 2\theta'^2$..	$\bar{1},356925$	$0,227471$	$\bar{1},368160$	$0,233431$	$\bar{1},363401$	$0,230888$	$\bar{1},363994$	$0,231203$
$h^2 \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta + \Delta''} \right)^2 : 2\theta'^2$..	$\bar{1},004149$	$0,100960$	$\bar{1},026619$	$0,106321$	$\bar{1},017101$	$0,104016$	$\bar{1},018287$	$0,104301$
A coeff. $\left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} \right)^2$..	$\bar{1},632971$	$0,429508$	$\bar{1},638358$	$0,434869$	$\bar{1},636050$	$0,432564$	$\bar{1},636336$	$0,432849$
B coeff. $-2 \frac{\Delta + \Delta''}{2}$..	$\bar{1},344885$	$0,221251$	$\bar{1},356429$	$0,227211$	$\bar{1},351541$	$0,224668$	$\bar{1},352150$	$0,224983$
B : A.....	$\bar{1},711914$	$0,515127$	$\bar{1},718071$	$0,522481$	$\bar{1},715491$	$0,519387$	$\bar{1},715814$	$0,519773$
B ² : A.....	$\bar{1},056799$	$0,113972$	$\bar{1},074500$	$0,118714$	$\bar{1},067032$	$0,116689$	$\bar{1},067964$	$0,116941$
$g^2 : 2\theta'^2 - B^2 : A$		$0,399399$		$0,394657$		$0,396682$		$0,396430$

Après les deux premiers essais, on calcule la correction; on poursuit avec 2,494, ensuite avec une nouvelle valeur corrigée : 2,484111 qui conduit à 2,484162. Du Tableau ci-dessous des différences résulte la solution

2,494000			
2,478214	-15786		
		+15837	$x = A_1 - \frac{51.5948}{15837} = A_1 - 19$
2,484111			
2,484162	+51		
$\Delta + \Delta'' = 2,484143$		$\Delta'' - \Delta = 0,067600$	

La vérification de ces nombres fournit

$$l(r + r'') = 0,507124, \quad l x^2 : 2\theta'^2 = \bar{1},793968, \quad x^2 : 2\theta'^2 = 0,622254.$$

XXIII.

Coordonnées rectilignes (p. 7, 19, 34), $l\Delta$ 0,082165, $l\Delta'$ 0,105807.

$l\Delta \cos \delta \cos \alpha.$	$x + X.$	$X.$	$x.$	$x''.$	$l\Delta' \cos \delta' \cos \alpha.$	$x'' + X''.$	$X''.$	$x'' - x.$	$x'' + x.$
0,031435	1,075066	-0,484377	1,559443	1,561400	0,074101	1,186044	-0,375356	0,001957	3,120843
$\bar{I}_n 685482$	-0,484710	-0,789128	0,304418	0,423942	$\bar{I}_n 615424$	-0,412500	-0,836442	0,119524	0,728360
$\bar{I}_n 420095$	-0,263084	-0,342355	0,079271	0,137069	$\bar{I}_n 353747$	-0,225812	-0,362881	0,057798	0,216340

$\Sigma (x'' - x)^2$ 0,0176304 $\Sigma (x'' + x)^2$ 10,31697 $\Sigma (x'' - x)(x'' + x)$ 0,105668 $l \text{ tang } \omega \bar{2},009695$ $2(r^2 + r''^2)$ 10,33460

$x + x''.$	$\text{tang } \omega (x'' - x).$	$\left(\frac{x''}{r''} + \frac{r+r''}{2}\right) \cos^2.$	$x'' - x.$	$\text{tang } \omega (x'' + x).$	$\left(\frac{x''}{r''} - \frac{r+r''}{2}\right) \cos^2.$	$l(x + x'').$	$l(x'' - x).$	$l \text{ tang } \omega (x'' - x).$	$l \text{ tang } \omega (x'' + x).$
3,120843	0,000020	3,120823	0,001957	0,031913	-0,029956	0,494272	3,291591	3,301286	2,503967
0,728360	0,001222	0,727138	0,119524	0,007448	0,112076	$\bar{I},862346$	$\bar{I},077455$	$\bar{3},087150$	$\bar{3},872041$
0,212340	0,200591	0,215749	0,057798	0,002212	0,055586	$\bar{I},335137$	$\bar{2},761913$	$\bar{4},771608$	$\bar{3},344832$

Calcul de $\frac{v'' - v}{2}$, $\frac{v'' + v}{2}$, q , T (p. 43), $l \cos \omega' - 23$, $l \cos \frac{\omega'}{2} - 6$.

log.	Nombres.						
		$l(\sin \frac{v'' + v''}{4})$	$\bar{I},407317$	v	$26^\circ 21' 41'', 1$	$30^\circ 56' 55'', 7$	
$r + r''$	0,507124		$\bar{I},393513$	$l.M$	1,292375	1,368124	
$\text{tang } \omega$	$\bar{2},009695$		$\bar{I},986277$	$lq^{\frac{3}{2}}$	0,267660	0,267660	
$(r + r'') \text{ tang } \omega$	$\bar{2},516819$	$l(\cos \frac{v'' + v''}{4})$	81	$lMq^{\frac{3}{2}}$	1,560035	1,635784	
$(r + r'')^2 \text{ tang}^2 \omega$	$\bar{3},033638$	$l \text{ tang } \frac{v'' + v''}{4}$	$\bar{I},407236$				
x^2		$\frac{v'' + v''}{4}$	$14^\circ 19' 39'', 2$	$t - T$	36,3108	43,2299	
$x^2 - (r + r'')^2 \text{ tang}^2 \omega$	$\bar{2},218795$	$\frac{v'' + v''}{2}$	$28.39.18,4$	t	22,41351	29,33261	
$\sqrt{\quad}$	$\bar{I},109398$	$\frac{v'' - v''}{2}$	$2.17.37,3$				
$(r + r'') \cos \omega'$	0,507101	$l(\quad)$	0,013804	T Oct.	17,1027	17,1027	
$\sin \frac{v'' - v''}{2}$	$\bar{2},602297$	lq	0,178440				

Constantes de Gauss (p. 19, 34).

$l.2 \sin \frac{v'' - v''}{2} \bar{2},903327,$ $l_2 \cos \frac{v'' - v''}{2} 0,300682.$ $l \frac{r + r''}{2} \cos^2 \omega' 0,206048.$

$l\left(\frac{x''}{r''} + \frac{r+r''}{2}\right) \cos^2.$	$l \sin \alpha \sin (A' +$		$l \sin \alpha \cos (A' +$	$l\left(\frac{x''}{r''} - \frac{r+r''}{2}\right) \cos^2.$	$l \text{ tang } (A' +$	$A' +$	$l \sin \alpha.$	$A'.$	
0,494269	$\bar{I},987539$	$\bar{I},987874$	$\bar{I}_n 367444$	$\bar{I}_n 367109$	$\bar{2}_n 476484$	0,620430	$103^\circ 28' 35'', 6$	$\bar{I},999665$	$74^\circ 49' 17'', 2$
$\bar{I},861617$	$\bar{I},354887$	$\bar{I},400560$	$\bar{I},985810$	$\bar{I},940137$	$\bar{I},049512$	$\bar{I},414750$	$14.34.1,4$	$\bar{I},954327$	$-14.5.17,0$
$\bar{I},333949$	$\bar{2},827219$	$\bar{I},186443$	$\bar{I},994814$	$\bar{I},635590$	$\bar{2},744965$	$\bar{I},191629$	$8.50.12,0$	$\bar{I},640776$	$-19.49.6,4$

Lieu moyen (p. 47).

1894 nov. 25.....	39,1535	1,592771	1,325111	$28^\circ 16' 7'', 9$	$14^\circ 8' 4'', 0$	$\bar{I},986649$	$\bar{I},973298$		
$103^\circ 5' 25'', 1$	$\bar{I},988565$	0,193372	1,560889	-0,440365	1,120524	$\bar{I},966676$	0,082745	$337^\circ 50' 26'', 5$	
14.10.50,9	$\bar{I},389135$	$\bar{I},548604$	0,353675	-0,810024	-0,456349	$\bar{I}_n 659297$	$\bar{I}_n 609876$	$\bar{I},991038$	$-11^\circ 36' 0'', 6$
8.27.1,5	$\bar{I},167180$	$\bar{I},013098$	0,103062	-0,351420	-0,248358	$\bar{I}_n 395078$	0,082745	$\bar{I}_n 312333$	0,091707
	O - C		-8'', 8		+1'', 3				

Dans les calculs relatifs au cas d'exception, les essais auraient été réduits de moitié par l'emploi de la Table auxiliaire ci-après qui, lorsque l'on remplace dans le crochet de la relation complémentaire (p. 48) $RR'R''$ par $(RR'')^{\frac{3}{2}}$ donne $\log \frac{\sqrt{RR''}}{\frac{\Delta + \Delta''}{2}} \left[1 - \frac{(RR'')^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{r' + r''}{2}\right)^3} \right]$, permet de calculer les valeurs du rapport $(\Delta'' - \Delta) : (\Delta + \Delta'')$ avec l'argument $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$ et fournit une valeur de départ voisine de 1,24. D'après la note de la page 40, il suffira, en gardant les coefficients de $\kappa^2 : 2\theta'^2$ et ceux de la relation complémentaire déjà calculés, de multiplier par $1 : \sqrt{RR''}$ les valeurs de $1 : r$ tirées de la Table auxiliaire, ainsi que le crochet de la relation citée, et de multiplier ensuite par $\sqrt{RR''}$, pour la ramener à l'unité primitive, la valeur de $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$ vérifiant la relation d'Euler-Lambert.

11. La ressemblance des éléments avec ceux d'une autre comète, l'apparence seule de la nébulosité, d'après M. Barnard (*Astronomical Journal*, n° 246), permettent de soupçonner les comètes périodiques. La théorie de la capture conduit d'autre part à supposer que la comète a dû passer près de l'orbite d'une grande planète, d'où résulte une valeur approchée du grand axe. C'est ce qu'a fait M. Schulhof, en particulier pour la comète Swift-De Vico (*Comptes rendus*, t. CXIX, p. 939). Le problème de la détermination de l'orbite d'une comète périodique de grand axe donné se traitera, en utilisant les Tables de Marth, exactement par les mêmes méthodes.

Pour terminer ce Chapitre, une remarque sur la manière d'aborder la solution des deux équations simultanées fournies par la relation d'Euler-Lambert et la relation d'Olbers (ou celle qui la remplace). On voit que, conformément à la marche suivie par les astronomes, on a profité de ce que la seconde relation donnait $\Delta'' - \Delta$ en fonction de $\Delta + \Delta''$ pour faire porter les essais sur la seule inconnue $\Delta + \Delta''$; c'est ce qu'il y a de plus simple pour l'application.

Toutefois l'idée est naturelle de faire jouer à la relation d'Euler-Lambert le rôle essentiel, en procédant par lieux géométriques et imitant ce qui a été fait dans les dernières années avec les cercles de hauteur pour les nouvelles méthodes de navigation. La relation dont il s'agit, développée suivant les premières puissances des corrections de $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$, $\frac{\Delta'' - \Delta}{2}$, représente une série d'ellipses homothétiques et concentriques; les corrections s'expriment d'une manière fort simple en fonction d'un paramètre variable qu'on détermine au moyen de la seconde condition. Mais l'expérience montre que cette manière de procéder par corrections différentielles n'a pas d'avantages. Des essais ont été tentés déjà il y

a longtemps. Citons le § 158 de l'Ouvrage de Lambert : *Insigniores...*, et une Note de Klinkerfues : *Ueber die Auflösung der Lambert'schen Gleichung für parabolische Bewegung* (Copernicus, t. I, p. 5).

CHAPITRE III.

MÉTHODES DIRECTES.

1. Le propre des méthodes appelées *directes* est de tout tirer de la seule circonstance que les observations sont peu distantes entre elles, sans chercher à utiliser des considérations particulières plus ou moins justifiées.

En fait, les astronomes supposent *a priori* que l'orbite d'une comète est parabolique, et ils obtiennent ainsi des résultats plus exacts que s'ils n'avaient fait aucune supposition sur la nature de l'orbite : l'excentricité se trouve dès l'abord généralement mieux déterminée qu'on ne pourrait l'espérer autrement.

D'autre part, on a indiqué les services que le calcul d'une orbite circulaire peut rendre dans le cas des petites planètes.

Mais les deux suppositions dont il s'agit peuvent être en défaut et il y a alors à considérer le problème général : *Déterminer l'orbite d'un astre sans aucune hypothèse, d'après des observations n'embrassant pas un intervalle trop grand ni même choisi pour qu'elles puissent souffrir l'application de méthodes spéciales* (*Theoria motûs*. Préface).

2. Lambert a donné, dans le Volume de l'Académie de Berlin pour 1771, des *Observations sur l'orbite apparente des comètes*, desquelles résulte un moyen très ingénieux pour trouver directement la distance de l'astre au Soleil dans la seconde observation, d'après la courbure de la trajectoire apparente. Il est digne de remarque que l'équation donnée par Gauss, dans le *Theoria motûs*, revient à celle de Lambert; on l'a constaté à plusieurs reprises (1). D'autre part, la méthode de Gauss, en première approximation, ne diffère que par la forme de celle de Laplace (2) et de toutes celles qui s'y rattachent. On est donc fondé à regarder Lambert comme l'initiateur des méthodes directes.

La remarque de Lambert suppose, bien entendu, que les observations soient

(1) KLINKERFUES, *Theoretische Astronomie*, p. 168. — H. BRUNS, *Astr. Nach.*, n° 2824.

(2) Cf. Préface de M. H. Poincaré aux *Leçons sur la détermination des orbites* de Tisserand, publiées par J. Perchot. Paris, 1899.

assez précises pour que la courbure de la trajectoire puisse être déterminée. Olbers (*Abhandlung*, § 15) lui dénie toute utilité, déclare que ni Pingré, ni lui n'ont rien pu en tirer; mais il a soin d'ajouter qu'elle suppose une certaine précision de la part des observations; et c'est ce que Gauss admet dans la Préface du *Theoria motûs*, quand il dit « qu'on peut, maintenant, déterminer l'orbite d'un astre à l'aide de *bonnes observations* embrassant seulement un petit nombre de jours ».

Nous allons montrer, à l'aide d'exemples numériques, que si l'on prend comme positions observées d'une petite planète une suite de positions calculées d'après une éphéméride, ce qui constituera de *bonnes observations*, ces positions, dans un intervalle d'une dizaine de jours, se trouvent appartenir, à fort peu près, à un même petit cercle de la sphère; ensuite sera exposé le calcul d'une orbite moyennant la connaissance du petit cercle, passant par trois positions apparentes, avec l'application à une planète, pour prouver que, dans le cas de ces observations fictives, une certaine approximation peut être obtenue, même avec un petit intervalle de temps.

3. Soient α_0 , δ_0 l'ascension droite et la déclinaison du pôle du petit cercle d'ouverture ν , qui est censé passer par les positions (α, δ) de l'astre; on a une série d'équations de condition telles que

$$\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0} = \sin \delta + \cos \delta \cos \alpha \cot \delta_0 \cos \alpha_0 + \cos \delta \sin \alpha \cot \delta_0 \sin \alpha_0, \quad \cos \nu > 0,$$

linéaires par rapport aux inconnues $\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0}$, $\cot \delta_0 \cos \alpha_0$, $\cot \delta_0 \sin \alpha_0$. On retranche de chacune des équations, terme à terme, la moyenne du groupe, ce qui élimine $\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0}$; ensuite on applique aux équations qui restent la méthode de Cauchy. En possession des inconnues α_0 , δ_0 , on calcule la valeur de $\cos \nu$ pour chaque lieu (α, δ) .

Voici deux Tableaux numériques indiquant les données et les résultats. Un exemple de calcul détaillé se trouve au n° 5 de ce Chapitre.

PLANÈTE (103) HÉRA. — *Calcul du petit cercle.*

Dates.	α 1880,0.	δ 1880,0.	$\cos \nu$.
1880. Mai 1.....	200.41. 3",3	-0.18.42",0	0,954658
» 2.....	200.30.38,1	-0.15. 9,8	0,954661
» 3.....	200.20.26,1	-0.11.46,9	0,954665
» 4.....	200.10.27,8	-0. 8.33,5	0,954664
» 5.....	200. 0.43,7	-0. 5.29,8	0,954665
» 6.....	199.51.14,4	-0. 2.35,9	0,954664
» 7.....	199.42. 0,8	+0. 0. 8,1	0,954663
» 8.....	199.33. 2,9	+0. 2.42,0	0,954660
» 9.....	199.24.21,5	+0. 5. 5,7	0,954661
» 10.....	199.15.57,2	+0. 7.19,2	0,954663
» 11.....	199. 7.50,4	+0. 9.22,4	0,954664
» 12.....	199. 0. 1,5	+0.11.15,2	0,954670

Positions de Junon pour le passage à Greenwich (Nautical Almanac de 1891).

Calcul du petit cercle passant par quatre positions.

Dates.	α .	δ .	$\cos \nu$.
1891. Sept. 2...	321.13.47,9	-6.40.46,0	0,968225
» 6...	320.33.33,0	-7.21.17,6	0,968240
» 10...	319.57.50,6	-8. 1.11,6	0,968223
» 14...	319.27.25,5	-8.39.58,5	0,968238

Il convient de reproduire les deux équations qui font connaître, pour Héra et Junon, l'inconnue $\cot \delta_0 \cos \alpha_0$, après l'élimination de $\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0}$ et $\cot \delta_0 \sin \alpha_0$:

$$\begin{aligned} 445 \cot \delta_0 \cos \alpha_0 - 1442 &= 0, \\ 1253 &+ 3598 = 0; \end{aligned}$$

de la grandeur du coefficient de l'inconnue dépend la bonne détermination du petit cercle; sa précision est très différente, suivant les cas; le calcul de la distance de l'astre au Soleil ou à la Terre s'y rattache, comme on va le voir.

4. Reprenons les équations du Chapitre I, n° 4, exprimant que les trois positions répondant à (α, δ) , (α', δ') , (α'', δ'') sont dans un plan passant par le Soleil

$$\begin{aligned} c' \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' - c \Delta \cos \delta \cos \alpha - c'' \Delta'' \cos \delta'' \cos \alpha'' &= (E - e) X_1, \\ c' \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' - c \Delta \cos \delta \sin \alpha - c'' \Delta'' \cos \delta'' \sin \alpha'' &= (E - e) Y_1, \\ c' \Delta' \sin \delta' &- c \Delta \sin \delta &- c'' \Delta'' \sin \delta'' &= (E - c) Y_1; \end{aligned}$$

$$e = 1 - c', \quad X_1 = X' - \frac{C - c}{E - e} (X'' - X),$$

$$E = 1 - C', \quad Y_1 = Y' - \frac{C - c}{E - e} (Y'' - Y),$$

$$Z_1 = Z' - \frac{C - c}{E - e} (Z'' - Z).$$

Le petit cercle passant par les trois positions géocentriques M, M', M'' ayant été déterminé, on a

$$\cos \delta \cos \alpha \cot \delta_0 \cos \alpha_0 + \cos \delta \sin \alpha \cot \delta_0 \sin \alpha_0 + \sin \delta = \frac{\cos \nu}{\sin \delta_0},$$

et deux relations semblables où α et δ reçoivent des accents.

Les équations ci-dessus déterminent Δ , Δ' , Δ'' ; par exemple

$$c' \Delta' \begin{vmatrix} \cos \delta' \cos \alpha' & \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta'' \cos \alpha'' \\ \cos \delta' \sin \alpha' & \cos \delta \sin \alpha & \cos \delta'' \sin \alpha'' \\ \sin \delta' & \sin \delta & \sin \delta'' \end{vmatrix} = (E - e) \begin{vmatrix} X_1 & \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta'' \cos \alpha'' \\ Y_1 & \cos \delta \sin \alpha & \cos \delta'' \sin \alpha'' \\ Z_1 & \sin \delta & \sin \delta'' \end{vmatrix}.$$

On connaît la signification géométrique du premier déterminant : six fois le volume de la pyramide ayant son sommet au centre de la sphère et les trois autres en M, M', M'' .

Soient, pour un moment, a, b, c et A, B, C les côtés et les angles du triangle $MM'M''$, R le rayon du cercle circonscrit. Le double de la surface du triangle est

$$bc \sin A = \frac{abc}{2R} \quad \text{ou} \quad \frac{abc}{2 \sin \nu};$$

la hauteur de la pyramide égale $\cos \nu$; le premier déterminant peut donc être remplacé, au signe près, par $\frac{abc}{2} \cot \nu$, où a, b, c sont faciles à calculer :

$$b^2 = \overline{MM''}^2 = 4 \left(\cos \delta \cos \delta'' \sin^2 \frac{\alpha'' - \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\delta'' - \delta}{2} \right);$$

il y a deux autres relations analogues pour a et c .

Les autres déterminants qui figurent dans les expressions de $\Delta, \Delta', \Delta''$ vont être simplifiés par la considération du petit cercle. Soit

$$X_1 \cos \delta_0 \cos \alpha_0 + Y_1 \cos \delta_0 \sin \alpha_0 + Z_1 \sin \delta_0 = \Omega,$$

$$X_1 \cot \delta_0 \cos \alpha_0 + Y_1 \cot \delta_0 \sin \alpha_0 + Z_1 = \frac{\Omega}{\sin \delta_0};$$

il vient, par les propriétés élémentaires des déterminants,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} X_1 & \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta'' \cos \alpha'' \\ Y_1 & \cos \delta \sin \alpha & \cos \delta'' \sin \alpha'' \\ Z_1 & \sin \delta & \sin \delta'' \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \delta_0} \begin{vmatrix} X_1 & \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta'' \cos \alpha'' \\ Y_1 & \cos \delta \sin \alpha & \cos \delta'' \sin \alpha'' \\ \Omega & \cos \omega & \cos \omega \end{vmatrix} = \frac{\Omega}{\sin \delta_0 \cos \nu} \begin{vmatrix} \frac{X_1}{\Omega} \cos \nu & \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta'' \cos \alpha'' \\ \frac{Y_1}{\Omega} \cos \nu & \cos \delta \sin \alpha & \cos \delta'' \sin \alpha'' \\ \cos \nu & \cos \nu & \cos \nu \end{vmatrix} \\ &= \frac{\Omega}{\sin \delta_0} (AB'' - BA''), \end{aligned}$$

en posant, pour abrégé, d'une manière générale,

$$A = \cos \delta \cos \alpha - \frac{X_1}{\Omega} \cos \nu, \quad A' = \cos \delta' \cos \alpha' - \frac{X_1}{\Omega} \cos \nu, \quad A'' = \cos \delta'' \cos \alpha'' - \frac{X_1}{\Omega} \cos \nu,$$

$$B = \cos \delta \sin \alpha - \frac{Y_1}{\Omega} \cos \nu, \quad B' = \cos \delta' \sin \alpha' - \frac{Y_1}{\Omega} \cos \nu, \quad B'' = \cos \delta'' \sin \alpha'' - \frac{Y_1}{\Omega} \cos \nu.$$

A-t-on égard à la signification de c et c'' (p. 9)

$$c = \frac{\theta}{\theta'} \left(1 + \gamma \frac{\theta'}{\theta} \right), \quad c'' = \frac{\theta''}{\theta'} \left(1 - \gamma \frac{\theta'}{\theta''} \right);$$

il vient

$$\frac{\left(1 + \gamma \frac{\theta'}{\theta} \right) \Delta}{\frac{(A'B'')}{\theta}} = \frac{\left(1 - \gamma \frac{\theta'}{\theta''} \right) \Delta''}{\frac{(AB')}{\theta''}} = \frac{(1-e)\Delta'}{\frac{(AB'')}{\theta'}} = \pm \left(\frac{2E}{\theta\theta''} - \frac{2e}{\theta\theta''} \right) \frac{\Omega}{\sin \delta_0} \frac{\theta}{M'M''} \frac{\theta'}{MM''} \frac{\theta''}{MM'} \tan \nu.$$

Le signe à prendre est celui de $(AB'') - (AB') - (A'B'')$.

Ces relations contiennent la remarque de Lambert : la courbure de la trajectoire apparente intervient essentiellement par ν dans la formation de l'équation qui fait connaître Δ' ou r' .

Il est à noter que l'on ne suppose pas effectuée la transformation préliminaire des ascensions droites et déclinaisons en coordonnées écliptiques.

L'application suivante à Junon donne une idée de la précision qu'on peut obtenir.

Les observations, ci-dessus indiquées, de 1891 septembre 2, 6, 10, 14, font connaître les éléments d'un petit cercle passant à peu près par les positions géocentriques

$$l \cot \delta_0 \cos \alpha_0 = 0,458110, \quad l \cot \delta_0 \sin \alpha_0 = 0,191708,$$

$$\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0} = -3,30704, \quad l \tan \nu = 1,41131.$$

La position intermédiaire étant prise pour septembre 8,43, à la moyenne des dates extrêmes : septembre 2 et 14, il vient

$$l(X_1 = X') = 1,98979, \quad l(Y_1 = Y') = 1,35107, \quad l(Z_1 = Z') = 2,98849,$$

ensuite

$$\Omega : \sin \delta_0 = X_1 \cot \delta_0 \cos \alpha_0 + Y_1 \cot \delta_0 \sin \alpha_0 + Z_1 = -3,2512,$$

$$l \frac{\cos \nu}{\Omega} = l \frac{\cos \nu}{\sin \delta_0} - l \frac{\Omega}{\sin \delta_0} = 0,00739,$$

$$l X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega} = 1,99718, \quad X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega} = 0,99353,$$

$$l Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega} = 1,35846, \quad Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega} = -0,22828.$$

On forme les combinaisons

$$\begin{aligned} A &= \cos \delta \cos \alpha - X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}, & A' &= \cos \delta' \cos \alpha' - X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}, & A'' &= \cos \delta'' \cos \alpha'' - X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}, \\ B &= \cos \delta \sin \alpha - Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}, & B' &= \cos \delta' \sin \alpha' - Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}, & B'' &= \cos \delta'' \sin \alpha'' - Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}, \end{aligned}$$

on se contente de calculer A, B, A'', B'' pour former l'équation en Δ' , r' :

$$\begin{aligned} A &= -0,21916, & A'' &= -0,24229, \\ B &= -0,39367, & B'' &= -0,41432, \end{aligned}$$

de là

$$\frac{AB'' - BA''}{\theta'} = \frac{(AB'')}{\theta'} = (\bar{z}_n 34776).$$

Prend-on $\frac{\theta}{M'M''} \frac{\theta'}{MM''} \frac{\theta''}{MM'} = \left(\frac{\theta'}{MM''}\right)^3$, il vient

$$\frac{\theta}{M'M''} \frac{\theta'}{MM''} \frac{\theta''}{MM'} \frac{\Omega}{\sin \delta_0} \operatorname{tang} \nu \frac{(AB'')}{\theta'} = (0_n 21490),$$

et, pour l'équation dont il s'agit,

$$(1 - e)\Delta' = (0,21490) \left(\frac{2E}{\theta\theta''} - \frac{2e}{\theta\theta''} \right) = (0,21490) \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right).$$

Comme l'éphéméride du *Nautical Almanac* donne, pour Junon, à la date choisie,

$$l\Delta' = 0,1762, \quad lr' = 0,3876,$$

alors que la résolution de l'équation précédente conduit à

$$l\Delta' = 0,174, \quad lr' = 0,385,$$

on voit qu'on approche de la vérité, bien que l'intervalle soit restreint et que le petit cercle déterminé par l'ensemble des quatre positions ne coïncide pas avec celui passant par les trois positions utilisées : celles de septembre 2 et 14 et celle qui correspond à la moyenne des deux époques.

5. Si, au lieu d'employer des observations fictives, on utilise des mesures

XXIII.

G.8

faites en réalité, il n'en est plus nécessairement de même, comme on va le voir pour la planète EL, découverte à Marseille par Coggia, le 30 mars 1899.

M. L. Fabry a calculé les éléments de l'orbite de cette petite planète par la méthode de Laplace (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 1031), telle qu'elle a été exposée dans le tome III des *Annales de l'Observatoire de Paris*, par Villarceau, au moyen des observations du 31 mars au 15 avril. Les nombres rapprochés de ceux publiés par MM. Lubrano et Maître (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 1211), et déduits d'observations plus écartées, en appliquant la méthode assez pénible d'Oppolzer pour le cas de quatre observations, indiquent que cette première approximation, bien que satisfaisante, comporte une assez grande incertitude.

Voici les données d'observations empruntées aux *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (Séances des 4 et 24 avril 1899) rapportées à 1899,0.

PLANÈTE EL COGGIA.

Dates.	T. m. Marseille.	α 1899,0.	α en angle.	δ 1899,0.
	h m s	h m s	° ' "	° ' "
1899. Avril 1 ...	11. 0.10	12.58.20,07	194.35. 1,1	-6.39. 8,1
» 3 ...	11. 0.46	12.56.48,84	194.12.12,6	-6.24.21,8
» 4 ...	13.45. 7	12.55.57,82	193.59.27,3	-6.16. 6,1
» 5 ...	12.59. 5	12.55.13,55	193.48.23,3	-6. 8.51,0
» 6 ...	10.38. 5	12.54.32,45	193.38. 6,8	-6. 2. 5,7
» 7 ...	10.50. 8	12.53.46,46	193.26.36,9	-5.54.39,1
» 10 ...	10.27.54	12.51.31,95	192.52.59,3	-5.32.17,7
» 11 ...	10.33. 1	12.50.46,76	192.41.41,4	-5.24.54,9
» 12 ...	10.15.41	12.50. 2,72	192.30.40,8	-5.17.39,5
» 15 ...	10. 0.40	12.47.50,54	191.57.38,1	-4.55.49,0

Le calcul du petit cercle passant par l'ensemble des positions est compris avec tous les détails dans le Tableau suivant : le calcul est très commode et les vérifications nombreuses.

Pour abrégé, on a posé $x_0 = \cot \delta_0 \cos \alpha_0$, $y_0 = \cot \delta_0 \sin \alpha_0$.

Après avoir retranché de chaque équation la moyenne de l'ensemble, ce qui fait disparaître $\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0}$, on fait la somme de toutes les équations en changeant au besoin le signe des termes dans les équations où le coefficient de y_0 est négatif; on tire y_0 en fonction de x_0 et l'on substitue dans chaque équation.

PLANÈTE EL. — Détermination du petit cercle (p. 53).

Dates.	$l \sin \alpha$.	$l \cos \delta$.	$l \cos \alpha$.	$l \cos \alpha \cos \delta$.	$\cos \alpha \cos \delta$.	$l \sin \alpha \cos \delta$.	$\sin \alpha \cos \delta$.	$l \sin \delta$.	$\sin \delta$.
Avril 1 ...	$\bar{1}_n 401044$	$\bar{1}_n 997066$	$\bar{1}_n 985777$	$\bar{1}_n 982843$	-0,961265	$\bar{1}_n 398110$	-0,250098	$\bar{1}_n 063870$	-0,115843
» 3 ...	$\bar{1}_n 389816$	$\bar{1}_n 997280$	$\bar{1}_n 986517$	$\bar{1}_n 983797$	-0,963378	$\bar{1}_n 387096$	-0,243835	$\bar{1}_n 047563$	-0,111574
» 4 ...	$\bar{1}_n 383399$	$\bar{1}_n 997396$	$\bar{1}_n 986921$	$\bar{1}_n 984317$	-0,664533	$\bar{1}_n 380795$	-0,240323	$\bar{1}_n 038356$	-0,109234
» 5 ...	$\bar{1}_n 377749$	$\bar{1}_n 997496$	$\bar{1}_n 987267$	$\bar{1}_n 984763$	-0,965524	$\bar{1}_n 375245$	-0,237271	$\bar{1}_n 029743$	-0,107089
» 6 ...	$\bar{1}_n 372432$	$\bar{1}_n 997586$	$\bar{1}_n 987585$	$\bar{1}_n 985171$	-0,966432	$\bar{1}_n 370018$	-0,234433	$\bar{1}_n 021745$	-0,105134
» 6 ...	$\bar{1}_n 366400$	$\bar{1}_n 997685$	$\bar{1}_n 987934$	$\bar{1}_n 985619$	-0,967428	$\bar{1}_n 364085$	-0,231252	$\bar{1}_n 012758$	-0,102981
» 10 ...	$\bar{1}_n 348234$	$\bar{1}_n 997968$	$\bar{1}_n 988927$	$\bar{1}_n 986895$	-0,970275	$\bar{1}_n 346202$	-0,221923	$\bar{2}_n 984573$	-0,096510
» 11 ...	$\bar{1}_n 341945$	$\bar{1}_n 998057$	$\bar{1}_n 989251$	$\bar{1}_n 987308$	-0,971198	$\bar{1}_n 340002$	-0,218777	$\bar{2}_n 974849$	-0,094373
» 12 ...	$\bar{1}_n 335724$	$\bar{1}_n 998143$	$\bar{1}_n 989563$	$\bar{1}_n 987706$	-0,972090	$\bar{1}_n 333867$	-0,215709	$\bar{2}_n 965069$	-0,092272
» 15 ...	$\bar{1}_n 316471$	$\bar{1}_n 998390$	$\bar{1}_n 990467$	$\bar{1}_n 988857$	-0,974668	$\bar{1}_n 314861$	-0,206472	$\bar{2}_n 934213$	-0,085943
Moyennes.....		$\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0} =$			-0,967679	x_0	-0,230009	y_0	-0,102095
					+ 6414		- 20089		- 13748
					+ 4301		- 13826		- 9479
					+ 3146		- 10314		- 7139
					+ 2155		- 7262		- 4994
					+ 1247		- 4424		- 3039
					+ 251		- 1243		- 886
					- 2596		+ 8086		+ 5585
					- 3519		+ 11232		+ 7722
					- 4411		+ 14300		+ 9823
					- 6989		+ 23537		+ 16152
					+ 17514		- 57158		- 39285
					- 17515		+ 57155		+ 29282
					- 35029	x_0	+ 114313	y_0	+ 78567
$y_0 = (\bar{1}_n 486333)x_0 - (\bar{1}_n 837145)$					4,544428		5,058095		4,895240
					5,058095				5,058095
					$\bar{1}_n 486333$				$\bar{1}_n 837145$

Dates.	l coeff. y_0 .	l coeff. x_0 .	Nombres.	Nombres.	Σ .	l const.	Nombres.	Nombres.	Σ .
1 ...	4,302958	3,789291	-6156	+6414	+258*	4,140103	+13807	-13748	+59
3 ...	4,140697	3,627030	-4237	+4301	+ 64	3,977842	+ 9503	- 9479	+24
4 ...	4,013427	3,499760	-3161	+3146	- 15	3,850572	+ 7089	- 7139	-50
5 ...	3,861056	3,347389	-2225	+2155	- 70	3,698201	+ 4991	- 4994	- 3
6 ...	3,645815	3,132148	-1356	+1247	-109*	3,482960	+ 3041	- 3039	+ 2
7 ...	3,094471	2,580804	- 381	+ 251	-130*	2,931616	+ 854	- 886	-32
10 ...	3,907734	3,394067	+2478	-2596	-118*	3,744879	- 5558	+ 5585	+27
11 ...	4,050457	3,536790	+3442	-3519	- 77	3,887602	- 7720	+ 7722	+ 2
12 ...	4,155336	3,641669	+4382	-4411	- 29	3,992481	- 9828	+ 9823	- 5
15 ...	4,371751	3,858084	+7212	-6989	+223*	4,208896	-16177	+16152	-25

$$x_0 = -0,0442 = (\bar{2}_n 645422)$$

$$y_0 = (\bar{1}_n 845619)$$

$$\frac{\cos \nu}{\sin \delta_0} = 0,101876 \quad (\bar{1}_n 008072)$$

$$1 : \sin \delta_0 = 0,087049$$

$$\cos \nu = \bar{2}_n 921023$$

$$\text{tang } \nu_1 = 1,077461$$

$$l \text{ tang } \alpha_0 = 1,200197$$

$$l \sin \delta_0 = \bar{1}_n 912951$$

$$l \cos \delta_0 = \bar{1}_n 759432$$

$$\alpha_0 266^\circ 23' 28'', 69$$

On a pris les nombres marqués d'un astérisque.

Il est clair, que la détermination du petit cercle est ici douteuse.

On le constate encore mieux, d'après les valeurs de υ , calculées pour chaque observation en prenant pour pôle α_0, δ_0 :

Dates.	υ .	Dates.	υ .
Avril 1 ...	85°.12'.54",1	Avril 7 ...	85°.13'. 7",1
» 3 ...	85.12.58,9	» 10 ...	85.12.56,7
» 4 ...	85.13.11,3	» 11 ...	85.13. 1,7
» 5 ...	85.13. 2,4	» 12 ...	85.13. 3,4
» 6 ...	85.13. 1,5	» 15 ...	85.13. 8,7

υ paraît augmenter du commencement à la fin de la série; mais la quantité de cette variation ou la valeur de la dérivée est douteuse; il ne saurait, *a fortiori*, être question de la dérivée seconde. Dès lors la méthode de Laplace qui exige le calcul de ces dérivées, et les méthodes qui rentrent dans celle de Laplace ne seront pas susceptibles d'être ici appliquées. On peut dire peut-être avec Lagrange exprimant à Laplace son opinion : « Je conçois que votre méthode fournit, analytiquement parlant, la solution la plus simple du problème dont il s'agit; mais je crains qu'elle ne soit pas aussi utile dans la pratique qu'elle est belle dans la théorie, à cause de la difficulté de déterminer, *a posteriori*, les différences premières et secondes... » (1).

Le bénéfice qu'on pouvait espérer de la combinaison de toutes les observations pour accroître la précision laisse place au doute; on pourrait croire qu'il en sera autrement lorsque les positions des étoiles de comparaison seront généralement précises et que les méthodes d'observation auront reçu quelques perfectionnements, sur lesquels on a le droit de compter d'après les progrès accomplis depuis vingt-cinq ans; mais la difficulté subsistera à cause des corrections de parallaxe et d'aberration.

Pour le moment, nous ne ferons que signaler quelques travaux poursuivis dans cette voie, en renvoyant pour plus de détails à la *Bibliographie relative au Calcul des orbites*, publiée par M. Radau (*Bulletin astronomique*, t. XVI, p. 427).

LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. I et V.

BINET, *Journal de l'École Polytechnique*, XX^e Cahier.

AIRY, *Mémoires de la Société Royale astronomique*, t. XI.

CAUCHY, *Divers Mémoires insérés dans les Œuvres complètes*, t. X de la 1^{re} série.

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. XIV, p. 108.

VILLARCEAU, *Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires*, t. III.

RADAU (R.), *Bulletin astronomique*; 1887.

BRUNS (H.), *Astr. Nach.*, n° 2824.

HARZER (P.), *Astr. Nach.*, n° 3371-72.

6. Nous allons présenter ici l'application détaillée des formules du n° 4 à la planète EL, en partant des positions des 1, 7 et 12 avril.

On aura un type du Calcul d'une orbite elliptique d'après trois observations. L'incertitude des éléments participe, on le verra, de celle de ν , pour laquelle est prise la valeur obtenue p. 59. Un calcul spécial pour les trois observations n'aurait rien appris. Pour la même raison le calcul des éléments $\varpi - \Omega, i, \Omega$, de l'éphéméride, déjà donné pages 18, 21, 47, a été laissé ici de côté.

Calcul fondé sur les observations des 1, 7, 12 avril.

Dates.	$l \sin \alpha.$	$l \cos \delta.$	$l \cos \alpha.$	$l \cos \alpha \cos \delta.$	$\cos \alpha \cos \delta.$	$l \cos \delta \sin \alpha.$	$\cos \delta \sin \alpha.$	$l \sin \delta.$
1....	$\bar{1}_n 401044$	$\bar{1}_n 997066$	$\bar{1}_n 985777$	$\bar{1}_n 982843$	$-0,961265$	$\bar{1}_n 398110$	$-0,250098$	$\bar{1}_n 063870$
7....	$\bar{1}_n 366400$	$\bar{1}_n 997685$	$\bar{1}_n 987934$	$\bar{1}_n 985619$	$-0,967428$	$\bar{1}_n 364685$	$-0,231252$	$\bar{1}_n 012758$
12....	$\bar{1}_n 335724$	$\bar{1}_n 998143$	$\bar{1}_n 989563$	$\bar{1}_n 987706$	$-0,972090$	$\bar{1}_n 333867$	$-0,215709$	$\bar{2}_n 965069$

Lieux du \odot (p. 8, 10, 54), $\cos \varepsilon \bar{1},962554, \sin \varepsilon \bar{1},599869.$

Date.	$\Delta_1 L.$ L.	$\Delta_1 LR.$ LR.	Date.	$\Delta_1 L'.$ L'.	$\Delta_1 LR'.$ LR'.	Date.	$\Delta_1 L''.$ L''.	$\Delta_1 LR''.$ LR''.
Avril 1 41995	$0.59. 7.58$ $11.32.17,60$ $+26.36,24$ $11.58.53, 8$ $3,549933$ $\bar{1},653164$ $3,203097$	$\bar{1},0001279$ $\bar{1},9999135$ $+575$ $\bar{1},999971$ $3,106871$ $\bar{1},653164$ $\bar{2},760035$	Avril 7 41299	$0.58.57.06$ $17.26.37,14$ $+26. 6,88$ $17.52.44,0$ $3,548642$ $\bar{1},646394$ $3,195036$	$+1256$ $0,0006783$ $+556$ $0,000734$ $3,098990$ $\bar{1},646394$ $2,745384$	Avril 12 41907	$0.58.47.01$ $22.21. 2,96$ $+24.38,06$ $22.45.41,0$ $3,547406$ $\bar{1},622287$ 3.169693	$+1206$ $0,0012966$ $+505$ $0,001347$ $3,081347$ $\bar{1},622287$ $2,703634$
$l \cos L.$ LR.	$l \sin L.$ LR $\cos \varepsilon.$	$l \sin L.$ LR $\sin \varepsilon.$	$l \cos L'.$ LR'.	$l \sin L'.$ LR' $\cos \varepsilon.$	$l \sin L'.$ LR' $\sin \varepsilon.$	$l \cos L''.$ R''.	$l \sin L''.$ LR'' $\cos \varepsilon.$	$l \sin L''.$ LR'' $\sin \varepsilon.$
$\bar{1},990434$	$\bar{1},317223$	$\bar{1},317223$	$\bar{1},978503$	$\bar{1},487147$	$\bar{1},487147$	$\bar{1},964789$	$\bar{1},587592$	$\bar{1},587592$
$\bar{1},999971$	$\bar{1},962525$	$\bar{1},599840$	$0,000734$	$\bar{1},963288$	$\bar{1},600603$	$0,001347$	$\bar{1},963901$	$\bar{1},601216$
$\bar{1},990405$	$\bar{1},279748$	$\bar{2},917063$	$\bar{1},979237$	$\bar{1},450435$	$\bar{1},087750$	$\bar{1},966136$	$\bar{1},551493$	$\bar{1},188808$
X.	Y.	Z.	X'.	Y'.	Z'.	X''.	Y''.	Z''.
$+0,978150$	$+0,190436$	$0,082616$	$+0,953316$	$+0,282121$	$0,122391$	$+0,924988$	$+0,356035$	$0,154457$
	$-\frac{0''-0}{30'}(X''-X)$		$+1643$	-5118	-2220	$+0,978150$	$+0,190436$	$0,082616$
	X_1		$+0,954959$	$+0,277003$	$+0,120171$	$-0,053162$	$+0,165599$	$+0,071841$
	$l(X''-X)$		$\bar{2}_n 725601$	$\bar{1},219057$	$\bar{2},856372$			
	$l \frac{0''-0}{30'}$		$\bar{2},490011$	$\bar{2},490011$	$\bar{2},490011$			
			$\bar{3}_n 215612$	$\bar{3},709068$	$\bar{3},346383$			

Calcul de $R' \cos \psi' = X' \cos \delta' \cos \alpha' + Y' \cos \delta' \sin \alpha' + Z' \sin \delta'$.

lX'	$\bar{1},979237$	lY'	$\bar{1},450435$	lZ'	$\bar{1},087750$	$X' \cos \delta' \cos \alpha'$	$-0,922266$
$l \cos \delta' \cos \alpha'$..	$\bar{1},n985619$	$l \cos \delta' \sin \alpha'$	$\bar{1},n364085$	$l \sin \delta'$	$\bar{1},n012758$	$Y' \cos \delta' \sin \alpha'$	$-0,065241$
	$\bar{1},n964856$		$\bar{2},n814520$		$\bar{2},n100508$	$Z' \sin \delta'$	$-0,012604$
						$R' \cos \psi'$	$-1,000111$

Calcul de $\Omega: \sin \delta_0 = X_1 x_0 + Y_1 y_0 + Z_1$ (p. 55).

lX_1	$\bar{1},979985$	lY_1	$\bar{1},442485$	$X_1 x_0$	$-0,042209$	$l \cos \nu: \sin \delta_0$	$\bar{1},008072$
$l x_0$	$\bar{2},n645422$	$l y_0$	$\bar{1},n845619$	$Y_1 y_0$	$-0,194135$	$l \Omega: \sin \delta_0$	$\bar{1},n065105$
$l X_1 x_0$	$\bar{2},n625407$	$l Y_1 y_0$	$\bar{1},n288104$	Z_1	$+0,120171$	$l \frac{\cos \nu}{\Omega}$	$\bar{1},n942967$
				$\Omega: \sin \delta_0$	$-0,116173$		
$l X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}$	$\bar{1},n922952$	$l Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}$	$\bar{1},n385452$	$X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}$	$-0,837436$		
				$Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}$	$-0,242914$		

Vérification :

$$x_0 X_1 \frac{\cos \nu}{\Omega} + y_0 Y_1 \frac{\cos \nu}{\Omega} = \frac{\cos \nu}{\sin \delta_0} - Z_1 \frac{\cos \nu}{\Omega}.$$

Dates-t-Avril	$t'' - t'$	$l(t'' - t')$	$lk(t'' - t') = \theta$	\odot	$\odot'' - \odot'$	$l \sin(\odot'' - \odot')$	lR	$l \sin(\odot'' - \odot'):R$	$sn(\odot'' - \odot'):R$
1,44995	4,97608	0,696887	$\bar{2},932468$	$11.58.53,8$	$4.52.57,0$	$\bar{2},929994$	$\bar{1},999971$	$\bar{2},930023$	0,0851183
7,44299	10,96912	1,040172	$\bar{1},275753$	$17.52.44,0$	$10.46.47,2$	$\bar{1},271922$	0,000734	$\bar{1},271188$	0,186719
12,41907	5,99304	0,777647	$\bar{1},013228$	$22.45.41,0$	$5.53.50,2$	$\bar{1},011762$	0,001347	$\bar{1},010415$	0,102425

Dates.	α	$\alpha'' - \alpha'$	$\frac{\alpha'' - \alpha'}{2}$	$l \sin \frac{\alpha'' - \alpha'}{2}$	δ	$\delta'' - \delta'$	$\frac{\delta'' - \delta'}{2}$	$l \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}$	$l \cos \delta$
Avril 1	$194.35.1,1$	$-0.55.56,1$	$-0.27.58,05$	$\bar{3},n910375$	$-6.39.8,1$	$+0.36.59,6$	$+0.18.29,8$	$\bar{3},730817$	$\bar{1},997066$
» 7	$193.26.36,9$	$-2.4.20,3$	$-1.2.10,15$	$\bar{2},n257277$	$-5.54.39,1$	$+1.21.28,6$	$+0.40.44,3$	$\bar{2},073719$	$\bar{1},997685$
» 12	$192.30.40,8$	$-1.8.24,2$	$-0.34.12,10$	$\bar{3},n997766$	$-5.17.39,5$	$+0.44.29,0$	$+0.22.14,5$	$\bar{3},810890$	$\bar{1},998143$

$l \sin \frac{\alpha'' - \alpha'}{2} : \frac{\theta}{2}$	$2l()$	$l \cos \delta' \cos \delta''$	$l \cos \delta' \cos \delta'' ()^2$	$l \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2} : \frac{\theta}{2}$	$2l()$	$\cos \delta' \cos \delta'' ()^2$	$(\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2} : \frac{\theta}{2})^2$	$(\frac{M'' M'}{\theta})^2$	$l(\frac{M'' M'}{\theta})^2$
$\bar{1},n278937$	$\bar{2},557874$	$\bar{1},995828$	$\bar{2},553702$	$\bar{1},099379$	$\bar{2},198758$	0,0357851	0,0158037	0,0515888	$\bar{2},712555$
$\bar{1},n282554$	$\bar{2},565108$	$\bar{1},995209$	$\bar{2},560317$	$\bar{1},098996$	$\bar{2},197992$	0,0363343	0,0157758	0,0521101	$\bar{2},716922$
$\bar{1},n285568$	$\bar{2},571136$	$\bar{1},994751$	2,565887	$\bar{1},098692$	$\bar{2},197384$	0,0368033	0,0157538	0,0525571	$\bar{2},720632$

Tableau de A, A', A''; B, B', B'' (p. 56).

A.	B.	lA.	lB.	A'B''	l.	10 ³ nombres.	B'A''	l.	10 ³ nombres.
-0,123829	-0,007184	$\bar{1},n092823$	$\bar{3},n856366$	A'B''	$\bar{3},n548566$	-3,53644	B'A''	$\bar{3},n195992$	-1,57033
-0,129992	+0,011662	$\bar{1},n113917$	$\bar{2},066773$	AB''	$\bar{3},n527472$	-3,36878	BA'	$\bar{4},985585$	0,96735
-0,134654	+0,027205	$\bar{1},n129219$	$\bar{2},434649$	AB'	$\bar{3},n159596$	-1,44410	BA'	$\bar{4},970283$	0,93386
	l.	10 ³ nombres.	l0.	l(A'B''):0.					
A'B'' - B'A''	$\bar{3},n293608$	-1,96611	$\bar{2},932468$	$\bar{2},n361140$					
AB'' - BA'	$\bar{3},n637102$	-4,33613	$\bar{1},275753$	$\bar{2},n361349$					
AB' - BA'	$\bar{3},n376205$	-2,37796	$\bar{1},013228$	$\bar{2},n362977$					

1902AnPar...23G...10

Vient alors la résolution de l'équation donnant r' ou Δ' p. 56; on peut la mettre sous la forme

$$\Delta' = \frac{h}{1-e} \left(\frac{2E}{\theta\theta''} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

en remplaçant e par sa valeur approchée $e = \frac{\theta\theta''}{2r'^3}$ (p. 14).

On a, d'après sa définition même,

$$E = \frac{\frac{\sin(\odot'' - \odot')}{R} + \frac{\sin(\odot' - \odot)}{R''} - \frac{\sin(\odot'' - \odot)}{R'}}{\frac{\sin(\odot'' - \odot')}{R} + \frac{\sin(\odot' - \odot)}{R''}}, \quad \text{à peu près } \frac{\theta\theta''}{2RR'R''} \quad \text{ou} \quad \frac{\theta\theta''}{2R'^3}.$$

La Table des valeurs de $\log \frac{R'}{\Delta'} \left(1 - \frac{R'^3}{r'^3} \right)$ permet, en partant d'abord de ce dernier résultat, d'obtenir des valeurs approchées de Δ' et de r' avec deux ou trois chiffres. Ensuite, le plus simple est d'employer les approximations successives consistant à calculer Δ' au moyen de la formule ci-dessus, d'après une valeur admise pour r' et ainsi de suite (1).

r' et Δ' , une fois obtenus, on en déduit les deux distances géocentriques extrêmes Δ et Δ'' par les formules de la page 56; $\gamma = \frac{\theta'' - \theta}{3\theta'} e$; Δ' sert seulement d'intermédiaire.

On a trouvé

$$l\Delta = 0,415826, \quad l\Delta' = 0,417674.$$

Malgré tout, il subsiste dans Δ' une incertitude assez grande. Cependant il est convenable de faire les calculs avec 6 décimales, parce que, dans les calculs suivants, il se rencontre des différences de nombres presque égaux $x'' - x, \dots$

Dans le Tableau ci-après, on a posé

$$x'' - x = m \sin M, \quad x'' + x = m \cos M,$$

afin de rendre calculables par logarithmes les combinaisons

$$\frac{x''}{r''} - \frac{x}{r} = \frac{m \sin(M - \omega)}{\sqrt{\frac{r^2 + r''^2}{2}} \cos 2\omega}, \quad \frac{x''}{r''} + \frac{x}{r} = \frac{m \cos(M + \omega)}{\sqrt{\frac{r^2 + r''^2}{2}} \cos 2\omega}$$

et les combinaisons analogues en y, y'', \dots , d'où l'on déduit les constantes de Gauss; il n'y a là qu'une modification (plutôt inutile) à la marche ordinaire (p. 34).

(1) Cf. WEISS, Travail déjà cité, p. 32.

Le calcul de l'excentricité se fait au moyen des formules générales de la page 20, qu'on écrit

$$\frac{\sqrt{rr''} \cos \omega'}{p} e \sin \frac{\nu + \nu''}{2} = \frac{\text{tang } \omega}{\sin \frac{\nu'' - \nu}{2}},$$

$$\text{tang } \omega = \sin \omega',$$

$$\frac{\sqrt{rr''} \cos \omega'}{p} e \cos \frac{\nu + \nu''}{2} = \frac{1}{\cos \frac{\nu'' - \nu}{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{rr''} \cos \omega'}{p} \right);$$

p est obtenu, sans l'intermédiaire de a , si l'on veut, au moyen de l'expression du rapport $\eta = \text{secteur} : \text{triangle}$, donnée page 17, où seulement sont négligés les termes du sixième ordre :

$$\eta = 1 + \frac{1}{6} \frac{\theta^2}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} + \frac{1}{10} \frac{\theta^4}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^5} \frac{x^2}{2\theta^2} - \frac{11}{360} \frac{\theta^4}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^6} \dots$$

Pose-t-on

$$m = \frac{k^2 (t'' - t)^2}{\left(2 \cos \frac{\nu'' - \nu}{2} \sqrt{rr''}\right)^3} = \frac{\theta^2}{\left[(r+r'') \cos \omega' \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}\right]^3},$$

il vient

$$\frac{\sqrt{rr''} \cos \omega'}{p} = \frac{2m \cos \omega' \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}}{\eta^2 \sin^2 \frac{\nu'' - \nu}{2}}.$$

Dans le Chapitre suivant sera exposée la méthode rigoureuse de Gauss pour le calcul de η ; c'est aussi simple que d'employer la formule approchée ci-dessus.

Coordonnées rectilignes (p. 63).

$\Delta \cos \delta \cos \alpha.$	$l \Delta'' \cos \delta'' \cos \alpha''.$	$x + X.$	$X.$	$x.$	$x''.$	$x'' + X''.$	$X''.$	$x'' - x.$	$x'' + x.$
0 _n 398669	0 _n 405380	-2,504200	+0,978150	-3,482350	-3,468178	-2,543190	+0,924988	+0,014172	-6,950528
1 _n 813936	1 _n 751541	-0,651533	+0,190436	-0,841969	-0,920375	-0,564340	+0,356035	-0,078406	-1,762344
1 _n 479696	1 _n 382743	-0,301784	+0,082616	-0,384400	-0,395860	-0,241403	+0,154457	-0,011460	-0,780260

$$\Sigma(x'' - x)^2 = x^2 0,00647967, \quad \Sigma(x'' + x)^2 52,0246, \quad \Sigma(x'' - x)(x'' + x) + 0,048617, \quad l \lg \omega 4,970524, \quad \omega = 3' 12'' 730, \quad 2(r^2 + r''^2) 52,0311.$$

$l(x'' - x).$	$l \sin M.$	$l \cos M.$	$l(x'' + x).$	$l(x'' - x)(x'' + x).$	$l \text{ tang } M.$	$M.$	$lm.$	$M - \omega.$	$M + \omega.$
2,151431		-1	0 _n 842018	2 _n 993449	3 _n 309413	179° 52' 59",431	0,842019	179° 49' 46",701	179° 56' 12",161
2 _n 894349		1 _n 999571	0 _n 246091	1,140440	2,648258	182° 32' 50",58	0,246520	182° 29' 37",85	182° 36' 3",31
2 _n 059185		1 _n 999953	1 _n 892239	3,951424	2,166946	180° 50' 29",29	1,892286	100° 47' 16",56	180° 53' 42",02

Calcul de $\frac{v'' - v}{2}$ (p. 19), η , $\frac{v'' + v}{2}$, e , ... (p. 64, 70, 71), $l \cos \omega$ o, $l \cos \omega'$ o.

$l(r^2 + r'^2)$	1,716263	$l(1 + K)$	0,301017	$l() \sin \frac{v'' + v}{2}$	$\bar{2},924406$	φ	$20^{\circ}38'14''_1$
$l\sqrt{2(r^2 + r'^2)}$	0,858131	lK	$\bar{1},999973$		$\bar{1},191457$	$\frac{\varphi}{2}$	$10^{\circ}19'7''_1$
$l(r + r')$	0,858131	l_2	0,301030		$\bar{1},991692$	v	$170^{\circ}25'21''_8$ $171^{\circ}11'49''_4$
$l \operatorname{tang} \omega$	$\bar{4},970524$	$l(r + r')^2$	1,716262	$l() \cos \frac{v'' + v}{2}$	$\bar{1},9727641$	$\frac{v}{2}$	$85^{\circ}12'40''_9$ $85^{\circ}50'54''_7$
$l(r'' - r)$	$\bar{3},828655$	$\operatorname{colog} \eta^2$	2,188447	$l \operatorname{tang} \frac{v'' + v}{2}$	$\bar{1},9196765$	$l \operatorname{tang} \frac{v}{2}$	1,076898 $1,139160$
$l(r'' - r)^2$	$\bar{3},657310$	$\operatorname{colog} l$	4,506729	$\frac{v'' + v}{2}$	$171^{\circ}03'35''_6$	$l \operatorname{tang} \left(45^{\circ} - \frac{\varphi}{2} \right)$	$\bar{1},840076$ $\bar{1},840076$
$l[x^2 - (r'' - r)^2]$	$\bar{3},808497$	$\log l$	$\bar{5},493271$	$\frac{v'' - v}{2}$	$0^{\circ}38'13''_8$	$l \operatorname{tang} \frac{E}{2}$	0,916974 $0,979236$
$l\sqrt{\quad}$	$\bar{2},904249$	$l\left(\frac{5}{6} + l\right)$	$\bar{1},920835$	$l()$	$\bar{1},732949$	$\frac{E}{2}$	$83^{\circ}5'49''_1$ $84^{\circ}0'42''_2$
$l(r + r'') \cos \omega'$	0,858131	$lm : \left(\frac{5}{6} + l\right)$	$\bar{4},056359$	$l\sqrt{rr''} \cos \omega' : p$	0,185851	E	$166^{\circ}11'38''_1$ $168^{\circ}1'24''_4$
$l \sin \frac{v'' - v}{2}$	$\bar{2},046118$	$l\eta^2$	0,000110	le	$\bar{1},547098$	$l \sin E$	$\bar{1},377737$ $\bar{1},317042$
$l \cos \frac{v'' - v}{2}$	-27			$l\sqrt{rr''} \cos \omega'$	0,557101	$l(e)''$	4,861523 $4,861523$
$l \operatorname{tang} \frac{v'' - v}{2}$	$\bar{2},046145$	lK	$\bar{1},999973$	lp	0,371250	$l(e \sin E)''$	4,239260 $4,178565$
		$lm : \sin^2 \frac{v'' - v}{2}$	$\bar{1},884958$	$l \cos \varphi$	$\bar{1},971197$	$e \sin E$	$4^{\circ}49'8''_4$ $4^{\circ}11'25''_7$
$l \cos \omega' \cos \frac{v'' - v}{2} = K$	$\bar{1},999973$	l_2	0,301030	$l \cos^2 \varphi$	$\bar{1},942394$	M	$161^{\circ}22'29''_7$ $163^{\circ}49'58''_7$
$l(r + r'')K$	0,858104	$\operatorname{colog} \eta^2$	$\bar{1},999890$	la	0,428856	$la^{\frac{3}{2}}$	0,643284
$l(r + r'')^3 K^3$	2,574312	$l\sqrt{rr''} \cos \omega' : p$	0,185851	$l\sqrt{a}$	0,214428	$l(k)''$	3,550007
$lk^2(t'' - t)^2$	$\bar{2},551506$	$1 - \sqrt{rr''} \cos \omega' : p$	-0,534090			ln	2,906723
lm	$\bar{3},977194$	$l(1 - \sqrt{rr''} \cos \omega' : p)$	$\bar{1},9727614$			$l(t'' - t)$	1,040172
$l \sin^2 \frac{v'' - v}{2}$	$\bar{4},092236$	$l \cos \frac{v'' - v}{2}$	-27			$l(M'' - M)$	3,946895
						$M'' - M$	$2^{\circ}27'29''_0$

Constantes de Gauss (p. 63).

$$l_2 \sin \frac{v'' - v}{2} \bar{2},347148, \quad l_2 \cos \frac{v'' - v}{2} 0,301003, \quad l\sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{2}} \cos 2\omega 0,557101.$$

$l \sin(M - \omega)$	$l \cos(M + \omega)$	$lm \sin(M - \omega)$	$lm \cos(M + \omega)$	$l \sin \alpha \sin(A' +)$	$l \sin \alpha \cos(A' +)$	$l \operatorname{tang}(A' +)$	$A' +$	$l \sin \alpha$
$\bar{3},473247$	0,000000	$\bar{2},315266$	0,842019	$\bar{1},983915$	$\bar{1},985007$	$\bar{1},411017$	$0_n 572898$	$-75^{\circ}1'52''_7$ $\bar{1},998908$
$\bar{2}_n 638611$	$\bar{1}_n 999553$	$\bar{2}_n 885131$	0,246073	$\bar{1}_n 387969$	$\bar{1}_n 986287$	$\bar{1}_n 980882$	$\bar{1},407087$	$194^{\circ}19'22''_2$ $\bar{1},994595$
$\bar{2}_n 138353$	$\bar{1}_n 999947$	$\bar{2}_n 030639$	$\bar{1}_n 892233$	$\bar{1}_n 034129$	$\bar{1}_n 890752$	$\bar{1}_n 126390$	$\bar{1},907739$	$218^{\circ}57'33''_7$ $\bar{1},235638$

En règle générale, le calcul de l'orbite elliptique viendra après celui d'une orbite circulaire propre à faciliter les observations de l'astre et les calculs préliminaires pour l'orbite. On pourra choisir, parmi les observations, celles faites à des intervalles à peu près égaux; de sorte qu'il n'y aura pas lieu de reprendre

XXIII.

G.9

le calcul des auxiliaires \mathfrak{R}' , \mathfrak{B}' , \mathfrak{O}' (p. 10) quand on voudra corriger les premières valeurs de e et γ en tenant compte des termes en $r'' - r$ (p. 14).

$$e = \frac{\theta\theta''}{2r'^3} \left(1 + \frac{\theta'' - \theta}{r'} \frac{dr'}{d\tau} \right), \quad \gamma = \theta\theta'' \left(\frac{\theta'' - \theta}{6\theta' r'^3} + \frac{\theta^3 + \theta''^3}{4\theta'^2} \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\tau} \right),$$

$$\frac{dr'}{d\tau} = \frac{r'' - r}{\theta'}, \quad \frac{r'' - r}{r'' + r} = \text{tang } \omega.$$

Toutefois la première ellipse déduite de trois observations ayant un caractère provisoire, il n'y a pas lieu de se servir de ces corrections; et le calcul des rapports $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ (p. 15), nécessaire en principe, est laissé de côté.

CHAPITRE IV.

CORRECTION DE L'ORBITE PAR LA VARIATION DES DISTANCES GÉOCENTRIQUES.

1. Les éléments d'une première orbite sont affectés d'une incertitude notable. Les astronomes trouvent avantage à perfectionner ce premier résultat par des retouches successives sans faire entrer en ligne de compte, au moins pour commencer, les perturbations et les corrections des six éléments de l'orbite. Ils emploient dans ce but la méthode dite *de la variation des distances*, qui consiste à représenter le mieux possible tous les lieux géocentriques à l'exception de deux d'entre eux qu'on prend pour base de la détermination et qui sont représentés rigoureusement.

On suppose, bien entendu, qu'on puisse compter sur les deux observations prises comme base, qui ne sont pas nécessairement les observations extrêmes; qu'elles déterminent bien l'orbite quand on se donne les distances géocentriques Δ , Δ'' ou des quantités pouvant les remplacer, et que le faisceau d'orbites varie régulièrement avec Δ , Δ'' ; de sorte que x et y représentant les corrections de Δ , Δ'' , les écarts $O - C$ entre l'observation et le calcul dépendent linéairement de x et y :

$$O - C = Ax + By.$$

Les coefficients A et B sont calculés numériquement en donnant successivement à x , y des valeurs numériques arbitraires suffisamment grandes et comparant les différences $O - C$ obtenues à ces valeurs.

Cette méthode est, en somme, celle que Pingré (1) appelle la *méthode commune*, qui a été employée par Bradley, exposée par Le Monnier dans ses *Institutions astronomiques*, par l'abbé de La Caille dans ses *Leçons d'Astronomie*, par Lalande dans son *Astronomie*....

L'expérience des dernières années a montré que les calculateurs les plus expérimentés, comme M. Coniel, auquel on doit un grand nombre d'orbites corrigées, préfèrent encore cette méthode commune; les méthodes plus savantes où l'on fait usage de quatre observations manquent de plasticité et sont d'ailleurs compliquées.

La méthode de la variation des distances suppose la détermination des éléments d'une orbite d'après deux lieux héliocentriques. De plus, il y a lieu de prévoir tout au moins le sens des corrections de Δ , Δ'' , afin de diriger utilement les essais.

On a eu en vue, dans ce qui précède, les orbites elliptiques des petites planètes. À l'égard des comètes se posent des problèmes un peu différents: détermination de l'orbite, dans l'hypothèse parabolique, en faisant varier le rapport des distances Δ , Δ'' ; détermination de l'orbite, dans l'hypothèse d'un temps de révolution donné, le rapport $\Delta'' : \Delta$ étant fixé ou susceptible de varier; dans le cas des comètes $\Delta'' : \Delta$ et $\frac{1}{a}$ sont les deux quantités qui remplacent les distances Δ , Δ'' utilisées pour les orbites des planètes. La détermination d'une orbite connaissant deux lieux géocentriques, Δ , Δ'' et $\frac{1}{a}$ se rattache à la relation générale de Lambert, comme on le verra tout à l'heure, ainsi que la détermination des éléments d'une orbite connaissant Δ , Δ'' .

2. Il faut considérer dans toute sa généralité la relation de Lambert (Chap. I, n° 4); les conditions actuelles d'observation, l'emploi des procédés photographiques autorisent à laisser passer plusieurs oppositions sans observer une petite planète.

Si la planète M (*fig. 1*) a fait plusieurs révolutions depuis la première position, il est facile de voir les changements à introduire dans les relations de la page 4.

Réunit-on, pour les deux dernières relations, les quantités dépendant de a dans un seul membre; remarque-t-on que $\varepsilon - \sin \varepsilon$, $\delta - \sin \delta$ augmentent avec $\frac{1}{a}$, qu'il en est de même de $\varepsilon - \sin \varepsilon - (\delta - \sin \delta)$, on a à résoudre des équations dont les premiers membres augmentent d'une manière continue avec $\frac{1}{a}$. Les

(1) *Cométographie*, t. II, p. 423.

essais pour α seront facilités par une Table auxiliaire (TIETJEN, *A. N.*, 1463); on a

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = \frac{1}{3} B \frac{\sin^3 \frac{\varepsilon}{2}}{\left(\cos \frac{1}{4} \varepsilon\right)^{\frac{12}{5}}}$$

(log B est donné en unités de la septième décimale).

$\frac{\varepsilon}{2}$	log B.	$\frac{\varepsilon}{2}$	log B.	$\frac{\varepsilon}{2}$	log B.
0. 0'.....		10.....	13	23. 0'.....	369
3.20.....	0	11.....	19	30.....	402
5.26.....	1	12.....	27	24. 0.....	437
6.33.....	2	13.....	38	30.....	475
7. 2.....	3	14.....	50	25. 0.....	516
7.30.....	4	15.....	66	30.....	559
7.55.....	5	16.....	86	26. 0.....	604
8.16.....	6	17.....	109	30.....	653
8.36.....	7	18.....	138	27. 0.....	704
8.53.....	8	19.....	171	30.....	758
9. 9.....	9	20.....	210	28. 0.....	815
9.23.....	10	21.....	256	30.....	876
9.36.....	11	22.....	308	29. 0.....	940
9.49.....	12	23.....	369	30.....	1007
				30. 0.....	1078

Cette Table tient lieu de la Table XVII à la fin du Tome II du *Traité d'Oppolzer*.

Si α est très grand, il convient d'employer les développements en séries; l'équation de Lambert, en posant

$$80 \left\{ k(t'' - t) - \frac{1}{6} [(r + r'' + x)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r'' - x)^{\frac{3}{2}}] \right\} = A,$$

$$[(r + r'' + x)^{\frac{5}{2}} \mp (r + r'' - x)^{\frac{5}{2}}] = B,$$

$$\frac{15}{112} [(r + r'' + x)^{\frac{7}{2}} \mp (r + r'' - x)^{\frac{7}{2}}] = C,$$

$$\frac{25}{1152} [(r + r'' + x)^{\frac{9}{2}} \mp (r + r'' - x)^{\frac{9}{2}}] = D,$$

$$\frac{175}{45056} [(r + r'' + x)^{\frac{11}{2}} \mp (r + r'' - x)^{\frac{11}{2}}] = E,$$

s'écrit

$$A = B \frac{1}{\alpha} + C \frac{1}{\alpha^2} + D \frac{1}{\alpha^3} + E \frac{1}{\alpha^4} + \dots;$$

il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que le mouvement héliocentrique est $< 180^\circ$ ou compris entre 180° et 360° . Pose-t-on, de plus,

$$A : B = \alpha, \quad - C : B = \beta, \quad - D : B = \gamma, \quad - E : B = \delta, \quad \dots,$$

on obtient, en renversant la série,

$$\frac{1}{a} = \alpha + \alpha^2 \beta + \alpha^3 (2\beta^2 + \gamma) + \alpha^4 (5\beta^3 + 5\beta\gamma + \delta) + \dots$$

La relation de la page 68 servirait pour déduire α de $r + r''$ et d'une hypothèse sur α dans le cas d'un mouvement héliocentrique compris entre 180° et 360° ; le cas d'un mouvement héliocentrique $< 180^\circ$ sera résolu par les Tables de Marth.

Il reste alors à traiter la première relation, c'est-à-dire le problème de la détermination d'une orbite connaissant deux positions héliocentriques de l'astre et le temps employé pour passer de l'une à l'autre, l'angle décrit étant d'ailleurs $< 180^\circ$.

Ce problème fondamental, dont se sont occupés Gauss, Encke, Hansen⁽¹⁾, etc., est celui de la résolution de l'équation de Lambert quand les observations ne sont pas très distantes. Gauss y est arrivé, de la manière la plus élégante, en passant par l'intermédiaire du rapport du secteur au triangle (p. 16); Marth a, d'autre part, publié des Tables déjà mentionnées permettant d'obtenir α au moyen d'essais, dans le cas d'orbites allongées⁽²⁾.

Remarquons qu'une valeur approchée du rapport $\eta = \frac{k(t'' - t)\sqrt{p}}{rr'' \sin(\varphi'' - \varphi)}$ est donnée par la formule de la page 17, en remplaçant $\frac{1}{Z^2}$ par $\frac{\alpha^2}{2\theta^2}$, aux termes près du sixième ordre; mais la question est de tirer η de l'équation de Lambert transformée, avec toute la précision des Tables.

L'équation (7) du Chapitre I donne

$$e \cos G = \cos g - \frac{\sqrt{rr''}}{\alpha} \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2},$$

de sorte que l'équation (3), d'où a déjà été déduite l'équation de Lambert, devient

$$n(t'' - t) = 2g - 2 \sin g \cos g + 2 \frac{\sqrt{rr''}}{\alpha} \sin g \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2};$$

(1) Consulter le Manuel de Klinkerfues pour ces travaux.

(2) M. N. Herz a fait aussi connaître (*A. N.*, 2530) une transformation de l'équation de Lambert dans le cas d'orbites peu allongées.

A cause de $n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$, il vient donc une relation entre g et \sqrt{a} , algébrique par rapport à \sqrt{a} .

L'équation (8) donne

$$\sqrt{p} \sin g = \frac{\sqrt{rr''}}{\sqrt{a}} \sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2}$$

et, à cause de l'expression de η ,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{p}{rr''}} \frac{\sin g}{\sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2}} = 2\sqrt{rr''} \frac{\cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \sin g}{k(t'' - t)} \eta,$$

relation entre $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sin g$ et η ; de sorte qu'en substituant l'expression de $\frac{1}{\sqrt{a}}$, on a une relation entre η et g , du troisième degré par rapport à η ,

$$(1) \quad \frac{\eta^3 - \eta^2}{m} = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \quad \text{où} \quad m = \frac{[k(t'' - t)]^2}{\left(2\sqrt{rr''} \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}\right)^3}.$$

On trouve une seconde relation entre η et g en combinant la relation

$$\frac{2e}{p} \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r''} - \frac{2}{p} \quad (\text{p. 20})$$

avec une autre déduite des équations du haut de la page 4,

$$\frac{\sqrt{rr''}}{a} \cos \frac{\varphi + \varphi''}{2} = (1 - e) \cos \frac{E}{2} \cos \frac{E''}{2} - (1 + e) \sin \frac{E}{2} \sin \frac{E''}{2} = \cos G - e \cos g$$

ou, en substituant la valeur de $\cos G$ déduite de (7), page 4,

$$\frac{\sqrt{rr''}}{a} e \cos \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \cos g - \frac{\sqrt{rr''}}{a} \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} - e^2 \cos g,$$

$$\sqrt{rr''} e \cos \frac{\varphi + \varphi''}{2} = p \cos g - \sqrt{rr''} \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2};$$

il vient

$$\frac{2}{\sqrt{rr''}} \cos g \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} - \frac{2}{p} \cos^2 \frac{\varphi'' - \varphi}{2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r''} - \frac{2}{p},$$

$$\frac{1}{p} = \frac{r + r'' - 2\sqrt{rr''} \cos g \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}}{2rr'' \sin^2 \frac{\varphi'' - \varphi}{2}} = \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{k(t'' - t)}{rr'' \sin(\varphi'' - \varphi)} \right]^2;$$

la relation s'écrit

$$(II) \quad \eta^2 = \frac{k^2(t'' - t)^2}{2rr'' \cos^2 \frac{\nu'' - \nu}{2}} \frac{1}{r + r'' - 2\sqrt{rr''} \cos g \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}} = \frac{m}{l + \sin^2 \frac{g}{2}},$$

en posant

$$l = \frac{r + r'' - 2\sqrt{rr''} \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}}{4\sqrt{rr''} \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}};$$

à cause de $x^2 = \left(r + r'' - 2\sqrt{rr''} \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}\right) \left(r + r'' + 2\sqrt{rr''} \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}\right)$ et, en introduisant ω' , tel que $\text{tang } \omega = \sin \omega'$ (p. 34),

$$l = \frac{x^2}{2(r + r'')^2 \cos \omega' \cos \frac{\nu'' - \nu}{2} \left(1 + \cos \omega' \cos \frac{\nu'' - \nu}{2}\right)}$$

Cela posé, Gauss réduit le rapport

$$X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$$

en série procédant suivant les puissances de $\sin^2 \frac{g}{2} = x$, et il écrit

$$\frac{10}{9} \frac{1}{X} = \frac{5}{6} - x + \xi,$$

ξ étant une très petite quantité du quatrième ordre, puis, éliminant x entre les équations (I) et (II), il obtient, pour déterminer η , l'équation

$$\frac{(\eta - 1)\eta^2}{\eta + \frac{1}{9}} = h, \quad h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}.$$

Le mode de calcul est alors le suivant : En supposant d'abord $\xi = 0$, on calcule la valeur de η , ce qui s'exécute au moyen d'une Table donnant $l\eta^2$ pour h , puis $x = \frac{m}{\eta^2} - l$, ensuite le terme correctif ξ , au moyen de x , par une seconde Table, et ainsi de suite. Dans la pratique, le calcul se fait rapidement. Nous n'insisterons pas ici sur la belle analyse de Gauss.

Marth a mis la relation de Lambert sous la forme (π module = 0,43429).

$$\log(t'' - t) = \log x + \frac{1}{2} \log(r + r'') + \log Q + \frac{4Q_1}{\pi} \log \frac{1}{1 - \frac{r}{r + r''}} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 Q_2 R,$$

et il a donné des Tables numériques pour le calcul de lQ , lQ_1 , lQ_2 , utilisables dans le cas des comètes à courte période, si le mouvement héliocentrique n'est pas trop grand (1).

Avec les Tables de Marth, on peut obtenir, si r , r'' , x sont supposés connus, la valeur de a par des essais ou, partant d'une certaine valeur de a , procéder comme on a vu dans le cas des orbites paraboliques, en déduisant x de $r + r''$. La différentielle de $t'' - t$ en fonction de $d(r + r'')$, dx , da s'exprime simplement. Soit posé pour un instant

$$\sin \chi = \frac{x}{r + r''}, \quad \log V = \frac{4Q_1}{\partial \mathcal{U}} \log \frac{1}{1 - \frac{r + r''}{4a}} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 Q_2 R,$$

la différentielle de la relation

$$t'' - t = x \sqrt{r + r''} QV = x \sqrt{r + r''} \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} \chi + 1}{6k \cos \frac{1}{2} \chi} V$$

donne

$$d(t'' - t) = \left[\sin \frac{1}{2} \chi d(r + r'') + \cos \frac{1}{2} \chi dx \right] \frac{\sqrt{r + r''}}{2k} V + x \sqrt{r + r''} \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} \chi + 1}{6k \cos \frac{1}{2} \chi} dV;$$

laisse-t-on de côté le terme en $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ supposé petit, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{U} dV}{V} = \frac{Q_1}{1 - \frac{r + r''}{4a}} \frac{r + r''}{a} \left[\frac{d(r + r'')}{r + r''} - \frac{da}{a} \right]$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dk(t'' - t)}{\sqrt{r + r''} x V} &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \chi \frac{dx}{x} + \frac{1}{4 \cos \frac{1}{2} \chi} \frac{d(r + r'')}{r + r''} \\ &+ \frac{Q_1}{1 - \frac{r + r''}{4a}} \frac{r + r''}{a} \left(\frac{1}{3} \cos \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{6} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \chi} \right) \left[\frac{d(r + r'')}{r + r''} - \frac{da}{a} \right]. \end{aligned}$$

3. Dans la méthode de la variation des distances, il convient d'attribuer aux distances Δ , Δ'' des variations arbitraires dans le sens de celles que l'on cherche et plutôt supérieures en valeur absolue. Il est indiqué pour cela de recourir aux relations existant entre les distances Δ , Δ'' et les coordonnées géocentriques (p. 111-112); quand l'arc héliocentrique décrit n'est pas trop grand, on peut

(1) Les Tables données primitivement par Marth (*A. N.*, 1557-1560) ont été complétées sous ce rapport (*Bull. Astr.*, t. XVIII, p. 127).

supposer que les quantités γ , e ne varient pas d'une hypothèse à une autre et peuvent être regardées comme constantes.

Appliquée à la correction de l'orbite d'Éros, prise plus loin comme exemple, la relation en $\cos \delta \sin(\alpha - \alpha')$... de la page 11, se trouve avoir les deux coefficients de Δ , Δ'' de même signe à cause du retour de la planète sur elle-même, de la deuxième observation à celle de septembre; la comparaison de la première hypothèse avec l'observation montre que $\sin(\alpha - \alpha')$, $\sin(\alpha'' - \alpha')$ varient dans le même sens en augmentant de $\frac{1}{100}$ environ; Δ et Δ'' , que nous supposons toujours varier dans le même sens, comme par suite d'un transport de l'orbite, devront diminuer (la variation des autres quantités étant regardée comme négligeable) d'une quantité comparable aux centièmes; on a pris 0,06 en forçant; on fera varier Δ , Δ'' de $-0,06$. L'exemple d'Oppolzer (t. II, p. 484) est dans le même cas.

À défaut de la relation ci-dessus, dont les deux termes ont des signes contraires, si le mouvement de la planète n'a pas changé de sens, on peut utiliser soit la relation de la page 11 en $\delta - \delta'$..., soit la détermination du petit cercle passant par trois positions géocentriques (p. 56): quand la trajectoire diffère peu d'un grand cercle, $\tan \nu$ est grand; les Δ varient surtout avec $\tan \nu$; le calcul du petit cercle est peu de chose en comparaison des calculs nécessités par une hypothèse.

D'une manière générale, la variation du lieu géocentrique (α' , δ') en fonction de $d\Delta$, $d\Delta''$, pour une date autre que celles des deux observations de la base, s'obtiendra en différenciant les relations

$$c'x' = cx + c''x'', \quad \dots \quad (\text{p. 9});$$

la différentielle introduit, outre dr , dr'' , $d(\nu'' - \nu)$, ou dx si l'on préfère, $d(\nu' - \nu)$, $d(\nu'' - \nu')$ et dr' ; les relations de Lambert propres aux combinaisons deux à deux des observations et la relation suivante, déduite de celle de la page 17,

$$\theta' dr'^2 = \theta dr^2 + \theta'' dr''^2 - \frac{\theta\theta'\theta''}{r'} \left(\frac{dr'}{r'} - \frac{r'}{a} \frac{da}{a} \right),$$

permettent de tout exprimer en fonction de dr , dr'' ou de $d\Delta$, $d\Delta''$. Ayant les variations dx' ..., les relations $x' + X' = \Delta' \cos \delta' \cos \alpha'$... différenciées conduiront aux variations géocentriques $d\alpha'$, $d\delta'$.

Admettons, pour simplifier, dans le cas des planètes, que $d\Delta = d\Delta''$, ce qui revient à un transport de l'orbite; que la variation du lieu géocentrique dépende exclusivement de la variation du lieu héliocentrique dans le plan de l'orbite;

alors des relations différentielles données par les conditions $d(t'' - t) = 0$, $d(t' - t) = 0$, faciles à écrire, et de la relation ci-dessus qui donne dr' , relations dans lesquelles les différences

$$\frac{d(r + r'')}{r + r''} - \frac{da}{a}, \quad \frac{d(r + r')}{r + r'} - \frac{da}{a}, \quad \frac{dr'}{r'} - \frac{r'}{a} \frac{da}{a}$$

peuvent être confondues comme entrant dans des termes correctifs, on tire facilement, après élimination du terme commun renfermant da , la variation héliocentrique $d(\varphi' - \varphi)$ en fonction de dx , dr , dr'' . Si l'arc de base est peu étendu, $\cos \frac{1}{2} \chi$ est peu différent de l'unité; on arrive à la relation approchée

$$0 = \frac{r}{2} \frac{d(\varphi' - \varphi)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)} + \frac{d(r + r'')}{r + r''} - \frac{dx}{x} + \dots$$

En général, dr , dr'' ont le signe de $d\Delta$, $d\Delta''$. Si donc dx est de signe contraire à $d\Delta$, la condition est telle que

$$\frac{d(\varphi' - \varphi)}{\sin \left(\frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)} + K d\Delta = 0, \quad K > 0.$$

C'est le cas de la planète Éros; si, de plus, pour l'une des observations de la base, la première, par exemple, on est près de l'opposition, on retrouve le résultat que la correction de Δ doit être < 0 .

4. Une fois que l'on a η^2 au moyen des Tables de Gauss, ou a , soit par des essais directs, soit au moyen des Tables de Marth, on calcule p , e , $\frac{\varphi + \varphi''}{2}$ d'après les formules des pages 20, 64. Après que l'on a calculé

$$\frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' = \frac{2m \cos \omega' \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}}{\eta^2 \sin^2 \frac{\varphi'' - \varphi}{2}},$$

e , $\frac{\varphi + \varphi''}{2}$ sont déduits de

$$e \frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' \sin \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \frac{\tan \varphi}{\sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2}},$$

$$e \frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' \cos \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \frac{1}{\cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' \right);$$

le produit $\cos \omega' \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}$ figurant dans plusieurs des formules, l'écriture est

facilité en faisant $\cos \omega' \cos \frac{\nu'' - \nu}{2} = K$. Ensuite on calcule $a = p : \cos^2 \varphi$ (s'il n'est déjà obtenu) avec le contrôle (p. 4)

$$\sqrt{rr''} \sin \frac{\nu'' - \nu}{2} = \sqrt{ap} \sin g = 2\sqrt{apx(1-x)}, \quad x = \sin^2 \frac{g}{2} = \frac{m}{\eta^2} - l;$$

puis les deux anomalies excentriques E, E'' et les anomalies moyennes M, M'' , avec le contrôle important : $M'' - M = \mu(t'' - t)$.

La vérification consiste à s'assurer que les éléments trouvés a, e, p, M sont tels que l'on retrouve, pour les dates t et t'' , les deux rayons vecteurs r, r'' , ainsi que l'angle compris $\nu'' - \nu$ ou la corde $z, r + r'', (r'' - r) : (r + r'') = \text{tang } \omega$,

$$\frac{z}{2a} = \sin g \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{E + E''}{2}},$$

$$\frac{r + r''}{2a} = 1 - e \cos g \cos \frac{E + E''}{2}, \quad \text{tang } \omega = \frac{2ae \sin g \sin \frac{E + E''}{2}}{r + r''}.$$

Dans le calcul de correction de l'orbite d'Éros, exécuté par M. Fayet (*A. N.*, 3530), les coordonnées rectangulaires équatoriales du Soleil sont calculées, avec la précision de la septième décimale, par les formules (*Traité d'Oppolzer*, édition Pasquier, p. 16-17),

$$\begin{aligned} X' &= R \cos L, \\ Y' &= R \sin L \cos \varepsilon - 19,3 B, \\ Z' &= R \sin L \sin \varepsilon + 44,5 B, \end{aligned}$$

où B , latitude du Soleil, est exprimée en secondes; l'interpolation de L et de $\log R$ est plus facile que celle des coordonnées rectangulaires. Il n'y aurait pas avantage, avec les coordonnées rapportées comme ici à l'équateur, de se débarrasser des latitudes du Soleil en appliquant des corrections aux ascensions droites et déclinaisons observées.

PLANÈTE DQ = ÉROS. — Équinoxe moyen 1898,0.

T. m. de Paris. Dates 1898.	Lieux normaux employés.					Coordonnées du Soleil.		
	α .	δ .	$l \cos \delta \cos \alpha$.	$l \cos \delta \sin \alpha$.	$l \sin \delta$.	X.	Y.	Z.
I. Août. 16,5.....	320.40.24,2	-6.22.25,2	1,8857933	1,7992186	1,0453707	-0,8194493	+0,5450106	+0,2364378
II. Sept. 17,5.....	309.45.11,4	-6,21.37,6	1,8031464	1,8831355	1,0444725			
III. Oct. 22,393461	311.50.18,6	-5.34.51,6	1,8220839	1,8701093	2,9879024	-0,8655473	-0,4492259	-0,1948835
IV. Nov. 14,5.....	319.18.17,1	-3.47.19,0						

Les observations prises comme base sont celles d'août et d'octobre. La comparaison du calcul et des deux autres lieux observés est effectuée dans les trois hypothèses ci-dessous; la première correspond aux valeurs de Δ , Δ'' , déduites d'une orbite provisoire, la seconde et la troisième aux valeurs de Δ , Δ'' , corrigées respectivement de $-0,06$.

Hypothèse I.....	$\Delta = 0,7617305,$	$\Delta'' = 1,0984997,$
» II.....	$\Delta = 0,7017305,$	$\Delta'' = 1,0984997,$
» III.....	$\Delta = 0,7617305,$	$\Delta'' = 1,0384997.$

On remarque que le calcul des coordonnées rectangulaires x , x'' , ..., au moyen des valeurs de Δ , Δ'' , s'effectue aisément lorsque l'on passe de la première hypothèse aux suivantes, du moment que l'on fait varier les distances d'une partie aliquote simple.

Les calculs pour une des trois hypothèses étant pareils, il suffit de donner ce qui se rapporte à l'hypothèse II.

Coordonnées rectilignes (p. 7, 19, 34).

$l \Delta \text{ cs } \delta \text{ cs } \alpha.$	$x + X.$	$X.$	$x.$	$x''.$	$x'' - x.$	$x'' + x.$	$l \Delta'' \text{ cs } \delta'' \text{ cs } \alpha''.$	$x'' + X''.$	$X''.$
$\bar{1},7319636 \dots$	$+0,5394654$	$-0,8194493$	$+1,3589147$	$+1,5948098$	$+0,2358951$	$+2,9537245$	$\bar{1},8628839$	$+0,7292625$	$-0,8655473$
$\bar{1},6453889 \dots$	$-0,4419660$	$+0,5450106$	$-0,9869766$	$-0,3653083$	$+0,6216683$	$-1,3522849$	$\bar{1},9109093$	$-0,8145342$	$-0,4492259$
$\bar{2},8915410 \dots$	$-0,0779006$	$+0,2364378$	$-0,3143384$	$+0,0880512$	$+0,4023896$	$-0,2262872$	$\bar{1},0287024$	$-0,1068323$	$-0,1948835$
$l(x''+x)(x''-x).$	$(x''+x)(x''-x).$	$\Sigma(x''-x)(x''+x).$	$l\Sigma(x''+x)(x''-x).$	$x^2.$	$(x''-x)^2.$	$(x''+x)^2.$	$\Sigma(x''+x)^2.$	$2(r^2+r''^2).$	$l2(r^2+r''^2).$
$\bar{1},8430889 \dots$	$+0,6967692$	$-0,2349591$	$\bar{1},3709922$	$0,6040353$	$\left. \begin{array}{l} 0,0556465 \\ 0,3864714 \\ 0,1619174 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 8,724490 \\ 1,828674 \\ 0,051206 \end{array} \right\}$	$10,604370$	$11,208405$	$1,0495438$
$\bar{1},9246269 \dots$	$-0,8406727$								$l(r^2+r''^2)$
$\bar{2},9593068 \dots$	$-0,0910556$								$0,7485138$
$l \sin 2\omega.$	$l(1 + \cos 2\omega).$	$l \operatorname{tg} \omega = l \sin \omega'.$	$l \cos \omega.$	$l \sqrt{2(r^2+r''^2)}.$	$l(r+r'').$	$l \cos \omega'.$	$l(r+r'') \cos \omega'.$	$l4rr''.$	$l(r''-r).$
$\bar{2},6224784 \dots$	$0,3008390$	$\bar{2},3216394$	$\bar{1},9999045$	$0,5247719$	$0,5246764$	$\bar{1},9999045$	$0,5245809$	$1,0491618$	$\bar{2},8463158$
$x'' + x.$	$\operatorname{tg} \omega (x'' - x).$	$x'' + x - \operatorname{tg} \omega (x'' - x).$	$x'' - x.$	$\operatorname{tg} \omega (x'' + x).$	$x'' - x - \operatorname{tg} \omega (x'' + x).$	$l(x'' + x).$	$l(x'' - x).$	$l \operatorname{tg} \omega (x'' - x).$	$l \operatorname{tg} \omega (x'' + x).$
$+2,9537245 \dots$	$-0,0049472$	$+2,9586717$	$+0,2358951$	$-0,0619454$	$+0,2978405$	$0,4703700$	$\bar{1},3727189$	$\bar{3},6943583$	$\bar{2},7920094$
$-1,3522849 \dots$	$-0,0130376$	$-1,3392473$	$+0,6216683$	$+0,0283601$	$+0,5933082$	$0,1310682$	$\bar{1},7935587$	$\bar{2},1151981$	$\bar{2},4527076$
$-0,2262872 \dots$	$-0,0084389$	$-0,2178483$	$+0,4023896$	$+0,0047457$	$+0,3976439$	$\bar{1},3546600$	$\bar{1},6046468$	$\bar{3},9262862$	$\bar{3},6762994$

Calcul de $\frac{v''-v}{2}$ (p. 19), η , $\frac{v''+v}{2}$, ... (p. 70, 71, 74, 75).

$l = +0,01404948$, $\frac{5}{6} + l = 0,8473828$.

					1 ^{er} lieu.	2 ^e lieu.
$l(r''-r) \dots$	$\bar{2},8463158$	K	$0,9726691$	$l() \sin \frac{v''+v}{2}$	$\bar{2},9574678$	v 184°39'52",79 211°24'41",95
$l(r''-r)^2 \dots$	$\bar{3},6926316$	$l(1+K)$	$0,2950542$		$\frac{v}{2}$	$92^{\circ}19'56",40$ $105^{\circ}42'20",98$
$l[x^2-(r''-r)^2]$	$\bar{1},7775049$	lK	$\bar{1},9879651$		$l \tan \frac{v}{2}$	$1,3900921$ $0,5509892$
$l4r'' \dots$	$1,0491618$	l_2	$0,3010300$	$l() \cos \frac{v''+v}{2}$	$\bar{1},4447085$	$l \lg \left(45^{\circ} - \frac{\varphi}{2} \right)$ $\bar{1},8981067$ $\bar{1},8981067$
$l \sin^2 \frac{v''-v}{2} \dots$	$\bar{2},7283431$	$l(r+r'')^2$	$1,0493528$	$l \tan \frac{v''+v}{2}$	$\bar{1},5127593$	$l \tan \frac{E}{2}$ $1,2881988$ $0,4490959$
$l \sin \frac{v''-v}{2} \dots$	$\bar{1},3641716$	$\text{colog} x^2$	$0,2189377$	$\frac{v''+v}{2}$	$198^{\circ} 2'17",37$	$\frac{E}{2}$ $92^{\circ}56'53",11$ $109^{\circ}34'22",74$
$l \cos \frac{v''-v}{2} \dots$	$\bar{1},9880606$	$\text{colog} l$	$1,8523398$	$\frac{v''-v}{2}$	$13^{\circ}22'24",58$	E $185^{\circ}53'46",22$ $219^{\circ} 8'45",48$
$l \tan \frac{v''-v}{2} \dots$	$\bar{1},3761110$	$\log l$	$\bar{2},1476602$	$l()$	$\bar{1},4665963$	$l \sin E$ $\bar{1},0116807$ $\bar{1},8002345$
$l \cos \omega' \cos \frac{v''-v}{2} = lK$	$\bar{1},9879651$	lK	$\bar{1},9879651$	$l \sqrt{rr''} \cos \omega' : p$	$0,1041029$	$l(e'')$
$l(r+r'')K \dots$	$0,5126415$	$lm : \sin^2 \frac{v''-v}{2}$	$\bar{1},8556626$	$le = \sin \varphi$	$\bar{1},3624934$	$l(e \sin E)''$ $3,6885992$ $4,4771530$
$l(r+r'')^2 K^3 \dots$	$1,5379245$	l_2	$0,3010300$	$l \sqrt{rr''} \cos \omega'$	$0,2234554$	$(e \sin E)'$ $-1^{\circ}21'22",02$ $-8^{\circ}20' 2",19$
$lk^2(t''-t)^2 \dots$	$0,1219302$	$\text{colog} \eta^2$	$\bar{1},9594452$	lp	$0,1193525$	M $187^{\circ}15' 8,24$ $227^{\circ}28'47",67$
$lm \dots$	$\bar{2},5840057$	$l \frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega'$	$0,1041029$	$l \cos \varphi$	$\bar{1},9881551$	$la^{\frac{3}{2}}$ $0,2145635$
$lm : \sin^2 \frac{v''-v}{2}$	$\bar{1},8556626$	$\frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega'$	$0,1041029$	$l \cos^2 \varphi$	$\bar{1},9763102$	lk'' $3,5500066$
		$1 - \frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega'$	$-0,2708751$	la	$0,1430423$	ln $3,3354431$
		$l \left(1 - \frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' \right)$	$\bar{1},4327691$	$la^{\frac{1}{2}}$	$0,0715212$	$l(t''-t)$ $1,8953837$
		$l \cos \frac{v''-v}{2}$	$\bar{1},9880606$	$l \tan \varphi$	$\bar{1},3743383$	$l(M''-M)$ $5,1608268$
				φ	$13^{\circ}19'15",46$	$M''-M$ $40^{\circ}13'39",4$
				$\frac{\varphi}{2}$	$6^{\circ}39'37",73$	id. direct $40^{\circ}13'39",43$

Calcul des constantes de Gauss (p. 19, 34).

$l(r+r'') \cos^2 \omega' \cos \frac{v''-v}{2} = 0,5125460$, $l(r+r'') \cos^2 \omega' \sin \frac{v''-v}{2} = \bar{1},8886570$, $\Sigma \sin^2 \alpha = 2,0000002$, $\frac{1}{2} \Sigma \sin^2 \alpha \sin^2 \left(A' + \frac{v''+v}{2} \right) = -0,0000001$.

$l[x''+x$ $- \text{tg} \omega(x''-x)]$	$l[x''-x$ $- \text{tg} \omega(x''+x)]$	$l \text{sn} \alpha \text{sn} \left(A' + \frac{v''+v}{2} \right)$	$l \text{sn} \alpha \text{cs} (A'+)$	$l \text{tg} \left(A' + \frac{v''+v}{2} \right)$	$A' + \frac{v''+v}{2}$	A'	$l \sin \alpha$	
$0,4710968 \dots$	$\bar{1},4739837$	$\bar{1},9585508$	$\bar{1},9641900$	$\bar{1},5909659$	$0,3732241$	$+67^{\circ} 3' 3",65$	$229^{\circ} 0'45",50$	$\bar{1},9943608$
$0,1268607 \dots$	$\bar{1},7732804$	$\bar{1},6143147$	$\bar{1},9450431$	$\bar{1},8846234$	$\bar{1},7296913$	$-28^{\circ}13'12",87$	$133^{\circ}44'28",98$	$\bar{1},9395803$
$\bar{1},3381542 \dots$	$\bar{1},5994943$	$\bar{2},8256082$	$\bar{1},9963471$	$\bar{1},7108373$	$\bar{1},1147709$	$-7^{\circ}25'15",18$	$154^{\circ}32'26",67$	$1,7144902$

Calcul des autres lieux.

1° Date 1898 Sept. 17, 5, M = 206°29'45"89, E = 201°37'47"82, $l\frac{r}{a} = 0,0842837$, $lr = 0,2273260$.

$l \sin E.$	$l \cos E.$	$\cos E.$	$\cos E - e.$	$l\frac{r}{a} \cos v.$		$l\frac{r}{a} \sin v.$	$l \tan v.$	$v.$
$\bar{T}_n 5665677 \dots$	$\bar{T}_n 9682886$	-0,9295839	-1,1599897	0,06444542	$\bar{T}_n 9801705$	$\bar{T}_n 4704391$	$\bar{T}_n 5547228$	197°10'57",69
A' + v.	$l \sin(A' + v).$	$lr \sin \alpha.$	$lx.$	$x.$	X.	$x + X.$	$l(x + X).$	$\alpha = 309^\circ 31' 58",62. \delta = -6^\circ 20' 57",60.$
66° 11' 43",97.	$\bar{T}_n 9613871$	0,2216867	0,1830739	+1,5243123	-1,0006672	+0,5236451	$\bar{T}_n 7190370$	$l \tan \alpha$ 0,0833867
330° 55' 27",45.	$\bar{T}_n 6866049$	0,1669063	$\bar{T}_n 8535112$	-0,7136926	+0,0792042	-0,6344884	$\bar{T}_n 8024237$	$l \tan \delta$ $\bar{T}_n 0463883$
351° 43' 25",14.	$\bar{T}_n 1582048$	$\bar{T}_n 9418162$	$\bar{T}_n 1000210$	-0,1258986	+0,0343584	-0,0915402	$\bar{T}_n 9616119$	$l \Delta \cos \delta$ $\bar{T}_n 9152236$ $l \Delta$ $\bar{T}_n 9178957$

2° Date 1898 Nov. 14, 5, M = 241°22'31"62, E = 231°6'5"18, $l\frac{r}{a} = 0,0586848$, $lr = 0,2017271$.

$l \sin E.$	$l \cos E.$	$\cos E.$	$\cos E - e.$	$l\frac{r}{a} \cos v.$		$l\frac{r}{a} \sin v.$	$l \tan v.$	$v.$
$\bar{T}_n 8911242 \dots$	$\bar{T}_n 4979204$	-0,6279436	-0,8583494	$\bar{T}_n 9336641$	$\bar{T}_n 8749793$	$\bar{T}_n 8205944$	$\bar{T}_n 8792792$	221°25'18",78
A' + v.	$l \sin(A' + v).$	$lr \sin \alpha.$	$lx.$	$x.$	X.	$x + X.$	$l(x + X).$	$\alpha = 319^\circ 12' 17",16. \delta = -3^\circ 50' 28",24.$
90° 26' 5",06.	$\bar{T}_n 9999875$	0,1960879	0,1960754	+1,5706355	-0,5997239	+0,9709116	$\bar{T}_n 9871797$	$l \tan \alpha$ $\bar{T}_n 9360267$
355° 9' 48",54.	$\bar{T}_n 9258942$	0,1413074	$\bar{T}_n 0672016$	-0,1167351	-0,7211923	-0,8379274	$\bar{T}_n 9232064$	$l \tan \delta$ $\bar{T}_n 8269930$
15° 57' 46",23.	$\bar{T}_n 4393547$	$\bar{T}_n 9162173$	$\bar{T}_n 3555720$	+0,2267629	-0,3128719	-0,0861090	$\bar{T}_n 9350485$	$l \Delta \cos \delta$ 0,1080555 $l \Delta$ 0,1090322

Les positions observées de l'astre pour les dates autres que celles des observations servant de base, les mêmes positions calculées dans les trois hypothèses et les écarts O — C sont renfermés dans le Tableau ci-dessous :

	Premier lieu (Sept. 17, 5).		Deuxième lieu (Nov. 14, 5).	
Observation	$\alpha 309.45'.11",40$	$\delta - 6.21'.37",60$	$\alpha 319.18'.17",10$	$\delta - 3.47'.19",00$
Hypothèse I	309.52.24,72	- 6.21.23,96	319.12.18,36	- 3.48. 2,86
» II	309.31.58,62	- 6.20.57,67	319.12.17,16	- 3.50.28,24
» III	309.53.18,49	- 6.22.31,06	319.30.48,18	- 3.43. 1,92
<i>Ecarts O — C.</i>				
Hypothèse I	- 7'.13".38 = - 433",38	- 13",64	+ 5'.58",74 = + 358",74	+ 43",86
» II	+ 13.12,78 = + 792,78	- 39,93	+ 5.59,94 = + 359,94	+ 3. 9,21 = + 189,24
» III	- 8. 7,09 = - 487,09	+ 53,06	- 12.31,08 = - 751,08	- 4.17,11 = - 257,08

On passe de l'hypothèse I à l'hypothèse II en prenant $d\Delta = -0,06$,

» I » III » $d\Delta'' = -0,06$.

Appelons x et y les fractions de $-0,06$ dont il faut faire varier Δ et Δ'' pour arriver à une représentation exacte des quatre lieux; nous avons immédiatement les quatre équations de condition (en multipliant tous les nombres par 100) :

$$\begin{array}{llll} \text{Premier lieu} \dots\dots\dots & \alpha & 122616x - 5371y - 43338 = 0, \\ & \delta & 2629x - 6710y + 1364 = 0, \\ \text{Deuxième lieu} \dots\dots\dots & \alpha & 120 - 110982y + 35874 = 0, \\ & \delta & 14538 - 30094y + 4386 = 0. \end{array}$$

Suivant la méthode des moindres carrés, les valeurs de x , y pour un système d'équations de condition telles que

$$ax + by - n = 0, \quad a'x + b'y - n' = 0, \quad \dots,$$

s'obtiennent au moyen des équations dites *finales*

$$(aa)x + (ab)y - (an) = 0, \quad (ab)x + (bb)y - (bn) = 0,$$

où, d'une manière générale,

$$(AB) = AB + A'B' + A''B'' + \dots$$

M. Fayet a obtenu

$$\begin{array}{ll} x = +0,3676069, & d\Delta = -0,0220564; \\ y = +0,3236972, & d\Delta = -0,0194218, \end{array}$$

avec ces résidus pour les équations de condition

$$-0'',02, \quad +1'',58, \quad -0'',06, \quad -0'',09.$$

Enfin le calcul final, effectué avec les distances corrigées, a donné

$$\begin{array}{ll} \text{Premier lieu (Sept. 17,5).} & \text{Deuxième lieu (Nov. 14,5).} \\ \alpha 309^{\circ}45'14'',0 & \delta - 6^{\circ}21'36'',1 & \alpha 319^{\circ}18'6'',3 & \delta - 3^{\circ}47'23'',9; \end{array}$$

il subsiste les écarts suivants dans le sens O — C :

$$-2'',6, \quad -1'',5, \quad +10'',8, \quad +4'',9.$$

A l'égard du traitement des équations de condition, il y a avantage, en tant qu'il s'agit d'un procédé de calcul, à modifier la règle stricte des moindres

carrés, comme l'indique Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. I, p. 135-137) et aussi Tisserand (*Mécanique céleste*, t. III, p. 414), en arrondissant les multiplicateurs, en prenant, pour chaque inconnue, des nombres exacts d'unités ou de dixièmes, depuis 1 jusqu'à 10. Dans le cas d'une seule inconnue, il pourra même suffire de prendre comme multiplicateurs 0 ou ± 1 , en supprimant les équations où le coefficient de l'inconnue sera moindre que le tiers du plus grand coefficient et en prenant le coefficient ± 1 pour les autres (1). Ces simplifications peuvent être combinées évidemment avec les prescriptions relatives au poids des observations, chaque équation de condition devant, au préalable, être multipliée par la racine du poids admis.

5. Dans le cas des comètes, il y a intérêt à prendre a ou plutôt $\frac{1}{a}$ à la place de l'une des distances Δ, Δ'' , avec $\Delta'' : \Delta$, et à étudier la représentation des observations en faisant varier $\frac{1}{a}$ de y ; on remplacera alors x dans les équations de condition par sa valeur en y tirée de l'équation finale pour x , et l'on verra entre quelles limites y peut varier.

La *première orbite* d'une comète peut réclamer une correction pour plusieurs motifs :

- (1) La comète est reconnue comme périodique; on est amené à prendre pour $\frac{1}{a}$ une valeur déterminée au lieu de zéro;
- (2) Le rapport $\Delta'' : \Delta$ n'est pas assez exact;
- (3) Les deux causes (1) et (2) entrent en ligne.

Il est aisé de vérifier que l'adoption d'une valeur $\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta'' + \Delta} = K'$ au lieu de K revient à ajouter à l'expression primitive (p. 8)

$$\frac{x^2}{2\theta'^2} = \left(\frac{f^2}{2\theta'^2} + \frac{h^2}{2\theta'^2} K^2 \right) \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{fgP}{2\theta'^2} + \frac{hgQ}{2\theta'^2} K \right) \frac{\Delta + \Delta''}{2} + \frac{g^2}{2\theta'^2}$$

le groupe

$$(K' - K) \left[\frac{h^2}{2\theta'^2} (K + K') \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} \right)^2 - \frac{2hgQ}{2\theta'^2} \frac{\Delta + \Delta''}{2} \right];$$

Si l'on se reporte à l'équation approchée de la page 6, il est clair que les corrections apportées à K et à $\frac{1}{a}$ se combinent, d'où la nécessité de bien déter-

(1) Tisserand a justifié ce procédé par des considérations tirées du *Calcul des probabilités*. (Voir BRUNNOW, *Astronomie pratique*, p. 213; BAILLAUD, *Cours d'Astronomie*, t. I, p. 46.)

miner K et de modifier en conséquence la méthode d'Olbers, si l'on ne veut pas rester dans l'incertitude quant à la période.

L'emploi de la relation de Lambert permet d'aborder directement les problèmes (1), (2), (3) et de mettre en pratique la méthode de variation de $\frac{\Delta''}{\Delta}$ et $\frac{1}{a}$. Les formules antérieures (p. 42 et suiv.) pour les orbites paraboliques sont conservées en se débarrassant des latitudes du Soleil; il suffit d'appliquer aux ascensions droites α et aux déclinaisons δ les corrections (Cf. Oppolzer, p. 41).

$$\begin{aligned} \cos \delta \, d\alpha \dots\dots\dots & \cos \alpha \sin \varepsilon \frac{B}{\Delta}, \\ d\delta \dots\dots\dots & (\cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta \sin \alpha) \frac{B}{\Delta}; \end{aligned}$$

ε , obliquité de l'écliptique; B , latitude du Soleil en secondes; Δ , distance de l'astre à la Terre.

Les méthodes indirectes peuvent cependant rendre de bons services.

Pour (1), un transport d'orbite (on diminue $r + r''$ pour avoir une ellipse) fournit une valeur de a ; on interpole ensuite en remarquant que le transport d'orbite ne modifie que légèrement $\frac{\Delta''}{\Delta}$, puisque

$$d \frac{\Delta''}{\Delta} = \frac{\Delta \, d\Delta'' - \Delta'' \, d\Delta}{\Delta^2} = \frac{\Delta - \Delta''}{\Delta^2} d\Delta, \quad \text{si } d\Delta = d\Delta'.$$

C'est ainsi que M. Schulhof (*C. R.*, t. CXIX, p. 939), après avoir obtenu les éléments paraboliques de la comète découverte par E. Swift, le 20 novembre 1894, ayant pressenti son identité avec la comète 1844 I (De Vico), a calculé des éléments elliptiques en admettant arbitrairement une durée de révolution de 5^{ans}, 8. Une correction de $-0,08$, commune aux logarithmes de Δ et Δ'' , conduit à une ellipse où

$$\log a = 0,448474, \quad \mu = 753'', 87.$$

On conclut de là, par proportion, la correction commune des logarithmes de Δ , Δ'' pour la valeur supposée de a ; ensuite, on les modifie d'après la formule de $\Delta'' : \Delta$. On pourrait aussi bien partir de cette formule et faire varier $\frac{1}{a}$ et $\Delta + \Delta''$ [dont $\Delta'' : \Delta$ dépend (p. 37)].

Pour (3), à la place de la méthode directe, Oppolzer recommande la suivante (t. II, p. 507) :

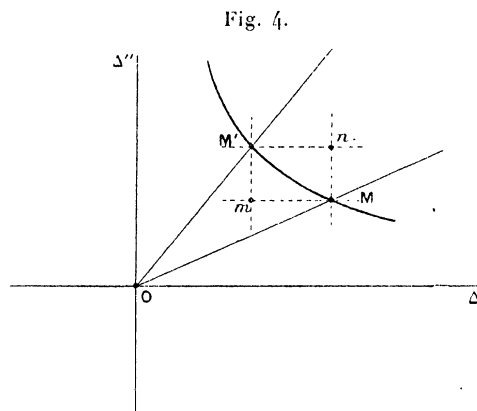
Ayant déterminé les deux paraboles pour deux valeurs voisines du rap-

G.82 APERÇU DES MÉTHODES POUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES, ETC.

port $\Delta'' : \Delta$, on combine l'une des distances Δ avec la distance Δ'' non correspondante, de sorte que l'orbite calculée avec les deux distances soit une ellipse; dans ce système de trois orbites, les deux paraboles dérivent de l'ellipse par variation des distances; la méthode exposée plus haut est donc ici applicable.

La question de savoir si l'une des deux combinaisons de distances donne une ellipse est résolue par l'affirmative. Plaçons-nous dans le cas où a est grand; il suffit de montrer que l'on a $A > 0$ (p. 68) pour l'une des deux combinaisons.

Soit, représentée par une courbe (*fig. 4*), la relation $A = 0$ entre les coor-



données Δ et Δ'' ; soient OM , OM' les deux droites répondant aux valeurs voisines du rapport des distances, M et M' étant les points de la courbe; les deux combinaisons de distances représentent deux points m et n , placés évidemment de part et d'autre de la courbe, pour lesquels A acquiert des signes contraires.

Comme le remarque Oppolzer, il convient que l'arc de courbe MM' ne se rapproche pas trop soit de Mm soit de Mn ou que les deux distances varient avec M .

TABLES.

I. — VALEURS DE $\frac{1}{r}$, $\log \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{r^3} \right)$, $r^2 = 1 - 2C\Delta + \Delta^2$.

1902AnPar...236...1C

Table with columns for C values (0,00 to 1,00) and sub-columns for Delta values (0,3 to 1,1). Each sub-column contains 'r' and 'log.' values. The table is organized in a grid format with multiple columns and rows.

I. — VALEURS DE 1/r, log 1/Δ (1 - 1/r²), r² = 1 - 2CA + Δ².

Table with columns for Δ (ranging from 1.1 to 1.9) and rows for C (ranging from -1.00 to 0.00). Each cell contains two values: 1:r and log.

I. — VALEURS DE $\frac{1}{r}$, $\log \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right)$, $r^2 = 1 - 2CA + \Delta^2$.

Table with columns for Δ and C, and sub-columns for r and log values across various Δ intervals (1,9 to 2,7).

I. — VALEURS DE 1/r, log I/A (1 - 1/r^3), r^2 = 1 - 2CΔ + Δ^2.

Table with 17 columns representing values from 1.9 to 2.7, and 2 rows per value (log and 1/r). Values are listed for 0.00 to 1.00 in increments of 0.02.

v.	II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : M.								PARTIES PROPORTIONNELLES.		
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	1195	1196	1197
0	0,00000	0,71747	1,43516	2,15328	2,87206	3,59172	4,31248	5,03455			
1	01196	72943	44712	16526	88405	60372	32450	04660	0,1	119,5	119,6
2	02391	74139	45909	17723	89604	61573	33652	05865	0,2	239,0	239,2
3	03587	75335	47105	18920	90802	62773	34855	07070	0,3	358,5	358,8
4	04783	76531	48302	20118	92001	63973	36057	08274	0,4	478,0	478,4
5	05979	77727	49498	21315	93200	65174	37260	09479	0,5	597,5	598,0
6	07174	78922	50695	22513	94399	66374	38462	10684	0,6	717,0	717,6
7	08370	80118	51891	23710	95597	67575	39665	11889	0,7	836,5	837,2
8	09566	81314	53088	24908	96796	68775	40867	13094	0,8	956,0	956,8
9	10762	82510	54284	26105	97995	69976	42070	14299	0,9	1075,5	1076,4
10	11957	83706	55481	27303	2,99194	71176	43273	15504			
11	13153	84902	56677	28500	3,00393	72377	44475	16709			
12	14349	86098	57874	29698	01592	73578	45678	17915	1198	1199	1200
13	15544	87294	59071	30895	02791	74778	46881	19120			
14	16740	88490	60267	32093	03990	75979	48084	20325	0,1	119,8	119,9
15	17936	89686	61464	33291	05189	77180	49286	21530	0,2	239,6	239,8
16	19132	90882	62660	34488	06388	78381	50489	22736	0,3	359,1	359,7
17	20327	92078	63857	35684	07587	79581	51692	23941	0,4	479,2	479,6
18	21523	93274	65054	36884	08786	80782	52895	25147	0,5	599,0	599,5
19	22719	94470	66251	38081	09985	81983	54098	26352	0,6	718,8	719,4
20	23915	95666	67447	39279	11184	83184	55301	27558	0,7	838,6	839,3
21	25110	96862	68644	40477	12383	84385	56504	28763	0,8	958,1	959,2
22	26306	98058	69841	41675	13582	85586	57707	29969	0,9	1078,2	1079,1
23	27502	0,99254	71037	42872	14782	86787	58910	31175			
24	28698	1,00451	72234	44070	15981	87988	60114	32380			
25	29893	01647	73431	45268	17180	89189	61317	33586			
26	31089	02843	74628	46465	18379	90390	62520	34792			
27	32285	04039	75825	47664	19579	91591	63723	35998	0,1	120,1	120,2
28	33481	05235	77021	48862	20778	92792	64927	37204	0,2	240,2	240,4
29	34676	06431	78218	50060	21977	93994	66130	38410	0,3	360,3	360,6
30	35872	07627	79415	51258	23177	95195	67334	39616	0,4	480,4	480,8
31	37068	08823	80612	52456	24376	96396	68537	40822	0,5	600,5	601,0
32	38264	10019	81809	53654	25576	97597	69741	42028	0,6	720,6	721,2
33	39459	11216	83006	54852	26775	3,98799	70944	43234	0,7	840,7	841,4
34	40655	12412	84203	56050	27975	4,00000	72148	44440	0,8	960,8	961,6
35	41851	13608	85400	57248	29174	01201	73351	45646	0,9	1080,9	1081,7
36	43047	14804	86596	58446	30374	02403	74555	46852			
37	44243	16000	87793	59644	31573	03604	75759	48059			
38	45438	17197	88990	60842	32773	04806	76962	49265			
39	46634	18393	90187	62040	33973	06007	78166	50472			
40	47830	19589	91384	63238	35172	07209	79370	51678	0,1	120,1	120,5
41	49026	20785	92581	64436	36372	08411	80574	52885	0,2	240,8	241,0
42	50222	21981	93778	65635	37572	09612	81778	54091	0,3	361,2	361,5
43	51417	23178	94976	66833	38772	10814	82982	55298	0,4	481,6	482,0
44	52613	24374	96173	68031	39971	12016	84186	56504	0,5	602,0	602,5
45	53809	25570	97370	69229	41171	13217	85390	57711	0,6	722,4	723,0
46	55005	26767	98567	70428	42371	14419	86594	58918	0,7	842,8	843,5
47	56201	27963	1,99764	71626	43571	15621	87798	60125	0,8	963,2	964,0
48	57396	29159	2,00961	72824	44771	16823	89002	61331	0,9	1083,6	1084,5
49	58592	30355	02158	74023	45971	18025	90206	62538			
50	59788	31552	03355	75221	47171	19227	91411	63745			
51	60984	32748	04553	76420	48371	20428	92615	64952			
52	62180	33944	05750	77618	49571	21630	93819	66159			
53	63376	35141	06947	78816	50771	22833	95024	67366	0,1	120,7	120,8
54	64572	36337	08144	80015	51971	24035	96228	68573	0,2	241,4	241,6
55	65767	37534	09342	81213	53171	25237	97432	69781	0,3	362,1	362,4
56	66963	38730	10539	82412	54371	26439	98637	70988	0,4	482,8	483,2
57	68159	39926	11736	83610	55571	27641	4,99841	72195	0,5	603,5	604,0
58	69355	41123	12933	84809	56772	28843	5,01046	73402	0,6	724,2	724,8
59	70551	42319	14131	86008	57972	30045	02251	74610	0,7	844,9	845,6
60	0,71747	1,43516	2,15328	2,87206	3,59172	4,31248	5,03455	5,75817	0,8	965,6	966,4
									0,9	1086,3	1087,2

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : LOG M.

φ .	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°
0	0,760285	0,811814	0,857992	0,899851	0,938150	0,973468	1,006254	1,036865	1,065586	1,092654
1	761194	812624	858723	900516	938762	974034	006782	037358	066050	093092
2	762102	813432	859452	901181	939373	974600	007308	037851	066544	093550
3	763008	814239	860180	901845	939983	975164	007834	038343	066977	093965
4	763912	815045	860907	902507	940592	975728	008359	038835	067400	094405
5	764815	815850	861633	903169	941200	976292	008884	039327	067902	094841
6	765715	816652	862358	903830	941808	976854	009408	039818	068364	095277
7	766614	817454	863082	904490	942415	977416	009932	040308	068825	095713
8	767511	818254	863804	905149	943021	977977	010455	040798	069286	096149
9	768406	819052	864525	905807	943626	978538	010977	041287	069747	096584
10	769299	819850	865245	906464	944230	979098	011499	041776	070207	097019
11	770190	820645	865964	907120	944834	979657	012020	042264	070666	097453
12	771080	821439	866682	907775	945436	980215	012540	042752	071125	097887
13	771968	822232	867398	908429	946038	980773	013060	043239	071584	098320
14	772854	823024	868114	909082	946639	981330	013580	043726	072042	098753
15	773738	823814	868828	909734	947240	981887	014099	044212	072500	099186
16	774621	824602	869541	910385	947839	982443	014617	044698	072957	099618
17	775502	825390	870253	911036	948438	982998	015135	045183	073414	100050
18	776381	826176	870964	911685	949036	983552	015652	045668	073871	100482
19	777258	826960	871674	912333	949633	984106	016168	046152	074327	100913
20	778134	827743	872383	912981	950230	984659	016684	046636	074782	101344
21	779008	828525	873090	913627	950825	985212	017200	047119	075237	101774
22	779880	829305	873797	914273	951420	985763	017714	047602	075692	102204
23	780750	830084	874502	914918	952014	986314	018229	048084	076146	102633
24	781619	830862	875206	915562	952608	986865	018742	048566	076600	103063
25	782486	831638	875909	916205	953200	987415	019255	049047	077053	103491
26	783351	832413	876612	916847	953792	987964	019768	049528	077506	103920
27	784215	833187	877312	917488	954383	988512	020280	050008	077959	104348
28	785077	833959	878012	918128	954973	989060	020791	050488	078411	104776
29	785937	834730	878711	918767	955563	989607	021302	050967	078863	105203
30	786796	835499	879409	919406	956151	990154	021812	051446	079314	105630
31	787653	836268	880105	920043	956739	990700	022322	051924	079764	106056
32	788509	837035	880801	920680	957326	991245	022831	052402	080215	106482
33	789362	837800	881495	921315	957913	991789	023340	052879	080665	106908
34	790214	838565	882189	921950	958498	992333	023848	053356	081114	107333
35	791065	839328	882881	922584	959083	992877	024355	053832	081563	107758
36	791914	840089	883572	923217	959668	993419	024862	054308	082012	108183
37	792761	840850	884262	923849	960251	993961	025368	054783	082460	108607
38	793606	841609	884951	924480	960834	994503	025874	055258	082908	109031
39	794450	842367	885639	925111	961416	995043	026379	055733	083355	109455
40	795293	843123	886326	925740	961997	995583	026884	056207	083802	109878
41	796133	843879	887012	926369	962577	996123	027388	056680	084249	110301
42	796973	844633	887697	926997	963157	996662	027892	057153	084695	110723
43	797810	845385	888381	927624	963736	997200	028395	057626	085141	111145
44	798646	846137	889064	928250	964314	997737	028897	058098	085586	111567
45	799481	846887	889746	928875	964892	998274	029399	058569	086031	111988
46	800314	847636	890426	929499	965469	998811	029901	059040	086475	112409
47	801145	848384	891106	930122	966045	999346	030402	059511	086919	112829
48	801975	849130	891785	930745	966620	0,999882	030902	059981	087363	113249
49	802803	849876	892463	931367	967195	1,000416	031402	060451	087806	113669
50	803630	850619	893139	931988	967769	000950	031901	060920	088249	114088
51	804455	851362	893815	932608	968342	001483	032400	061389	088691	114508
52	805279	852104	894490	933227	968914	002016	032898	061857	089133	114926
53	806101	852844	895163	933845	969486	002548	033396	062325	089575	115345
54	806921	853583	895836	934463	970057	003079	033893	062792	090016	115762
55	807740	854321	896507	935079	970627	003610	034389	063259	090456	116180
56	808558	855058	897178	935695	971197	004140	034886	063725	090897	116597
57	809374	855793	897848	936310	971766	004669	035381	064191	091337	117014
58	810189	856527	898516	936924	972334	005198	035876	064657	091776	117431
59	811002	857260	899184	937538	972901	005727	036371	065122	092215	117847
60	0,811814	0,857992	0,899851	0,938150	0,973468	1,006254	1,036865	1,065586	1,092654	1,118263

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

v.	II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.									
	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°
0	1,118263	1,142575	1,165730	1,187845	1,209021	1,229347	1,248900	1,267746	1,285946	1,303552
1	118678	142970	166107	188205	209367	229679	249220	268035	286244	303841
2	119093	143365	166483	188566	209712	230011	249539	268363	286542	304129
3	119508	143759	166860	188925	210057	230343	249858	268671	286840	304418
4	119922	144154	167236	189285	210402	230674	250178	268979	287138	304706
5	120336	144547	167611	189644	210747	231005	250497	269287	287435	304994
6	120750	144941	167987	190003	211091	231336	250815	269594	287732	305282
7	121163	145334	168362	190362	211435	231667	251134	269902	288030	305570
8	121576	145727	168736	190721	211779	231998	251452	270209	288327	305857
9	121988	146119	169111	191079	212123	232328	251770	270516	288624	306145
10	122401	146511	169485	191437	212466	232658	252088	270823	288920	306432
11	122813	146903	169859	191795	212809	232988	252406	271130	289217	306719
12	123224	147295	170233	192152	213152	233318	252724	271436	289513	307006
13	123635	147686	170606	192510	213495	233647	253041	271742	289809	307293
14	124046	148077	170979	192867	213837	233976	253358	272049	290105	307580
15	124456	148468	171352	193223	214180	234305	253675	272355	290401	307867
16	124867	148858	171725	193580	214522	234634	253992	272660	290697	308153
17	125276	149248	172097	193936	214863	234963	254309	272966	290992	308439
18	125686	149638	172469	194292	215205	235291	254625	273271	291288	308725
19	126095	150027	172841	194648	215546	235619	254941	273577	291583	309011
20	126503	150416	173212	195004	215887	235947	255257	273882	291878	309297
21	126912	150805	173583	195359	216228	236275	255573	274187	292173	309583
22	127320	151193	173954	195714	216569	236603	255889	274492	292468	309868
23	127728	151581	174325	196069	216909	236930	256204	274796	292762	310154
24	128135	151969	174695	196423	217249	237257	256520	275101	293057	310439
25	128542	152357	175065	196777	217589	237584	256835	275405	293351	310724
26	128949	152744	175435	197131	217929	237911	257150	275709	293645	311009
27	129355	153131	175804	197485	218269	238238	257464	276013	293939	311294
28	129761	153517	176173	197839	218608	238564	257779	276316	294233	311579
29	130166	153904	176542	198192	218947	238890	258093	276620	294527	311863
30	130572	154290	176911	198545	219286	239216	258407	276923	294820	312148
31	130977	154675	177279	198898	219624	239542	258721	277227	295113	312432
32	131381	155061	177647	199250	219963	239867	259035	277530	295407	312716
33	131785	155446	178015	199602	220301	240193	259349	277833	295700	313000
34	132189	155831	178383	199954	220639	240518	259662	278135	296093	313284
35	132593	156215	178750	200306	220976	240843	259975	278438	296485	313567
36	132996	156599	179117	200658	221314	241167	260288	278740	296878	313851
37	133399	156983	179484	201009	221651	241492	260601	279042	297270	314134
38	133802	157367	179850	201360	221988	241816	260914	279344	297662	314417
39	134204	157750	180216	201711	222325	242140	261226	279646	298054	314700
40	134606	158133	180582	202061	222662	242464	261539	279948	298446	314983
41	135008	158516	180948	202412	222998	242788	261851	280249	298838	315266
42	135409	158898	181313	202762	223334	243111	262163	280551	299230	315549
43	135810	159280	181679	203111	223670	243434	262474	280852	299621	315831
44	136210	159662	182043	203461	224006	243758	262786	281153	299912	316114
45	136611	160043	182408	203810	224341	244080	263097	281454	300204	316396
46	137011	160424	182772	204159	224677	244403	263409	281754	300495	316678
47	137410	160805	183136	204508	225012	244726	263720	282055	300785	316960
48	137809	161186	183500	204857	225346	245048	264030	282355	301076	317242
49	138208	161566	183864	205205	225681	245370	264341	282655	301367	317523
50	138607	161946	184227	205553	226015	245692	264652	282955	301657	317805
51	139005	162326	184590	205901	226350	246014	264962	283255	301947	318086
52	139403	162705	184953	206249	226684	246335	265272	283555	302237	318367
53	139801	163084	185315	206596	227017	246656	265582	283854	302527	318648
54	140198	163463	185677	206943	227351	246977	265892	284154	302817	318929
55	140595	163842	186039	207290	227684	247298	266201	284453	303106	319210
56	140992	164220	186401	207637	228017	247619	266510	284752	303396	319491
57	141388	164598	186762	207984	228350	247940	266820	285050	303685	319771
58	141784	164976	187124	208330	228683	248260	267129	285349	303974	320052
59	142180	165353	187484	208676	229015	248580	267438	285648	304263	320332
60	1,142575	1,165730	1,187845	1,209021	1,229347	1,248900	1,267746	1,285946	1,303552	1,320612

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

ν .	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°
0	1,320612	1,337168	1,353257	1,368915	1,384173	1,399058	1,413597	1,427814	1,441730	1,455365
1	320892	337439	353522	369173	384424	399303	413837	428048	441960	455590
2	321172	337711	353786	369430	384675	399548	414076	428283	442189	455815
3	321451	337983	354050	369687	384926	399793	414316	428517	442418	456040
4	321731	338254	354314	369945	385176	400038	414555	428751	442648	456265
5	322010	338526	354578	370202	385427	400283	414794	428985	442877	456490
6	322290	338797	354842	370459	385678	400527	415033	429219	443106	456714
7	322569	339068	355106	370715	385928	400772	415272	429453	443335	456939
8	322848	339339	355369	370972	386178	401016	415511	429687	443564	457163
9	323126	339610	355633	371229	386429	401261	415750	429920	443793	457388
10	323405	339881	355896	371485	386679	401505	415989	430154	444022	457612
11	323684	340151	356159	371742	386929	401749	416227	430387	444250	457836
12	323962	340422	356422	371998	387179	401993	416466	430621	444479	458060
13	324240	340692	356685	372254	387429	402237	416704	430854	444708	458285
14	324519	340962	356948	372510	387678	402481	416943	431087	444936	458509
15	324797	341232	357211	372766	387928	402725	417181	431321	445164	458733
16	325074	341502	357474	373022	388178	402968	417419	431554	445393	458956
17	325352	341772	357736	373278	388427	403212	417657	431787	445621	459180
18	325630	342042	357999	373533	388676	403455	417895	432020	445849	459404
19	325907	342311	358261	373789	388926	403699	418133	432252	446077	459628
20	326185	342581	358523	374044	389175	403942	418371	432485	446305	459851
21	326462	342850	358785	374299	389424	404185	418609	432718	446533	460075
22	326739	343119	359047	374555	389673	404428	418847	432950	446761	460298
23	327016	343388	359309	374810	389921	404671	419084	433183	446989	460522
24	327292	343657	359570	375065	390170	404914	419322	433415	447217	460745
25	327569	343926	359832	375320	390419	405157	419559	433648	447444	460968
26	327846	344195	360094	375574	390667	405400	419796	433880	447672	461192
27	328122	344464	360355	375829	390916	405642	420034	434112	447900	461415
28	328398	344732	360616	376084	391164	405885	420271	434344	448127	461638
29	328674	345000	360877	376338	391412	406127	420508	434576	448354	461861
30	328950	345268	361138	376592	391660	406370	420745	434808	448582	462084
31	329226	345537	361399	376847	391908	406612	420982	435040	448809	462306
32	329502	345805	361660	377101	392156	406854	421218	435272	449036	462529
33	329777	346072	361921	377355	392404	407096	421455	435504	449263	462752
34	330053	346340	362181	377609	392652	407338	421692	435735	449490	462975
35	330328	346608	362442	377862	392900	407580	421928	435967	449717	463197
36	330603	346875	362702	378116	393147	407822	422165	436198	449944	463420
37	330878	347142	362962	378370	393394	408063	422401	436430	450170	463642
38	331153	347410	363222	378623	393642	408305	422637	436661	450397	463864
39	331428	347677	363482	378876	393889	408547	422874	436892	450624	464087
40	331703	347944	363742	379130	394136	408788	423110	437124	450850	464309
41	331977	348210	364002	379383	394383	409029	423346	437355	451077	464531
42	332251	348477	364261	379636	394630	409271	423582	437586	451303	464753
43	332526	348744	364521	379889	394877	409512	423818	437817	451529	464975
44	332800	349010	364780	380142	395124	409753	424053	438047	451756	465197
45	333074	349277	365040	380394	395370	409994	424289	438278	451982	465419
46	333348	349543	365299	380647	395617	410235	424525	438509	452208	465641
47	333621	349809	365558	380900	395863	410475	424760	438739	452434	465862
48	333895	350075	365817	381152	396110	410716	424996	438970	452660	466084
49	334168	350341	366076	381404	396356	410957	425231	439200	452886	466306
50	334442	350607	366334	381656	396602	411197	425466	439431	453112	466527
51	334715	350872	366593	381909	396848	411438	425701	439661	453337	466749
52	334988	351138	366851	382161	397094	411678	425936	439891	453563	466970
53	335261	351403	367110	382412	397340	411918	426171	440121	453788	467191
54	335534	351668	367368	382664	397586	412158	426406	440351	454014	467413
55	335806	351933	367626	382916	397831	412398	426641	440581	454239	467634
56	336079	352198	367884	383168	398077	412638	426876	440811	454465	467855
57	336351	352463	368142	383419	398322	412878	427111	441041	454690	468076
58	336623	352728	368400	383670	398568	413118	427345	441271	454915	468297
59	336896	352993	368658	383922	398813	413358	427580	441501	455140	468518
60	1,337168	1,353257	1,368915	1,384173	1,399058	1,413597	1,427814	1,441730	1,455365	1,468739

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°
0	1,468739	1,481867	1,494766	1,507451	1,519935	1,532232	1,544354	1,556311	1,568116	1,579777
1	468939	482083	494979	507660	520141	532435	544554	556509	568311	579970
2	469180	482300	495192	507870	520348	532639	544755	556707	568507	580164
3	469401	482517	495405	508079	520554	532842	544955	556905	568702	580357
4	469621	482734	495618	508289	520761	533045	545156	557103	568898	580550
5	469842	482950	495831	508498	520967	533249	545356	557301	569093	580743
6	470062	483167	496044	508708	521173	533452	545557	557499	569288	580936
7	470282	483383	496256	508917	521379	533655	545757	557696	569484	581129
8	470503	483599	496469	509126	521585	533858	545957	557894	569679	581322
9	470723	483816	496682	509336	521791	534061	546158	558092	569874	581515
10	470943	484032	496894	509545	521997	534264	546358	558289	570069	581708
11	471163	484248	497107	509754	522203	534467	546558	558487	570264	581900
12	471383	484464	497319	509963	522409	534670	546758	558684	570459	582093
13	471603	484680	497532	510172	522615	534873	546958	558882	570654	582286
14	471823	484896	497744	510381	522821	535076	547158	559079	570849	582479
15	472043	485112	497956	510590	523026	535278	547358	559276	571044	582671
16	472263	485328	498169	510799	523232	535481	547558	559474	571239	582864
17	472482	485544	498381	511008	523438	535684	547758	559671	571434	583057
18	472702	485760	498593	511216	523643	535886	547958	559868	571629	583249
19	472921	485975	498805	511425	523849	536089	548157	560066	571824	583442
20	473141	486191	499017	511634	524054	536291	548357	560263	572018	583634
21	473360	486407	499229	511842	524260	536494	548557	560460	572213	583827
22	473580	486622	499441	512051	524465	536696	548757	560657	572408	584019
23	473799	486838	499653	512259	524670	536899	548956	560854	572602	584211
24	474018	487053	499865	512468	524876	537101	549156	561051	572797	584404
25	474237	487268	500076	512676	525081	537303	549355	561248	572992	584596
26	474456	487483	500288	512884	525286	537506	549555	561445	573186	584788
27	474676	487699	500500	513093	525491	537708	549754	561642	573381	584981
28	474894	487914	500711	513301	525696	537910	549954	561839	573575	585173
29	475113	488129	500923	513509	525901	538112	550153	562035	573769	585365
30	475332	488344	501134	513717	526106	538314	550352	562232	573964	585557
31	475551	488559	501345	513925	526311	538516	550552	562429	574158	585749
32	475770	488774	501557	514133	526516	538718	550751	562625	574352	585941
33	475988	488989	501768	514341	526721	538920	550950	562822	574547	586133
34	476207	489203	501979	514549	526926	539122	551149	563019	574741	586325
35	476425	489418	502190	514757	527130	539324	551348	563215	574935	586517
36	476644	489633	502401	514964	527335	539525	551547	563412	575129	586709
37	476862	489847	502612	515172	527540	539727	551746	563608	575323	586901
38	477080	490062	502823	515380	527744	539929	551945	563805	575517	587093
39	477299	490276	503034	515587	527949	540130	552144	564001	575711	587285
40	477517	490491	503245	515795	528153	540332	552343	564197	575905	587477
41	477735	490705	503456	516003	528358	540533	552542	564394	576099	587668
42	477953	490919	503667	516210	528562	540735	552741	564590	576293	587860
43	478171	491133	503877	516417	528766	540936	552939	564786	576487	588052
44	478389	491348	504088	516625	528970	541138	553138	564982	576681	588243
45	478607	491562	504299	516832	529175	541339	553337	565179	576875	588435
46	478824	491776	504509	517039	529379	541540	553535	565375	577068	588627
47	479042	491990	504720	517246	529583	541742	553734	565571	577262	588818
48	479260	492204	504930	517454	529787	541943	553932	565767	577456	589010
49	479477	492417	505140	517661	529991	542144	554131	565963	577650	589201
50	479695	492631	505351	517868	530195	542345	554329	566159	577843	589393
51	479912	492845	505561	518075	530399	542546	554528	566355	578035	589584
52	480130	493059	505771	518282	530603	542747	554726	566550	578230	589775
53	480347	493272	505981	518488	530807	542948	554924	566746	578424	589967
54	480564	493486	506191	518695	531010	543149	555123	566942	578617	590158
55	480782	493699	506401	518902	531214	543350	555321	567138	578811	590349
56	480999	493913	506611	519109	531418	543551	555519	567333	579004	590540
57	481216	494126	506821	519315	531621	543752	555717	567529	579197	590732
58	481433	494339	507031	519522	531825	543952	555915	567725	579391	590923
59	481650	494553	507241	519729	532029	544153	556113	567920	579584	591114
60	1,481867	1,494766	1,507451	1,519935	1,532232	1,544354	1,556311	1,568116	1,579777	1,591305

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : LogM.

v.	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°
0	1,591305	6,602708	1,613996	1,625175	1,636255	1,647243	1,658145	1,668968	1,679720	1,690406
1	591496	602897	614183	625361	636439	647425	658326	669148	679899	690584
2	591687	603086	614370	625546	636623	647607	658507	669328	680077	690761
3	591878	603275	614557	625732	636807	647790	658688	669507	680256	690939
4	592069	603464	614744	625917	636991	647972	658869	669687	680434	691116
5	592260	603653	614931	626102	637174	648154	659050	669867	680613	691294
6	592451	603842	615118	626288	637358	648337	659230	670047	680791	691471
7	592642	604031	615305	626473	637542	648519	659411	670226	680970	691649
8	592832	604220	615492	626658	637725	648701	659592	670406	681148	691826
9	593023	604409	615679	626844	637909	648883	659773	670585	681327	692004
10	593214	604597	615866	627029	638093	649065	659954	670765	681505	692181
11	593405	604786	616053	627214	638276	649248	660135	670945	681684	692358
12	593595	604975	616240	627399	638460	649430	660315	671124	681862	692536
13	593786	605163	616427	627584	638643	649612	660496	671304	682041	692713
14	593977	605352	616614	627769	638827	649794	660677	671483	682219	692891
15	594167	605541	616800	627954	639011	649976	660858	671663	682397	693068
16	594358	605729	616987	628140	639194	650158	661038	671842	682576	693245
17	594548	605918	617174	628325	639377	650340	661219	672022	682754	693423
18	594739	606106	617361	628510	639561	650522	661400	672201	682932	693600
19	594929	606295	617547	628695	639744	650704	661580	672380	683111	693777
20	595119	606483	617734	628879	639928	650886	661761	672560	683289	693954
21	595310	606672	617920	629064	640111	651068	661942	672739	683467	694132
22	595500	606860	618107	629249	640294	651250	662122	672919	683645	694309
23	595690	607048	618294	629434	640478	651431	662303	673098	683824	694486
24	595881	607237	618480	629619	640661	651613	662483	673277	684002	694663
25	596071	607425	618667	629804	640844	651795	662664	673456	684180	694841
26	596261	607613	618853	629989	641027	651977	662844	673636	684358	695018
27	596451	607801	619039	630173	641211	652159	663025	673815	684536	695195
28	596641	607990	619226	630358	641394	652340	663205	673994	684714	695372
29	596832	608178	619412	630543	641577	652522	663385	674173	684893	695549
30	597022	608366	619599	630727	641760	652704	663566	674353	685071	695726
31	597212	608554	619785	630912	641943	652886	663746	674532	685249	695903
32	597402	608742	619971	631097	642126	653067	663927	674711	685427	696080
33	597592	608930	620157	631281	642309	653249	664107	674890	685605	696258
34	597782	609118	620344	631466	642492	653431	664287	675069	685783	696435
35	597971	609306	620530	631650	642675	653612	664468	675248	685961	696612
36	598161	609494	620716	631835	642858	653794	664648	675427	686139	696789
37	598351	609682	620902	632019	643041	653975	664828	675607	686317	696966
38	598541	609870	621088	632204	643224	654157	665008	675786	686495	697143
39	598731	610058	621274	632388	643407	654338	665189	675965	686673	697320
40	598920	610246	621460	632573	643590	654520	665369	676144	686851	697497
41	599110	610433	621646	632757	643773	654701	665549	676323	687029	697673
42	599300	610621	621832	632941	643956	654883	665729	676502	687207	697850
43	599489	610809	622018	633126	644139	655064	665909	676681	687385	698027
44	599679	610997	622204	633310	644321	655245	666089	676859	687562	698204
45	599869	611184	622390	633494	644504	655427	666269	677038	687740	698381
46	600058	611372	622576	633679	644687	655608	666449	677217	687918	698558
47	600248	611560	622762	633863	644870	655789	666629	677396	688096	698735
48	600437	611747	622948	634047	645052	655971	666810	677575	688274	698912
49	600627	611935	623134	634231	645235	656152	666990	677754	688451	699088
50	600816	612122	623319	634415	645418	656333	667169	677933	688629	699265
51	601005	612310	623505	634599	645600	656515	667349	678111	688807	699442
52	601195	612497	623691	634783	645783	656696	667529	678290	688985	699619
53	601384	612685	623876	634968	645965	656877	667709	678469	689162	699796
54	601573	612872	624062	635152	646148	657058	667889	678648	689340	699972
55	601763	613059	624248	635336	646330	657239	668069	678827	689518	700149
56	601952	613247	624433	635520	646513	657420	668249	679005	689695	700326
57	602141	613434	624619	635704	646695	657602	668429	679184	689873	700502
58	602330	613621	624804	635887	646878	657783	668609	679363	690051	700679
59	602519	613809	624990	636071	647060	657964	668788	679541	690228	700856
60	1,602708	1,613996	1,625175	1,636255	1,647243	1,658145	1,668968	1,679720	1,690406	1,701032

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : LogM.

p.	58°	59'	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°
0	1,701032	1,711605	1,722130	1,732613	1,743059	1,753473	1,763860	1,774226	1,784575	1,794913
1	701209	711781	722306	732788	743233	753646	764033	774399	784748	795085
2	701386	711957	722481	732962	743407	753820	764206	774572	784920	795257
3	701562	712133	722656	733136	743580	753993	764379	774744	785093	795429
4	701739	712309	722831	733311	743754	754166	764552	774917	785265	795602
5	701916	712484	723006	733485	743928	754340	764725	775089	785437	795774
6	702092	712660	723181	733659	744102	754513	764898	775262	785610	795946
7	702269	712836	723356	733834	744275	754686	765071	775434	785782	796118
8	702445	713011	723530	734008	744449	754859	765244	775607	785954	796290
9	702622	713187	723705	734182	744623	755033	765417	775780	786127	796463
10	702797	713363	723880	734357	744797	755206	765589	775952	786299	796635
11	702975	713538	724055	734531	744970	755379	765762	776125	786471	796807
12	703151	713714	724230	734705	745144	755552	765935	776297	786644	796979
13	703328	713890	724405	734879	745318	755726	766108	776470	786816	797151
14	703504	714065	724580	735054	745492	755899	766281	776642	786988	797324
15	703681	714241	724755	735228	745665	756072	766454	776815	787161	797496
16	703857	714417	724930	735402	745839	756245	766627	776988	787333	797668
17	704033	714592	725105	735576	746013	756419	766799	777160	787505	797840
18	704210	714768	725279	735751	746186	756592	766972	777333	787678	798012
19	704386	714943	725454	735925	746360	756765	767145	777505	787850	798185
20	704562	715119	725629	736099	746534	756938	767318	777678	788022	798357
21	704739	715294	725804	736273	746707	757111	767491	777850	788195	798529
22	704915	715470	725979	736447	746881	757285	767663	778023	788367	798701
23	705091	715645	726154	736621	747054	757458	767836	778195	788539	798873
24	705268	715821	726328	736796	747228	757631	768009	778368	788712	799045
25	705444	715996	726503	736970	747402	757804	768182	778540	788884	799218
26	705620	716172	726678	737144	747575	757977	768355	778713	789056	799390
27	705797	716347	726853	737318	747749	758150	768527	778885	789228	799562
28	705973	716523	727027	737492	747922	758323	768700	779058	789401	799734
29	706149	716698	727202	737666	748096	758497	768873	779230	789573	799906
30	706325	716874	727377	737840	748270	758670	769046	779403	789745	800079
31	706501	717049	727551	738014	748443	758843	769219	779575	789918	800251
32	706678	717224	727726	738189	748617	759016	769391	779748	790090	800423
33	706854	717400	727901	738363	748790	759189	769564	779920	790262	800595
34	707030	717575	728076	738537	748964	759362	769737	780093	790434	800767
35	707206	717750	728250	738711	749137	759535	769909	780265	790607	800939
36	707382	717926	728425	738885	749311	759708	770082	780437	790779	801111
37	707558	718101	728599	739059	749484	759881	770255	780610	790951	801284
38	707735	718276	728774	739233	749658	760054	770428	780782	791124	801456
39	707911	718452	728949	739407	749831	760228	770600	780955	791296	801628
40	708087	718627	729123	739581	750005	760401	770773	781127	791468	801800
41	708263	718802	729298	739755	750178	760574	770946	781300	791640	801972
42	708439	718978	729472	739929	750352	760747	771118	781472	791813	802144
43	708615	719153	729647	740103	750525	760920	771291	781645	791985	802317
44	708791	719328	729822	740277	750699	761093	771464	781817	792157	802489
45	708967	719503	729996	740451	750872	761266	771637	781989	792329	802661
46	709143	719679	730171	740625	751046	761439	771809	782162	792502	802833
47	709319	719854	730345	740799	751219	761612	771982	782334	792674	803005
48	709495	720029	730520	740972	751392	761785	772155	782507	792846	803177
49	709671	720204	730694	741146	751566	761958	772327	782679	793018	803349
50	709847	720379	730869	741320	751739	762131	772500	782852	793191	803522
51	710023	720555	731043	741494	751913	762304	772673	783024	793363	803694
52	710199	720730	731218	741668	752086	762477	772845	783196	793535	803866
53	710374	720905	731392	741842	752259	762650	773018	783369	793707	804038
54	710550	721080	731567	742016	752433	762823	773191	783541	793879	804210
55	710726	721255	731741	742190	752606	762996	773363	783714	794052	804382
56	710902	721430	731916	742364	752780	763169	773536	783886	794224	804554
57	711078	721605	732090	742537	752953	763342	773708	784058	794396	804727
58	711254	721780	732264	742711	753126	763515	773881	784231	794568	804899
59	711430	721955	732439	742885	753300	763687	774054	784403	794741	805071
60	1,711605	1,722130	1,732613	1,743059	1,753473	1,763860	1,774226	1,784575	1,794913	1,805243

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

v.	68°	69°	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°
0	1,805243	1,815571	1,825901	1,836237	1,846585	1,856949	1,867333	1,877741	1,888178	1,898649
1	805415	815743	826073	836410	846758	857122	867506	877915	888353	898824
2	805587	815915	826245	836582	846930	857295	867679	878088	888527	898999
3	805759	816087	826417	836754	847103	857467	867852	878262	888701	899174
4	805932	816259	826590	836927	847276	857640	868026	878436	888875	899349
5	806104	816431	826762	837099	847448	857813	868199	878610	889050	899523
6	806276	816604	826934	837272	847621	857986	868372	878783	889274	899698
7	806448	816776	827106	837444	847793	858159	868546	878957	889398	899873
8	806620	816948	827278	837616	847966	858332	868719	879131	889572	900048
9	806792	817120	827451	837789	848139	858505	868892	879305	889747	900233
10	806964	817292	827623	837961	848311	858678	869065	879478	889921	900398
11	807137	817464	827795	838133	848484	858851	869239	879652	890095	900573
12	807309	817636	827967	838306	848657	859024	869412	879826	890270	900748
13	807481	817809	828140	838478	848829	859197	869585	880000	890444	900923
14	807653	817981	828312	838651	849002	859370	869759	880174	890618	901098
15	807825	818153	828484	838823	849174	859543	869932	880347	890793	901273
16	807997	818325	828656	838996	849347	859716	870106	880521	890967	901448
17	808169	818497	828829	839168	849520	859889	870279	880695	891142	901623
18	808341	818669	829001	839340	849692	860062	870452	880869	891316	901798
19	808514	818841	829173	839513	849865	860235	870626	881043	891490	901973
20	808686	819014	829345	839685	850038	860408	870799	881217	891665	902148
21	808858	819186	829518	839858	850210	860581	870972	881391	891839	902323
22	809030	819358	829690	840030	850383	860754	871146	881564	892014	902498
23	809202	819530	829862	840202	850556	860927	871319	881738	892188	902673
24	809374	819702	830034	840375	850729	861100	871493	881912	892362	902848
25	809546	819874	830207	840547	850901	861273	871666	882086	892537	903023
26	809718	820047	830379	840720	851074	861446	871840	882260	892711	903198
27	809891	820219	830551	840892	851247	861619	872013	882434	892886	903373
28	810063	820391	830723	841065	851419	861792	872186	882608	893060	903548
29	810235	820563	830896	841237	851592	861965	872360	882782	893235	903723
30	810407	820735	831068	841410	851765	862138	872533	882956	893409	903899
31	810579	820907	831240	841582	851938	862311	872707	883130	893584	904074
32	810751	821080	831412	841755	852110	862484	872880	883304	893758	904249
33	810923	821252	831585	841927	852283	862657	873054	883478	893933	904424
34	811095	821424	831757	842099	852456	862830	873227	883652	894107	904599
35	811268	821596	831929	842272	852628	863003	873401	883826	894282	904774
36	811440	821768	832102	842444	852801	863176	873574	884000	894457	904949
37	811612	821940	832274	842617	852974	863349	873748	884174	894631	905124
38	811784	822113	832446	842789	853147	863523	873921	884348	894806	905299
39	811956	822285	832618	842962	853319	863696	874095	884522	894980	905474
40	812128	822457	832791	843134	853492	863869	874268	884696	895155	905649
41	812300	822629	832963	843307	853665	864042	874442	884870	895330	905824
42	812472	822801	833135	843479	853838	864215	874616	885044	895504	906001
43	812645	822973	833308	843652	854011	864388	874789	885218	895679	906176
44	812817	823146	833480	843824	854183	864561	874963	885392	895854	906352
45	812989	823318	833652	843997	854356	864735	875136	885566	896028	906527
46	813161	823490	833825	844169	854529	864908	875310	885740	896203	906702
47	813333	823662	833997	844342	854702	865081	875483	885914	896378	906878
48	813505	823834	834169	844515	854875	865254	875657	886088	896552	907053
49	813677	824007	834342	844687	855047	865427	875831	886262	896727	907228
50	813849	824179	834514	844860	855220	865600	876004	886437	896902	907404
51	814022	824351	834686	845032	855393	865774	876178	886611	897077	907579
52	814194	824523	834859	845205	855566	865947	876352	886785	897251	907755
53	814366	824695	835031	845377	855739	866120	876525	886959	897426	907930
54	814538	824868	835203	845550	855912	866293	876699	887133	897601	908105
55	814710	825040	835376	845722	856084	866466	876873	887307	897775	908281
56	814882	825212	835548	845895	856257	866640	877046	887482	897950	908456
57	815054	825384	835720	846068	856430	866813	877220	887656	898125	908632
58	815227	825556	835893	846240	856603	866986	877394	887830	898300	908807
59	815399	825729	836065	846413	856776	867159	877567	888004	898474	908983
60	1,815571	1,825901	1,836237	1,846585	1,856949	1,867333	1,877741	1,888178	1,898649	1,909158

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

v.	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°
0	1,909158	1,919709	1,930307	1,940956	1,951662	1,962427	1,973258	1,984158	995133	2,006186
1	909334	919885	930484	941134	951841	962607	973439	984340	995316	006371
2	909509	920062	930661	941312	952019	962787	973620	984522	995500	006556
3	909685	920238	930838	941490	952198	962967	973801	984705	995683	006741
4	909860	920414	931016	941668	952377	963147	973982	984887	995867	006926
5	910036	920591	931193	941846	952556	963327	974163	985070	996051	007111
6	910211	920767	931370	942024	952735	963507	974344	985252	996234	007296
7	910387	920943	931547	942202	952914	963687	974526	985434	996418	007481
8	910562	921119	931724	942381	953093	963867	974707	985617	996602	007666
9	910738	921296	931901	942559	953272	964047	974888	985799	996785	007852
10	910914	921472	932078	942737	953452	964228	975069	985982	996969	008037
11	911089	921649	932256	942915	953631	964408	975251	986164	997153	008222
12	911265	921825	932433	943093	953810	964588	975432	986347	997337	008407
13	911440	922001	932610	943271	953989	964768	975613	986529	997521	008592
14	911616	922178	932787	943449	954168	964948	975795	986712	997705	008778
15	911792	922354	932965	943627	954347	965128	975976	986894	997888	008963
16	911967	922531	933142	943806	954526	965309	976157	987077	998072	009148
17	912143	922707	933319	943984	954706	965489	976339	987259	998256	009333
18	912319	922883	933496	944162	954885	965669	976520	987442	998440	009519
19	912494	923060	933674	944340	955064	965850	976702	987625	998624	009704
20	912670	923236	933851	944518	955243	966030	976883	987808	998808	009889
21	912846	923413	934028	944697	955422	966210	977065	987990	998992	010075
22	913022	923589	934206	944875	955602	966391	977246	988173	999176	010260
23	913197	923766	934383	945053	955781	966571	977428	988356	999360	010446
24	913373	923943	934561	945232	955960	966751	977609	988539	999544	010631
25	913549	924119	934738	945410	956140	966932	977791	988721	999728	010817
26	913725	924296	934915	945588	956319	967112	977972	988904	1,999913	011002
27	913901	924472	935093	945767	956498	967293	978154	989087	2,000097	011188
28	914076	924649	935270	945945	956678	967473	978335	989270	000281	011373
29	914252	924825	935448	946123	956857	967653	978517	989453	000465	011559
30	914428	925002	935625	946302	957037	967834	978699	989636	000649	011745
31	914604	925179	935803	946480	957216	968015	978880	989819	000833	011930
32	914780	925355	935980	946659	957395	968195	979062	990001	001018	012116
33	914956	925532	936158	946837	957575	968376	979244	990184	001202	012302
34	915132	925709	936335	947016	957754	968556	979426	990367	001386	012487
35	915307	925885	936513	947194	957934	968737	979607	990550	001571	012673
36	915483	926062	936690	947373	958113	968917	979789	990733	001755	012859
37	915659	926239	936868	947551	958293	969098	979971	990916	001939	013045
38	915835	926416	937046	947730	958472	969279	980153	991100	002124	013230
39	916011	926592	937223	947908	958652	969459	980335	991283	002308	013416
40	916187	926769	937401	948087	958832	969640	980516	991466	002493	013602
41	916363	926946	937578	948265	959011	969821	980698	991649	002677	013788
42	916539	927123	937756	948444	959191	970001	980880	991832	002862	013974
43	916715	927299	937934	948623	959371	970182	981062	992015	003046	014160
44	916891	927476	938111	948801	959550	970363	981244	992198	003231	014346
45	917067	927653	938289	948980	959730	970544	981426	992382	003415	014532
46	917243	927830	938467	949159	959910	970724	981608	992565	003600	014718
47	917419	928007	938645	949337	960089	970905	981790	992748	003784	014904
48	917595	928184	938822	949516	960269	971086	981972	992931	003969	015090
49	917771	928361	939000	949695	960449	971267	982154	993115	004154	015276
50	917948	928537	939178	949873	960628	971448	982336	993298	004338	015462
51	918124	928714	939356	950052	960808	971629	982518	993481	004523	015648
52	918300	928891	939533	950231	960988	971810	982700	993665	004708	015834
53	918476	929068	939711	950410	961168	971991	982882	993848	004893	016020
54	918652	929245	939889	950588	961348	972172	983065	994032	005077	016207
55	918828	929422	940067	950767	961528	972353	983247	994215	005262	016393
56	919004	929599	940245	950946	961707	972534	983429	994398	005447	016579
57	919181	929776	940423	951125	961887	972715	983611	994582	005632	016765
58	919357	929953	940601	951304	962067	972896	983793	994765	005817	016952
59	919533	930130	940779	951483	962247	973077	983976	994949	006001	017138
60	1,919709	1,930307	1,940956	1,951662	1,962427	1,973258	1,984158	1,995133	2,006186	2,017324

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

e.	II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.									
	88°	89°	90°	91°	92°	93°	94°	95°	96°	97°
0	2,017324	2,028551	2,039872	2,051293	2,062817	2,074452	2,086202	2,098073	2,110070	2,122201
1	017311	028739	040062	051484	063010	074647	086399	098272	110271	122404
2	017697	028927	040251	051675	063203	074842	086596	098471	110473	122607
3	017884	029115	040441	051866	063396	075037	086793	098670	110674	122811
4	018070	029303	040631	052058	063590	075232	086989	098869	110875	123014
5	018256	029491	040820	052249	063783	075427	087186	099068	111076	123218
6	018443	029679	041010	052440	063976	075622	087383	099267	111277	123421
7	018629	029867	041199	052632	064169	075817	087581	099466	111479	123625
8	018816	030055	041389	052823	064362	076012	087778	099665	111680	123828
9	019003	030243	041579	053015	064555	076207	087975	099864	111881	124032
10	019189	030431	041769	053206	064749	076402	088172	100063	112083	124236
11	019376	030620	041958	053398	064942	076597	088369	100263	112284	124439
12	019562	030808	042148	053589	065135	076793	088566	100462	112486	124643
13	019749	030996	042338	053781	065329	076988	088763	100661	112687	124847
14	019936	031184	042528	053972	065522	077183	088961	100861	112889	125051
15	020123	031373	042718	054164	065716	077378	089158	101060	113090	125255
16	020309	031561	042908	054355	065909	077574	089355	101260	113292	125458
17	020496	031749	043098	054547	066102	077769	089553	101459	113494	125662
18	020683	031937	043288	054739	066296	077965	089750	101659	113695	125866
19	020870	032126	043478	054931	066490	078160	089948	101858	113897	126070
20	021057	032314	043668	055122	066683	078356	090145	102058	114099	126274
21	021243	032503	043858	055314	066877	078551	090343	102257	114301	126479
22	021430	032691	044048	055506	067070	078747	090540	102457	114502	126683
23	021617	032880	044238	055698	067264	078942	090738	102657	114704	126887
24	021804	033068	044428	055890	067458	079138	090935	102856	114906	127091
25	021991	033257	044618	056082	067651	079333	091133	103056	115108	127295
26	022178	033445	044809	056274	067845	079529	091331	103256	115310	127500
27	022365	033634	044999	056466	068039	079725	091529	103456	115512	127704
28	022552	033822	045189	056658	068233	079921	091726	103656	115714	127908
29	022739	034011	045379	056850	068427	080116	091924	103855	115916	128113
30	022926	034200	045570	057042	068621	080312	092122	104055	116119	128317
31	023113	034388	045760	057234	068815	080508	092320	104255	116321	128522
32	023301	034577	045950	057426	069008	080704	092518	104455	116523	128726
33	023488	034766	046141	057618	069202	080900	092716	104655	116725	128931
34	023675	034955	046331	057810	069396	081096	092914	104856	116927	129136
35	023862	035143	046522	058002	069591	081292	093112	105056	117130	129340
36	024049	035332	046712	058195	069785	081488	093310	105256	117332	129545
37	024237	035521	046903	058387	069979	081684	093508	105456	117535	129750
38	024424	035710	047093	058579	070173	081880	093706	105656	117737	129954
39	024611	035899	047284	058772	070367	082076	093904	105856	117940	130159
40	024799	036088	047475	058964	070561	082272	094102	106057	118142	130364
41	024986	036277	047665	059156	070755	082468	094300	106257	118345	130569
42	025174	036466	047856	059349	070950	082665	094499	106457	118547	130774
43	025361	036655	048047	059541	071144	082861	094697	106658	118750	130979
44	025548	036844	048237	059734	071338	083057	094895	106858	118953	131184
45	025736	037033	048428	059926	071533	083253	095093	107059	119155	131389
46	025923	037222	048619	060119	071727	083450	095292	107259	119358	131594
47	026111	037411	048810	060311	071922	083646	095490	107460	119561	131799
48	026299	037600	049000	060504	072116	083842	095689	107660	119764	132004
49	026486	037790	049191	060696	072311	084039	095887	107861	119967	132209
50	026674	037979	049382	060889	072505	084235	096086	108062	120169	132414
51	026861	038168	049573	061082	072700	084432	096284	108262	120372	132620
52	027049	038357	049764	061275	072894	084628	096483	108463	120575	132825
53	027237	038547	049955	061467	073089	084825	096681	108664	120778	133031
54	027424	038736	050146	061660	073283	085022	096880	108865	120981	133236
55	027612	038925	050337	061853	073478	085218	097079	109066	121185	133442
56	027800	039115	050528	062046	073673	085415	097278	109266	121388	133647
57	027988	039304	050719	062239	073868	085612	097476	109467	121591	133853
58	028176	039493	050910	062431	074062	085808	097675	109668	121794	134058
59	028363	039683	051101	062624	074257	086005	097874	109869	121997	134264
60	2,028551	2,039872	2,051293	2,062817	2,074452	2,086202	2,098073	2,110070	2,122201	2,134469

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.										
°.	98°	99°	100°	101°	102°	103°	104°	105°	106°	107°
0	2,13466	2,16883	2,15948	2,17217	2,18505	2,19818	2,21135	2,22478	2,23840	2,25222
1	134675	147091	159659	172385	185275	198338	211579	225007	238629	252454
2	134881	147300	159870	172598	185491	198557	211801	225232	238858	252686
3	135087	147508	160081	172812	185708	198776	212023	225458	239087	252918
4	135292	147716	160291	173025	185924	198995	212246	225683	239316	253150
5	135498	147924	160502	173239	186141	199215	212468	225909	239544	253383
6	135704	148133	160713	173452	186357	199434	212691	226135	239773	253615
7	135910	148341	160924	173666	186574	199653	212913	226360	240002	253848
8	136116	148550	161135	173880	186790	199873	213136	226586	240231	254080
9	136322	148758	161346	174094	187007	200093	213358	226812	240461	254313
10	136528	148967	161558	174308	187223	200312	213581	227038	240690	254545
11	136734	149175	161769	174521	187440	200532	213804	227264	240919	254778
12	136940	149384	161980	174735	187657	200751	214027	227490	241148	255011
13	137147	149593	162191	174949	187874	200971	214249	227716	241378	255244
14	137353	149801	162403	175163	188091	201191	214472	227942	241607	255477
15	137559	150010	162614	175377	188307	201411	214695	228168	241837	255709
16	137765	150219	162825	175592	188524	201631	214918	228394	242066	255942
17	137972	150428	163037	175806	188741	201851	215141	228620	242296	256176
18	138178	150637	163248	176020	188958	202071	215364	228846	242525	256409
19	138384	150845	163460	176234	189176	202291	215587	229073	242755	256642
20	138591	151054	163671	176449	189393	202511	215811	229299	242985	256875
21	138797	151263	163883	176663	189610	202731	216034	229526	243214	257108
22	139004	151472	164095	176877	189827	202951	216257	229752	243444	257342
23	139211	151682	164308	177092	190044	203172	216480	229979	243674	257575
24	139417	151891	164518	177306	190262	203392	216704	230205	243904	257809
25	139624	152100	164730	177521	190479	203612	216927	230432	244134	258042
26	139831	152309	164942	177735	190697	203833	217151	230659	244364	258276
27	140037	152518	165154	177950	190914	204053	217374	230886	244595	258509
28	140244	152728	165366	178165	191132	204274	217598	231112	244825	258743
29	140451	152937	165578	178379	191349	204494	217822	231339	245055	258977
30	140658	153146	165790	178594	191567	204715	218045	231566	245285	259211
31	140865	153356	166002	178809	191784	204935	218269	231793	245516	259444
32	141072	153565	166214	179024	192002	205156	218493	232020	245746	259678
33	141279	153775	166426	179239	192220	205377	218717	232247	245977	259912
34	141486	153984	166638	179454	192438	205598	218941	232475	246207	260146
35	141693	154194	166850	179669	192656	205819	219165	232702	246438	260381
36	141900	154404	167063	179884	192874	206039	219389	232929	246668	260615
37	142107	154613	167275	180099	193091	206260	219613	233156	246899	260849
38	142314	154823	167487	180314	193310	206481	219837	233384	247130	261083
39	142522	155033	167700	180529	193528	206702	220061	233611	247361	261318
40	142729	155243	167912	180744	193746	206924	220285	233839	247592	261552
41	142936	155453	168125	180960	193964	207145	220510	234066	247823	261787
42	143143	155662	168337	181175	194182	207366	220734	234294	248054	262021
43	143351	155872	168550	181390	194400	207587	220958	234522	248285	262256
44	143558	156082	168763	181606	194619	207809	221183	234749	248516	262490
45	143766	156292	168975	181821	194837	208030	221407	234977	248747	262725
46	143973	156503	169188	182037	195055	208251	221632	235205	248978	262960
47	144181	156713	169401	182252	195274	208473	221857	235433	249209	263195
48	144389	156923	169614	182468	195492	208694	222081	235661	249441	263430
49	144596	157133	169827	182684	195711	208916	222306	235889	249672	263665
50	144804	157343	170040	182899	195930	209138	222531	236117	249904	263900
51	145012	157554	170252	183115	196148	209359	222756	236345	250135	264135
52	145219	157764	170465	183331	196367	209581	222981	236573	250367	264370
53	145427	157974	170679	183547	196586	209803	223205	236801	250598	264605
54	145635	158185	170892	183763	196804	210025	223430	237030	250830	264840
55	145843	158395	171105	183979	197023	210247	223655	237258	251062	265076
56	146051	158606	171318	184194	197242	210468	223881	237486	251294	265311
57	146259	158816	171531	184411	197461	210690	224106	237715	251526	265546
58	146467	159027	171745	184627	197680	210912	224331	237943	251758	265782
59	146675	159238	171958	184843	197899	211135	224556	238172	251990	266018
60	2,146883	2,159448	2,172171	2,185059	2,198118	2,211357	2,224782	2,238400	2,252222	2,266253

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

v.	108°	109°	110°	111°	112°	113°	114°	115°	116°	117°
0	2,266253	2,280504	2,294982	2,309698	2,324660	2,339879	2,355365	2,371129	2,387182	2,403535
1	266389	280743	295226	309945	324912	340135	355625	371391	387452	403810
2	266725	280983	295469	310193	325163	340391	355886	371659	387722	404085
3	266960	281222	295712	310440	325415	340647	356147	371924	387992	404361
4	267196	281462	295956	310688	325667	340903	356407	372190	388262	404636
5	267432	281701	296199	310935	325918	341159	356668	372455	388533	404912
6	267668	281941	296443	311183	326170	341415	356929	372721	388803	405187
7	267904	282181	296687	311431	326422	341672	357190	372986	389074	405463
8	268140	282421	296930	311678	326674	341928	357451	373252	389344	405739
9	268377	282661	297174	311926	326926	342185	357712	373518	389615	406015
10	268613	282901	297418	312174	327178	342441	357973	373784	389886	406291
11	268849	283141	297662	312422	327422	342698	358234	374050	390157	406567
12	269085	283381	297906	312670	327683	342955	358495	374316	390428	406843
13	269322	283621	298150	312918	327935	343211	358757	374582	390699	407119
14	269558	283861	298394	313167	328188	343468	359018	374848	390970	407395
15	269795	284102	298639	313415	328440	343725	359279	375114	391241	407672
16	270032	284342	298883	313663	328693	343982	359541	375381	391513	407948
17	270268	284582	299127	313912	328946	344239	359803	375647	391784	408225
18	270505	284823	299372	314160	329198	344496	360064	375914	392055	408501
19	270742	285064	299616	314409	329451	344754	360326	376180	392327	408778
20	270979	285304	299861	314657	329704	345011	360588	376447	392599	409055
21	271216	285545	300105	314906	329957	345268	360850	376714	392870	409332
22	271452	285786	300350	315155	330210	345526	361112	376981	393142	409609
23	271690	286026	300595	315404	330463	345783	361374	377248	393414	409886
24	271927	286267	300839	315653	330716	346041	361637	377515	393686	410163
25	272164	286508	301084	315902	330970	346298	361899	377782	393958	410441
26	272401	286749	301329	316151	331223	346556	362161	378049	394230	410718
27	272638	286990	301574	316400	331476	346814	362424	378316	394503	410995
28	272876	287231	301819	316649	331730	347072	362686	378583	394775	411273
29	273113	287473	302065	316898	331983	347330	362949	378851	395047	411551
30	273351	287714	302310	317148	332237	347588	363211	379118	395320	411828
31	273588	287955	302555	317397	332491	347846	363474	379386	395593	412106
32	273826	288197	302800	317646	332744	348104	363737	379654	395865	412384
33	274063	288438	303046	317896	332998	348363	364000	379921	396138	412662
34	274301	288680	303291	318146	333252	348621	364263	380189	396411	412940
35	274539	288921	303537	318395	333506	348879	364526	380457	396684	413218
36	274777	289163	303783	318645	333760	349138	364789	380725	396957	413496
37	275015	289405	304028	318895	334014	349397	365052	380993	397230	413775
38	275253	289646	304274	319145	334268	349655	365316	381261	397503	414053
39	275491	289888	304520	319395	334523	349914	365579	381529	397776	414332
40	275729	290130	304766	319645	334777	350173	365843	381798	398050	414610
41	275967	290372	305012	319895	335031	350432	366106	382066	398323	414889
42	276205	290614	305258	320145	335286	350691	366370	382335	398597	415168
43	276443	290856	305504	320395	335540	350950	366634	382603	398870	415447
44	276682	291098	305750	320645	335795	351209	366897	382872	399144	415726
45	276920	291341	305996	320896	336050	351468	367161	383141	399418	416005
46	277159	291583	306242	321146	336304	351727	367425	383409	399692	416284
47	277397	291825	306489	321397	336559	351987	367689	383678	399966	416563
48	277636	292068	306735	321647	336814	352246	367953	383947	400240	416842
49	277874	292310	306982	321898	337069	352505	368217	384216	400514	417121
50	278113	292553	307228	322149	337324	352765	368482	384486	400788	417401
51	278352	292796	307475	322400	337579	353025	368746	384755	401062	417681
52	278591	293038	307722	322651	337835	353284	369010	385024	401337	417961
53	278830	293281	307968	322901	338090	353544	369275	385293	401611	418240
54	279069	293524	308215	323152	338345	353804	369540	385563	401886	418520
55	279308	293767	308462	323404	338601	354064	369804	385832	402160	418800
56	279547	294010	308709	323655	338856	354324	370069	386102	402435	419080
57	279786	294253	308956	323906	339112	354584	370334	386372	402710	419360
58	280025	294496	309203	324157	339368	354844	370599	386642	402985	419641
59	280264	294739	309451	324409	339623	355105	370864	386912	403260	419921
60	2,280504	2,294982	2,309698	2,324660	2,339879	2,355365	2,371129	2,387182	2,403535	2,420201

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.

v.	118°	119°	120°	121°	122°	123°	124°	125°	126°	127°
0	2,420201	2,437193	2,454524	2,472208	2,490259	2,508693	2,527525	2,546773	2,566454	2,586586
1	420482	437479	454816	472506	490563	509003	527843	547897	568785	586925
2	420762	437765	455108	472804	490867	509314	528160	547422	567117	587265
3	421043	438052	455400	473102	491172	509625	528478	547747	567449	587605
4	421324	438338	455692	473400	491476	509936	528795	548071	567782	587945
5	421605	438624	455984	473698	491780	510247	529113	548396	568114	588285
6	421886	438911	456276	473996	492085	510558	529431	548721	568446	588625
7	422167	439198	456569	474295	492390	510869	529749	549046	568779	588965
8	422448	439484	456861	474593	492694	511180	530067	549372	569111	589305
9	422729	439771	457154	474892	492999	511492	530386	549697	569444	589646
10	423010	440058	457447	475191	493304	511803	530704	550023	569777	589986
11	423292	440345	457739	475490	493610	512115	531022	550348	570110	590327
12	423573	440632	458032	475788	493915	512427	531341	550674	570443	590668
13	423855	440919	458325	476087	494220	512739	531660	551000	570777	591009
14	424137	441206	458618	476386	494526	513051	531979	551326	571110	591350
15	424418	441494	458912	476686	494831	513363	532298	551652	571444	591692
16	424700	441781	459205	476985	495137	513675	532617	551978	571777	592033
17	424982	442069	459498	477285	495442	513988	532936	552304	572111	592375
18	425264	442356	459792	477584	495748	514300	533255	552631	572445	592716
19	425546	442644	460085	477884	496054	514613	533575	552957	572779	593058
20	425829	442932	460379	478183	496360	514925	533894	553284	573113	593400
21	426111	443220	460673	478483	496667	515238	534214	553611	573448	593742
22	426393	443508	460967	478783	496973	515551	534534	553938	573782	594085
23	426676	443796	461261	479083	497279	515864	534854	554265	574117	594427
24	426958	444084	461555	479384	497586	516177	535174	554592	574451	594769
25	427241	444373	461849	479684	497892	516490	535494	554920	574786	595112
26	427524	444661	462143	479984	498199	516803	535814	555247	575121	595455
27	427807	444949	462437	480285	498506	517117	536134	555575	575456	595798
28	428090	445238	462732	480585	498813	517431	536455	555902	575791	596141
29	428373	445527	463026	480886	499120	517744	536775	556230	576127	596484
30	428656	445816	463321	481187	499427	518058	537096	556558	576462	596827
31	428939	446104	463616	481488	499734	518372	537417	556886	576798	597171
32	429222	446393	463911	481789	500042	518686	537738	557214	577133	597514
33	429506	446683	464206	482090	500349	519000	538059	557543	577469	597858
34	429789	446972	464501	482391	500657	519315	538380	557871	577805	598202
35	430073	447261	464796	482692	500965	519629	538702	558200	578141	598546
36	430357	447550	465091	482994	501272	519943	539023	558528	578478	598890
37	430640	447840	465387	483295	501580	520258	539344	558857	578814	599234
38	430924	448129	465682	483597	501888	520573	539666	559186	579150	599579
39	431208	448419	465978	483898	502197	520888	539988	559515	579487	599923
40	431492	448709	466273	484200	502505	521202	540310	559844	579824	600268
41	431777	448999	466569	484502	502813	521518	540632	560174	580161	600612
42	432061	449289	466865	484804	503122	521833	540954	560503	580498	600957
43	432345	449579	467161	485106	503430	522148	541276	560833	580835	601302
44	432630	449869	467457	485409	503739	522463	541599	561162	581172	601648
45	432914	450159	467753	485711	504048	522779	541921	561492	581509	601993
46	433199	450449	468049	486014	504357	523095	542244	561822	581847	602338
47	433483	450740	468346	486316	504666	523410	542567	562152	582185	602684
48	433768	451030	468642	486619	504975	523726	542889	562482	582522	603030
49	434053	451321	468939	486922	505284	524042	543212	562812	582860	603376
50	434338	451612	469236	487224	505593	524358	543535	563143	583198	603722
51	434623	451902	469532	487527	505903	524674	543859	563473	583536	604068
52	434908	452193	469829	487831	506212	524991	544182	563804	583875	604414
53	435194	452484	470126	488134	506522	525307	544505	564135	584213	604760
54	435479	452775	470423	488437	506832	525624	544829	564466	584552	605107
55	435765	453067	470721	488740	507142	525940	545153	564797	584890	605454
56	436050	453358	471018	489044	507452	526257	545477	565128	585229	605800
57	436336	453649	471315	489348	507762	526574	545800	565459	585568	606147
58	436622	453941	471613	489651	508072	526891	546125	565790	585907	606494
59	436907	454233	471910	489955	508382	527208	546449	566122	586247	606842
60	2,437193	2,454524	2,472208	2,490259	2,508693	2,527525	2,546773	2,566454	2,586586	2,607189

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : Log M.										
v.	138°	139°	140°	141°	142°	143°	144°	145°	146°	147°
0	2,844262	2,871695	2,899943	2,929048	2,959055	2,990014	3,021977	3,055000	3,089146	3,124479
1	844713	872159	900421	929540	959563	990539	022519	055560	089725	123079
2	845164	872623	900899	930033	960072	991063	023061	056120	090304	123678
3	845615	873087	901377	930526	960580	991588	023603	056681	090883	124278
4	846066	873552	901856	931020	961089	992113	024145	057241	091463	124879
5	846518	874017	902335	931513	961598	992639	024688	057802	092044	125480
6	846970	874482	902814	932007	962108	993165	025231	058363	092624	126081
7	847422	874948	903293	932501	962617	993691	025774	058925	093205	126682
8	847874	875413	903773	932996	963127	994217	026318	059487	093787	127284
9	848326	875879	904253	933490	963637	994743	026862	060049	094368	127886
10	848779	876345	904733	933985	964148	995270	027406	060612	094950	130489
11	849232	876811	905213	934480	964659	995797	027950	061174	095532	131092
12	849685	877278	905694	934976	965169	996325	028495	061738	096115	131695
13	850139	877745	906174	935471	965681	996853	029040	062301	096698	132299
14	850592	878212	906656	935967	966192	997381	029586	062865	097281	132903
15	851046	878679	907137	936463	966704	997909	030131	063429	097865	133507
16	851500	879146	907618	936960	967216	998437	030677	063993	098449	134111
17	851954	879614	908100	937456	967728	998966	031223	064558	099033	134717
18	852409	880082	908582	937953	968241	2,999495	031770	065123	099618	135322
19	852863	880550	909064	938450	968754	3,000025	032317	065689	100203	135928
20	853318	881018	909547	938948	969267	000554	032864	066254	100788	136534
21	853773	881487	910030	939445	969780	001084	033412	066820	101374	137140
22	854228	881955	910513	939943	970294	001615	033959	067387	101960	137747
23	854683	882425	910996	940441	970808	002145	034507	067953	102546	138354
24	855140	882894	911479	940940	971322	002676	035056	068520	103133	138962
25	855596	883363	911963	941439	971836	003207	035605	069088	103720	139570
26	856052	883833	912447	941937	972351	003738	036154	069655	104307	140178
27	856508	884303	912931	942437	972866	004270	036703	070223	104895	140786
28	856965	884773	913416	942936	973381	004802	037252	070791	105483	141395
29	857422	885244	913900	943436	973897	005334	037802	071360	106071	142005
30	857879	885714	914385	943936	974413	005867	038353	071929	106660	142614
31	858336	886185	914870	944436	974929	006400	038903	072498	107249	143224
32	858794	886656	915356	944937	975445	006933	039454	073067	107838	143835
33	859251	887128	915842	945437	975962	007466	040005	073637	108428	144446
34	859709	887599	916327	945938	976479	008000	040556	074207	109018	145057
35	860168	888071	916814	946440	976996	008534	041108	074778	109608	145668
36	860626	888543	917300	946941	977513	009068	041660	075349	110199	146280
37	861085	889015	917787	947443	978031	009603	042212	075920	110790	146892
38	861544	889488	918274	947945	978549	010137	042765	076491	111381	147505
39	862003	889961	918761	948447	979067	010673	043318	077063	111973	148118
40	862462	890434	919248	948950	979586	011208	043871	077635	112565	148731
41	862921	890907	919736	949452	980105	011744	044425	078208	113157	149345
42	863381	891380	920224	949956	980624	012280	044979	078780	113750	149959
43	863841	891854	920712	950459	981143	012816	045533	079353	114343	150573
44	864301	892328	921200	950962	981663	013352	046087	079927	114937	151188
45	864762	892802	921689	951466	982183	013889	046642	080501	115531	151803
46	865222	893276	922178	951970	982703	014426	047197	081075	116125	152418
47	865683	893751	922667	952475	983223	014964	047752	081649	116719	153034
48	866144	894226	923156	952979	983744	015502	048308	082224	117314	153651
49	866606	894701	923646	953484	984265	016040	048864	082799	117909	154267
50	867067	895176	924135	953989	984786	016578	049420	083374	118505	154884
51	867529	895652	924626	954495	985308	017117	049977	083950	119101	155501
52	867991	896128	925116	955001	985830	017655	050534	084526	119697	156119
53	868453	896604	925607	955506	986352	018195	051091	085102	120294	156737
54	868915	897080	926097	956013	986874	018734	051649	085679	120890	157356
55	869378	897557	926589	956519	987397	019274	052207	086256	121488	157974
56	869841	898033	927080	957026	987920	019814	052765	086833	122085	158594
57	870304	898510	927571	957533	988443	020354	053323	087411	122683	159213
58	870767	898987	928063	958040	988967	020895	053882	087989	123282	159833
59	871231	899465	928555	958548	989490	021436	054441	088567	123880	160453
60	2,871695	2,899943	2,929048	2,959055	2,990014	3,021977	3,055000	3,089146	3,124479	3,161074

II. — MOUVEMENT PARABOLIQUE : LogM.

Table with columns labeled 148°, 149°, 150°, 151°, 152°, 153°, 154°, 155°, 156°, 157° and rows numbered 0 to 60. Each row contains ten numerical values corresponding to the columns.

III. — $10^6 \text{Log} \frac{x^2}{20^{1/2}} \frac{r+r''}{2}$ (Relation d'Euler);

argument $\frac{2\theta'}{(r+r'')^{3/2}}$.

$\frac{2\theta'}{(r+r'')^{3/2}}$	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,000	0	4	14	33	58	91	130	178	232	294
0,001	0	4	16	35	61	94	135	183	238	300
0,002	0	5	18	37	64	98	139	188	244	307
0,003	0	6	19	39	67	102	144	193	250	314
0,004	1	7	21	42	70	106	148	199	256	321
0,005	1	8	23	44	73	110	153	204	262	328
0,006	1	9	24	47	77	114	158	209	268	335
0,007	2	10	26	50	80	118	163	215	275	342
0,008	2	12	28	52	83	122	168	220	281	349
0,009	3	13	30	55	87	126	173	226	287	356
0,010	4	14	33	58	91	130	178	232	294	363

$\frac{2\theta'}{(r+r'')^{3/2}}$	0,100	0,110	0,120	0,130	0,140	0,150	0,160	0,170	0,180	0,190
0,000	363	440	523	615	713	820	934	1055	1184	1320
0,001	370	448	532	624	724	831	945	1067	1197	1334
0,002	378	456	541	634	734	842	957	1080	1211	1349
0,003	385	464	550	644	745	853	969	1093	1224	1363
0,004	393	472	559	653	755	864	981	1106	1238	1377
0,005	400	481	568	663	766	876	993	1118	1251	1392
0,006	408	489	577	673	776	887	1005	1131	1265	1406
0,007	416	497	587	683	787	899	1018	1144	1279	1421
0,008	424	506	596	693	798	910	1030	1157	1293	1435
0,009	432	515	605	703	809	922	1042	1171	1306	1450
0,010	440	523	615	713	820	934	1055	1184	1320	1465

$\frac{2\theta'}{(r+r'')^{3/2}}$	0,200	0,210	0,220	0,230	0,240	0,250	0,260	0,270	0,280	0,290
0,000	1465	1617	1777	1945	2121	2304	2496	2696	2905	3122
0,001	1480	1633	1793	1962	2139	2323	2516	2717	2926	3144
0,002	1495	1648	1810	1979	2157	2342	2536	2738	2948	3166
0,003	1510	1664	1826	1997	2175	2361	2556	2758	2969	3188
0,004	1525	1680	1843	2014	2193	2380	2575	2779	2991	3211
0,005	1540	1696	1860	2032	2212	2399	2595	2800	3012	3233
0,006	1555	1712	1877	2049	2230	2419	2615	2821	3034	3256
0,007	1571	1728	1894	2067	2248	2438	2636	2841	3056	3278
0,008	1586	1744	1911	2085	2267	2457	2656	2863	3078	3301
0,009	1601	1761	1928	2103	2286	2477	2676	2884	3099	3324
0,010	1617	1777	1945	2121	2304	2496	2696	2905	3122	3347

$\frac{2\theta'}{(r+r'')^{3/2}}$	0,300	0,310	0,320	0,330	0,340	0,350	0,360	0,370	0,380	0,390
0,000	3347	3580	3823	4073	4333	4602	4880	5167	5463	5769
0,001	3370	3604	3847	4099	4360	4629	4908	5196	5493	5800
0,002	3393	3628	3872	4125	4386	4657	4936	5225	5523	5831
0,003	3416	3652	3897	4150	4413	4684	4965	5255	5554	5862
0,004	3439	3676	3922	4176	4440	4712	4993	5284	5584	5894
0,005	3462	3700	3947	4202	4467	4740	5022	5314	5615	5925
0,006	3486	3725	3972	4228	4493	4768	5051	5343	5645	5957
0,007	3509	3749	3997	4254	4520	4795	5080	5373	5676	5988
0,008	3533	3773	4023	4281	4548	4823	5109	5403	5707	6020
0,009	3557	3798	4048	4307	4575	4852	5138	5433	5738	6052
0,010	3580	3823	4073	4333	4602	4880	5167	5463	5769	6084

$\frac{2\theta'}{(r+r'')^{3/2}}$	0,400	0,410	0,420	0,430	0,440	0,450	0,460	0,470	0,480	0,490
0,000	6084	6409	6744	7089	7444	7810	8186	8574	8972	9381
0,001	6116	6442	6778	7124	7480	7847	8225	8613	9012	9423
0,002	6148	6475	6812	7159	7517	7884	8263	8652	9053	9464
0,003	6181	6509	6846	7195	7553	7922	8301	8692	9093	9506
0,004	6213	6542	6881	7230	7589	7959	8340	8731	9134	9548
0,005	6245	6575	6915	7265	7626	7997	8379	8771	9175	9590
0,006	6278	6609	6950	7301	7663	8035	8417	8811	9216	9632
0,007	6311	6643	6985	7337	7699	8072	8456	8851	9257	9675
0,008	6343	6676	7019	7372	7736	8110	8495	8891	9298	9717
0,009	6376	6710	7054	7408	7773	8148	8534	8931	9340	9759
0,010	6409	6744	7089	7444	7810	8186	8574	8972	9381	9802

IV. — TABLES DE GAUSS : $10^7 \cdot \log \eta^2$ (p. 71).

<i>h.</i>	0,0000	0,0010	0,0020	0,0030	0,0040	0,0050	0,0060	0,0070	0,0080	0,0090
0,0000	0	9634	19234	28800	38332	47832	57298	66732	76133	85502
0,0001	965	10595	20192	29755	39284	48780	58243	67673	77071	86437
0,0002	1930	11556	21150	30709	40235	49728	59187	68614	78009	87372
0,0003	2894	12517	22107	31663	41186	50675	60131	69555	78947	88306
0,0004	3858	13478	23064	32617	42136	51622	61075	70496	79884	89240
0,0005	4821	14438	24021	33570	43086	52569	62019	71436	80821	90174
0,0006	5784	15398	24977	34523	44036	53515	62962	72376	81758	91108
0,0007	6747	16357	25933	35476	44985	54461	63905	73316	82694	92041
0,0008	7710	17316	26889	36428	45934	55407	64847	74255	83630	92974
0,0009	8672	18275	27845	37380	46883	56353	65790	75194	84566	93906
0,0010	9634	19234	28800	38332	47832	57298	66732	76133	85502	94838

<i>h.</i>	0,0100	0,0110	0,0120	0,0130	0,0140	0,0150	0,0160	0,0170	0,0180	0,0190
0,0000	94838	104144	113417	122660	131871	141052	150202	159322	168412	177471
0,0001	95770	105073	114343	123583	132791	141968	151115	160232	169319	178376
0,0002	96702	106001	115268	124505	133710	142884	152028	161142	170226	179284
0,0003	97633	106929	116193	125427	134629	143800	152941	162052	171133	180183
0,0004	98564	107857	117118	126348	135547	144716	153854	162961	172039	181087
0,0005	99495	108785	118043	127269	136465	145631	154766	163870	172945	181990
0,0006	100425	109712	118967	128190	137383	146546	155678	164779	173851	182893
0,0007	101355	110639	119890	129111	138301	147460	156589	165688	174757	183796
0,0008	102285	111565	120814	130032	139218	148374	157500	166596	175662	184698
0,0009	103215	112491	121737	130952	140135	149288	158411	167504	176567	185600
0,0010	104144	113417	122660	131871	141052	150202	159322	168412	177471	186501

<i>h.</i>	0,0200	0,0210	0,0220	0,0230	0,0240	0,0250	0,0260	0,0270	0,0280	0,0290
0,0000	186501	195502	204474	213416	222330	231215	240071	248900	257700	266473
0,0001	187403	196401	205369	214309	223220	232102	240956	249781	258579	267349
0,0002	188304	197299	206264	215201	224109	232988	241839	250662	259457	268224
0,0003	189205	198197	207159	216093	224998	233875	242723	251543	260335	269099
0,0004	190105	199094	208054	216985	225887	234761	243606	252423	261213	269974
0,0005	191005	199992	208948	217876	226776	235647	244489	253303	262090	270849
0,0006	191905	200889	209842	218768	227664	236532	245372	254183	262967	271723
0,0007	192805	201785	210736	219659	228552	237417	246254	255063	263844	272597
0,0008	193704	202682	211630	220549	229440	238302	247136	255942	264721	273471
0,0009	194603	203578	212523	221440	230328	239187	248018	256821	265597	274345
0,0010	195502	204474	213416	222330	231215	240071	248900	257700	266473	275218

<i>h.</i>	0,0300	0,0310	0,0320	0,0330	0,0340	0,0350	0,0360	0,0370	0,0380	0,0390
0,0000	275218	283936	292626	301290	309926	318536	327120	335677	344208	352713
0,0001	276091	284806	293494	302154	310788	319396	327976	336531	345059	353562
0,0002	276964	285676	294361	303019	311650	320255	328833	337385	345911	354411
0,0003	277838	286546	295228	303883	312512	321114	329689	338239	346762	355259
0,0004	278708	287415	296095	304747	313373	321973	330546	339092	347613	356108
0,0005	279580	288284	296961	305611	314234	322831	331401	339946	348464	356956
0,0006	280452	289153	297827	306475	315095	323689	332257	340799	349314	357804
0,0007	281323	290022	298693	307338	315956	324547	333112	341651	350164	358651
0,0008	282194	290890	299559	308201	316816	325405	333967	342504	351014	359499
0,0009	283065	291758	300424	309064	317676	326262	334822	343356	351864	360346
0,0010	283936	292626	301290	309926	318536	327120	335677	344208	352713	361192

<i>h.</i>	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090	0,100	0,110	0,120	0,130
0,000	361192	444607	525626	604398	681057	755725	828513	899523	968849	1036576
0,001	369646	452814	533602	612157	688612	763087	835693	906530	975692	1043264
0,002	378075	460997	541556	619893	696146	770430	842854	913520	982520	1049936
0,003	386478	469157	549488	627612	703661	777754	849999	920494	989331	1056594
0,004	394856	477294	557397	635308	711157	785060	857125	927451	996127	1063237
0,005	403209	485407	565285	642984	718633	792348	864235	934391	1002907	1069885
0,006	411537	493496	573150	650639	726090	799617	871327	941315	1009672	1076478
0,007	419841	501563	580994	658274	733527	806868	878401	948223	1016421	1083076
0,008	428121	509607	588817	665888	740945	814101	885459	955114	1023154	1089660
0,009	436376	517628	596618	673482	748345	821316	892500	961990	1029873	1096229
0,010	444607	525626	604398	681057	755725	828513	899523	968849	1036576	1102783

DES ORBITES DES COMÈTES ET DES PLANÈTES.

IV. — TABLES DE GAUSS : 10⁷.log η^2 (p. 71).

<i>h.</i>	0,140	0,150	0,160	0,170	0,180	0,190	0,200	0,210	0,220	0,230
0,000	1102783	1167544	1230927	1292994	1353804	1413412	1471869	1529222	1585516	1640793
0,001	1109323	1173943	1237192	1299131	1359818	1419309	1477653	1534899	1591089	1646267
0,002	1115849	1180329	1243444	1305255	1365821	1425194	1483427	1540565	1596652	1651730
0,003	1122360	1186701	1249682	1311367	1371811	1431068	1489189	1546220	1602204	1657184
0,004	1128857	1193059	1255908	1317466	1377789	1436931	1494940	1551865	1607747	1662628
0,005	1135340	1199404	1262121	1323553	1383755	1442782	1500681	1557499	1613279	1668063
0,006	1141809	1205735	1268821	1329628	1389710	1448622	1506411	1563123	1618802	1673488
0,007	1148264	1212053	1274508	1335690	1395653	1454450	1512130	1568737	1624315	1678903
0,008	1154704	1218357	1280683	1341740	1401585	1460268	1517838	1574340	1629817	1684309
0,009	1161131	1224649	1286845	1347778	1407504	1466074	1523535	1579933	1635310	1689701
0,010	1167544	1230927	1292994	1353804	1413412	1471869	1529222	1585516	1640793	1695092
<i>h.</i>	0,240	0,250	0,260	0,270	0,280	0,290	0,300	0,310	0,320	0,330
0,000	1695092	1748451	1800903	1852483	1903220	1953145	2002285	2050667	2098315	2145253
0,001	1700470	1753736	1806100	1857594	1908249	1958094	2007157	2055464	2103040	2149909
0,002	1705838	1759013	1811288	1862696	1913269	1963035	2012021	2060254	2107759	2154558
0,003	1711197	1764280	1816467	1867791	1918281	1967968	2016878	2065037	2112470	2159200
0,004	1716547	1769538	1821638	1872877	1923286	1972894	2021727	2069813	2117174	2163833
0,005	1721887	1774788	1826800	1877955	1928282	1977811	2026569	2074581	2121871	2168464
0,006	1727218	1780029	1831953	1883024	1933271	1982721	2031403	2079342	2126562	2173085
0,007	1732540	1785261	1837098	1888085	1938251	1987624	2036230	2084096	2131245	2177703
0,008	1737853	1790484	1842235	1893138	1943224	1992518	2041050	2088843	2135921	2182308
0,009	1743156	1795698	1847363	1898183	1948188	1997406	2045862	2093582	2140591	2186910
0,010	1748451	1800903	1852483	1903220	1953145	2002285	2050667	2098315	2145253	2191505
<i>h.</i>	0,340	0,350	0,360	0,370	0,380	0,390	0,400	0,410	0,420	0,430
0,000	2191505	2237090	2282031	2326346	2370053	2413171	2455716	2497705	2539153	2580075
0,001	2196903	2241613	2286490	2330743	2374391	2417451	2460940	2503874	2546269	2588139
0,002	2200675	2246130	2290943	2335135	2378723	2421725	2464158	2506038	2547379	2588198
0,003	2205250	2250640	2295390	2339521	2383050	2425994	2468371	2510196	2551484	2592232
0,004	2209818	2255143	2299831	2343900	2387370	2430257	2472578	2514349	2555584	2596300
0,005	2214380	2259640	2304265	2347874	2391685	2434514	2476779	2518496	2559679	2600344
0,006	2218935	2264131	2308694	2352642	2395993	2438766	2480975	2522638	2563769	2604382
0,007	2223483	2268615	2313116	2357003	2400296	2443012	2485166	2526775	2567853	2608415
0,008	2228025	2273093	2317532	2361359	2404594	2447252	2489351	2530906	2571932	2612444
0,009	2232561	2277565	2321942	2365709	2408885	2451487	2493531	2535032	2576006	2616467
0,010	2237090	2282031	2326346	2370053	2413171	2455716	2497705	2539153	2580075	2620486
<i>h.</i>	0,440	0,450	0,460	0,470	0,480	0,490	0,500	0,510	0,520	0,530
0,000	2620486	2660397	2699824	2738778	2777272	2815316	2852923	2890102	2926864	2963220
0,001	2624499	2664362	2703741	2742648	2781096	2819096	2856660	2893797	2930518	2966833
0,002	2628507	2668321	2707652	2746513	2784916	2822872	2860392	2897487	2934168	2970445
0,003	2632511	2672276	2711559	2750374	2788732	2826644	2864121	2901174	2937813	2974049
0,004	2636509	2676226	2715462	2754230	2792543	2830411	2867845	2904856	2941455	2977650
0,005	2640503	2680171	2719360	2758082	2796349	2834173	2871565	2908535	2945092	2981828
0,006	2644492	2684111	2723253	2761929	2800151	2837932	2875281	2912209	2948726	2985442
0,007	2648475	2688046	2727141	2765771	2803949	2841686	2878992	2915879	2952355	2988847
0,008	2652454	2691977	2731025	2769609	2807743	2845436	2882709	2919545	2955981	2992018
0,009	2656428	2695903	2734904	2773443	2811532	2849181	2886403	2923207	2959602	2995600
0,010	2660397	2699824	2738778	2777272	2815316	2852923	2890102	2926864	2963220	2999178
<i>h.</i>	0,540	0,550	0,560	0,570	0,580	0,590				
0,000	2999178	3034748	3069938	3104758	3139215	3173318				
0,001	3002752	3038284	3073437	3108220	3142641	3176709				
0,002	3006323	3041816	3076931	3111678	3146064	3180096				
0,003	3009888	3045344	3080422	3115133	3149483	3183480				
0,004	3013452	3048869	3083910	3118584	3152898	3186861				
0,005	3017011	3052390	3087994	3122031	3156310	3190238				
0,006	3020566	3055907	3090874	3125475	3159719	3193612				
0,007	3024117	3059420	3094350	3128915	3163124	3196983				
0,008	3027664	3062930	3097823	3132352	3166525	3200350				
0,009	3031208	3066436	3101292	3135785	3169923	3203714				
0,010	3034748	3069938	3104758	3139215	3173318	3207074				

V. — TABLES DE GAUSS : $10^7 \cdot \xi$. (p. 71).

x .	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,000	0	58	231	523	936	1471	2131	2918	3835	4884
0,001	1	70	255	559	984	1532	2204	3004	3934	4996
0,002	2	83	280	596	1033	1593	2278	3091	4034	5109
0,003	5	97	306	634	1084	1656	2354	3180	4136	5224
0,004	9	113	334	674	1135	1720	2431	3269	4239	5341
0,005	14	130	362	714	1188	1785	2509	3360	4343	5458
0,006	21	148	392	756	1242	1852	2588	3453	4448	5577
0,007	28	167	423	799	1298	1920	2669	3646	4555	5697
0,008	37	187	455	844	1354	1989	2751	3641	4663	5819
0,009	47	209	489	889	1412	2060	2834	3738	4773	5942
0,010	58	231	523	936	1471	2131	2918	3835	4884	6066

x .	0,100	0,110	0,120	0,130	0,140	0,150	0,160	0,170	0,180	0,190
0,000	6066	7386	8845	10447	12193	14087	16131	18330	20685	23199
0,001	6192	7526	8999	10615	12376	14285	16344	18558	20929	23460
0,002	6319	7667	9154	10784	12560	14484	16559	18788	21175	23722
0,003	6448	7809	9311	10955	12745	14684	16775	19020	21422	23985
0,004	6578	7953	9469	11128	12933	14886	16992	19253	21671	24251
0,005	6709	8098	9628	11301	13121	15090	17211	19487	21922	24518
0,006	6842	8245	9789	11477	13311	15295	17432	19724	22174	24786
0,007	6976	8393	9951	11654	13503	15502	17654	19961	22428	25056
0,008	7111	8542	10115	11832	13696	15710	17878	20201	22683	25328
0,009	7248	8693	10280	12012	13891	15920	18103	20442	22941	25602
0,010	7386	8845	10447	12193	14087	16131	18330	20685	23199	25877

x .	0,200	0,210	0,220	0,230	0,240	0,250	0,260	0,270	0,280	0,290
0,000	25877	28722	31736	34924	38289	41835	45566	49485	53598	57908
0,001	26154	29015	32047	35252	38635	42199	45949	49888	54020	58350
0,002	26433	29311	32359	35582	38983	42566	46334	50292	54444	58795
0,003	26713	29608	32674	35914	39333	42934	46721	50699	54870	59241
0,004	26995	29907	32990	36248	39685	43305	47111	51107	55298	59689
0,005	27278	30207	33308	36584	40039	43677	47502	51517	55728	60139
0,006	27564	30509	33627	36921	40394	44051	47894	51930	56160	60591
0,007	27851	30814	33949	37260	40752	44427	48289	52344	56594	61045
0,008	28139	31119	34272	37601	41111	44804	48686	52760	57030	61502
0,009	28429	31427	34597	37944	41472	45184	49085	53178	57468	61960
0,010	28722	31736	34924	38289	41835	45566	49485	53598	57908	62421

VI. — TABLES DE MARTH.

$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$	$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$
$\bar{3},40$	1,4633884	$\bar{2},734695$	$\bar{3},65551$	$\bar{2},70$	1,4633431	$\bar{2},734876$	$\bar{3},65549$
$\bar{3},50$	3884	695	51	$\bar{2},71$	3409	885	49
$\bar{3},60$	3882	695	51	$\bar{2},72$	3387	894	49
$\bar{3},70$	3881	696	51	$\bar{2},73$	3363	903	49
$\bar{3},80$	3878	697	51	$\bar{2},74$	3338	913	49
$\bar{3},90$	3874	699	51	$\bar{2},75$	3313	923	49
$\bar{3},92$	3873	699	51	$\bar{2},76$	3286	934	49
$\bar{3},94$	3872	700	51	$\bar{2},77$	3257	945	49
$\bar{3},96$	3870	700	51	$\bar{2},78$	3228	957	49
$\bar{3},98$	3869	701	51	$\bar{2},79$	3197	970	49
$\bar{2},00$	3867	702	51	$\bar{2},80$	3164	983	48
$\bar{2},02$	3865	702	51	$\bar{2},81$	3130	734996	48
$\bar{2},04$	3864	703	51	$\bar{2},82$	3095	735010	48
$\bar{2},06$	3861	704	51	$\bar{2},83$	3057	025	48
$\bar{2},08$	3859	705	51	$\bar{2},84$	3018	041	48
$\bar{2},10$	3857	706	51	$\bar{2},85$	2977	057	48
$\bar{2},12$	3854	707	51	$\bar{2},86$	2935	074	48
$\bar{2},14$	3851	708	51	$\bar{2},87$	2890	092	47
$\bar{2},16$	3848	709	51	$\bar{2},88$	2843	111	47
$\bar{2},18$	3844	711	51	$\bar{2},89$	2794	131	47
$\bar{2},20$	3840	713	51	$\bar{2},90$	2742	151	47
$\bar{2},22$	3836	714	51	$\bar{2},91$	2688	173	47
$\bar{2},24$	3831	716	51	$\bar{2},92$	2632	195	46
$\bar{2},26$	3825	718	51	$\bar{2},93$	2572	219	46
$\bar{2},28$	3820	721	51	$\bar{2},94$	2510	244	46
$\bar{2},30$	3813	723	51	$\bar{2},950$	2446	269	46
$\bar{2},32$	3806	726	51	$\bar{2},952$	2432	275	45
$\bar{2},34$	3799	729	51	$\bar{2},954$	2419	280	45
$\bar{2},36$	3790	732	51	$\bar{2},956$	2405	286	45
$\bar{2},38$	3781	736	51	$\bar{2},958$	2391	291	45
$\bar{2},40$	3771	740	51	$\bar{2},960$	2378	297	45
$\bar{2},42$	3760	744	51	$\bar{2},962$	2364	302	45
$\bar{2},44$	3748	749	51	$\bar{2},964$	2349	308	45
$\bar{2},46$	3735	755	51	$\bar{2},966$	2335	313	45
$\bar{2},48$	3720	760	51	$\bar{2},968$	2321	319	45
$\bar{2},50$	3704	767	51	$\bar{2},970$	2306	325	45
$\bar{2},52$	3687	774	51	$\bar{2},972$	2292	331	45
$\bar{2},54$	3668	781	50	$\bar{2},974$	2277	337	45
$\bar{2},56$	3647	790	50	$\bar{2},976$	2262	343	45
$\bar{2},58$	3624	799	50	$\bar{2},978$	2247	349	45
$\bar{2},60$	3598	809	50	$\bar{2},980$	2232	355	45
$\bar{2},61$	3585	814	50	$\bar{2},982$	2217	361	45
$\bar{2},62$	3571	820	50	$\bar{2},984$	2201	367	45
$\bar{2},63$	3556	826	50	$\bar{2},986$	2185	373	45
$\bar{2},64$	3540	832	50	$\bar{2},988$	2170	379	44
$\bar{2},65$	3524	839	50	$\bar{2},990$	2154	386	44
$\bar{2},66$	3507	846	50	$\bar{2},992$	2138	392	44
$\bar{2},67$	3489	853	50	$\bar{2},994$	2121	399	44
$\bar{2},68$	3471	860	50	$\bar{2},996$	2105	405	44
$\bar{2},69$	3451	868	50	$\bar{2},998$	2089	412	44
$\bar{2},70$	1,4633431	$\bar{2},734876$	$\bar{3},65549$	1,000	1,4632072	$\bar{2},735418$	$\bar{3},65544$

XXIII.

G.15

VI. — TABLES DE MARTU.

$t \frac{x}{r+r''}$	lQ_1	lQ_1'	lQ_2	$t \frac{x}{r+r''}$	lQ_1	lQ_1'	lQ_2
$\bar{1},000$	1,4632072	$\bar{2},735418$	$\bar{3},65544$	$\bar{1},100$	1,4631008	2,735842	$\bar{3},65540$
$\bar{1},002$	2055	425	44	$\bar{1},102$	0981	853	40
$\bar{1},004$	2038	432	44	$\bar{1},104$	0954	863	40
$\bar{1},006$	2021	439	44	$\bar{1},106$	0927	874	39
$\bar{1},008$	2004	446	44	$\bar{1},108$	0899	885	39
$\bar{1},010$	1986	453	44	$\bar{1},110$	0872	896	39
$\bar{1},012$	1969	460	44	$\bar{1},112$	0844	907	39
$\bar{1},014$	1951	467	44	$\bar{1},114$	0816	919	39
$\bar{1},016$	1933	474	43	$\bar{1},116$	0787	930	39
$\bar{1},018$	1915	481	43	$\bar{1},118$	0758	941	39
$\bar{1},020$	1897	488	43	$\bar{1},120$	0729	953	39
$\bar{1},022$	1878	496	43	$\bar{1},122$	0700	965	39
$\bar{1},024$	1860	503	43	$\bar{1},124$	0670	976	38
$\bar{1},026$	1841	511	43	$\bar{1},126$	0640	735988	38
$\bar{1},028$	1822	518	43	$\bar{1},128$	0610	736000	38
$\bar{1},030$	1803	526	43	$\bar{1},130$	0580	012	38
$\bar{1},032$	1783	533	43	$\bar{1},132$	0549	024	38
$\bar{1},034$	1764	541	43	$\bar{1},134$	0518	037	38
$\bar{1},036$	1744	549	43	$\bar{1},136$	0487	049	38
$\bar{1},038$	1724	557	43	$\bar{1},138$	0455	062	38
$\bar{1},040$	1704	565	43	$\bar{1},140$	0423	074	37
$\bar{1},042$	1684	573	43	$\bar{1},142$	0391	087	37
$\bar{1},044$	1664	581	42	$\bar{1},144$	0359	100	37
$\bar{1},046$	1643	589	42	$\bar{1},146$	0326	113	37
$\bar{1},048$	1622	598	42	$\bar{1},148$	0293	126	37
$\bar{1},050$	1601	606	42	$\bar{1},150$	0260	140	37
$\bar{1},052$	1580	614	42	$\bar{1},152$	0226	153	37
$\bar{1},054$	1559	623	42	$\bar{1},154$	0192	166	37
$\bar{1},056$	1537	631	42	$\bar{1},156$	0158	180	36
$\bar{1},058$	1515	640	42	$\bar{1},158$	0123	194	36
$\bar{1},060$	1493	649	42	$\bar{1},160$	0088	208	36
$\bar{1},062$	1471	658	42	$\bar{1},162$	0053	222	36
$\bar{1},064$	1449	667	42	$\bar{1},164$	4630017	236	36
$\bar{1},066$	1426	676	41	$\bar{1},166$	4629981	250	36
$\bar{1},068$	1403	685	41	$\bar{1},168$	9945	265	36
$\bar{1},070$	1380	694	41	$\bar{1},170$	9908	279	35
$\bar{1},072$	1357	703	41	$\bar{1},172$	9871	294	35
$\bar{1},074$	1334	713	41	$\bar{1},174$	9834	308	35
$\bar{1},076$	1310	722	41	$\bar{1},176$	9796	323	35
$\bar{1},078$	1286	731	41	$\bar{1},178$	9758	339	35
$\bar{1},080$	1262	741	41	$\bar{1},180$	9720	354	35
$\bar{1},082$	1237	751	41	$\bar{1},182$	9681	369	34
$\bar{1},084$	1213	761	41	$\bar{1},184$	9642	385	34
$\bar{1},086$	1188	770	41	$\bar{1},186$	9603	400	34
$\bar{1},088$	1163	780	40	$\bar{1},188$	9563	416	34
$\bar{1},090$	1138	790	40	$\bar{1},190$	9523	432	34
$\bar{1},092$	1112	801	40	$\bar{1},192$	9482	448	34
$\bar{1},094$	1087	811	40	$\bar{1},194$	9441	464	34
$\bar{1},096$	1061	821	40	$\bar{1},196$	9400	481	33
$\bar{1},098$	1034	832	40	$\bar{1},198$	9358	497	33
$\bar{1},100$	1,4631008	$\bar{2},735842$	$\bar{3},65540$	$\bar{1},200$	1,4629316	$\bar{2},736514$	$\bar{3},65533$

VI. — TABLES DE MARTH.

$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$	$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$
$\bar{1},200$	1,4629316	$\bar{2},736514$	$\bar{3},65533$	$\bar{1},250$	1,4628125	$\bar{2},736986$	$\bar{3},65528$
$\bar{1},201$	9295	522	33	$\bar{1},251$	8098	736996	28
$\bar{1},202$	9273	531	33	$\bar{1},252$	8071	737007	28
$\bar{1},203$	9252	539	33	$\bar{1},253$	8044	018	28
$\bar{1},204$	9230	548	33	$\bar{1},254$	8017	028	28
$\bar{1},205$	9209	556	33	$\bar{1},255$	7990	039	28
$\bar{1},206$	9187	565	33	$\bar{1},256$	7962	050	28
$\bar{1},207$	9165	574	32	$\bar{1},257$	7935	061	27
$\bar{1},208$	9143	582	32	$\bar{1},258$	7907	072	27
$\bar{1},209$	9121	591	32	$\bar{1},259$	7879	083	27
$\bar{1},210$	9099	600	32	$\bar{1},260$	7851	094	27
$\bar{1},211$	9077	609	32	$\bar{1},261$	7823	105	27
$\bar{1},212$	9055	618	32	$\bar{1},262$	7795	116	27
$\bar{1},213$	9032	626	32	$\bar{1},263$	7767	127	27
$\bar{1},214$	9010	635	32	$\bar{1},264$	7738	139	27
$\bar{1},215$	8987	644	32	$\bar{1},265$	7710	150	27
$\bar{1},216$	8964	653	32	$\bar{1},266$	7681	161	26
$\bar{1},217$	8942	662	32	$\bar{1},267$	7652	173	26
$\bar{1},218$	8919	671	31	$\bar{1},268$	7623	184	26
$\bar{1},219$	8896	681	31	$\bar{1},269$	7594	195	26
$\bar{1},220$	8872	690	31	$\bar{1},270$	7565	207	26
$\bar{1},221$	8849	699	31	$\bar{1},271$	7536	219	26
$\bar{1},222$	8826	708	31	$\bar{1},272$	7506	230	26
$\bar{1},223$	8802	718	31	$\bar{1},273$	7476	242	26
$\bar{1},224$	8779	727	31	$\bar{1},274$	7447	254	26
$\bar{1},225$	8755	736	31	$\bar{1},275$	7417	266	25
$\bar{1},226$	8731	746	31	$\bar{1},276$	7387	278	25
$\bar{1},227$	8707	755	31	$\bar{1},277$	7356	289	25
$\bar{1},228$	8683	765	30	$\bar{1},278$	7326	301	25
$\bar{1},229$	8659	774	30	$\bar{1},279$	7295	314	25
$\bar{1},230$	8635	784	30	$\bar{1},280$	7265	326	25
$\bar{1},231$	8610	794	30	$\bar{1},281$	7234	338	25
$\bar{1},232$	8586	803	30	$\bar{1},282$	7203	350	25
$\bar{1},233$	8561	813	30	$\bar{1},283$	7172	362	24
$\bar{1},234$	8537	823	30	$\bar{1},284$	7141	375	24
$\bar{1},235$	8512	833	30	$\bar{1},285$	7109	387	24
$\bar{1},236$	8487	843	30	$\bar{1},286$	7078	399	24
$\bar{1},237$	8462	852	30	$\bar{1},287$	7046	412	24
$\bar{1},238$	8436	862	30	$\bar{1},288$	7014	425	24
$\bar{1},239$	8411	872	29	$\bar{1},289$	6982	437	24
$\bar{1},240$	8386	882	29	$\bar{1},290$	6950	450	24
$\bar{1},241$	8360	893	29	$\bar{1},291$	6918	463	23
$\bar{1},242$	8335	903	29	$\bar{1},292$	6886	475	23
$\bar{1},243$	8309	913	29	$\bar{1},293$	6853	488	23
$\bar{1},244$	8283	923	29	$\bar{1},294$	6820	501	23
$\bar{1},245$	8257	934	29	$\bar{1},295$	6787	514	23
$\bar{1},246$	8231	944	29	$\bar{1},296$	6754	527	23
$\bar{1},247$	8204	954	29	$\bar{1},297$	6721	540	23
$\bar{1},248$	8178	965	28	$\bar{1},298$	6688	553	23
$\bar{1},249$	8151	975	28	$\bar{1},299$	6654	567	22
$\bar{1},250$	1,4628125	$\bar{2},736986$	$\bar{3},65528$	$\bar{1},300$	1,4626621	$\bar{2},737580$	$\bar{3},65522$

VI. — TABLES DE MARTH.

$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$	$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$
$\bar{1},300$	1,4626621	$\bar{2},737580$	$\bar{3},65522$	$\bar{1},350$	1,4624720	$\bar{2},738328$	$\bar{3},65515$
$\bar{1},301$	6587	593	22	$\bar{1},351$	4677	345	14
$\bar{1},302$	6553	607	22	$\bar{1},352$	4634	362	14
$\bar{1},303$	6519	620	22	$\bar{1},353$	4591	379	14
$\bar{1},304$	6484	634	22	$\bar{1},354$	4547	396	14
$\bar{1},305$	6450	647	22	$\bar{1},355$	4504	413	14
$\bar{1},306$	6415	661	21	$\bar{1},356$	4460	430	14
$\bar{1},307$	6381	675	21	$\bar{1},357$	4416	448	13
$\bar{1},308$	6346	688	21	$\bar{1},358$	4372	465	13
$\bar{1},309$	6311	702	21	$\bar{1},359$	4327	482	13
$\bar{1},310$	6275	716	21	$\bar{1},360$	4283	500	13
$\bar{1},311$	6240	730	21	$\bar{1},361$	4238	518	13
$\bar{1},312$	6204	744	21	$\bar{1},362$	4193	535	13
$\bar{1},313$	6168	758	20	$\bar{1},363$	4148	553	12
$\bar{1},314$	6132	772	20	$\bar{1},364$	4102	571	12
$\bar{1},315$	6096	787	20	$\bar{1},365$	4056	589	12
$\bar{1},316$	6060	801	20	$\bar{1},366$	4011	607	12
$\bar{1},317$	6024	815	20	$\bar{1},367$	3964	625	12
$\bar{1},318$	5987	830	20	$\bar{1},368$	3918	643	11
$\bar{1},319$	5950	844	20	$\bar{1},369$	3872	661	11
$\bar{1},320$	5913	859	19	$\bar{1},370$	3825	680	11
$\bar{1},321$	5876	873	19	$\bar{1},371$	3778	698	11
$\bar{1},322$	5839	888	19	$\bar{1},372$	3731	717	11
$\bar{1},323$	5801	903	19	$\bar{1},373$	3683	735	10
$\bar{1},324$	5764	918	19	$\bar{1},374$	3635	754	10
$\bar{1},325$	5726	933	19	$\bar{1},375$	3588	773	10
$\bar{1},326$	5688	947	18	$\bar{1},376$	3539	792	10
$\bar{1},327$	5650	963	18	$\bar{1},377$	3491	810	10
$\bar{1},328$	5611	978	18	$\bar{1},378$	3443	830	10
$\bar{1},329$	5573	737993	18	$\bar{1},379$	3394	849	09
$\bar{1},330$	5534	738008	18	$\bar{1},380$	3345	868	09
$\bar{1},331$	5495	023	18	$\bar{1},381$	3296	887	09
$\bar{1},332$	5456	039	18	$\bar{1},382$	3246	907	09
$\bar{1},333$	5417	054	17	$\bar{1},383$	3196	926	09
$\bar{1},334$	5377	070	17	$\bar{1},384$	3146	946	08
$\bar{1},335$	5337	085	17	$\bar{1},385$	3096	965	08
$\bar{1},336$	5298	101	17	$\bar{1},386$	3046	738985	08
$\bar{1},337$	5258	117	17	$\bar{1},387$	2995	739005	08
$\bar{1},338$	5217	133	17	$\bar{1},388$	2944	025	08
$\bar{1},339$	5177	149	16	$\bar{1},389$	2893	045	07
$\bar{1},340$	5136	165	16	$\bar{1},390$	2842	065	07
$\bar{1},341$	5095	181	16	$\bar{1},391$	2790	085	07
$\bar{1},342$	5054	197	16	$\bar{1},392$	2738	106	07
$\bar{1},343$	5013	213	16	$\bar{1},393$	2686	126	06
$\bar{1},344$	4972	229	16	$\bar{1},394$	2634	146	06
$\bar{1},345$	4930	245	15	$\bar{1},395$	2581	167	06
$\bar{1},346$	4889	262	15	$\bar{1},396$	2528	188	06
$\bar{1},347$	4847	278	15	$\bar{1},397$	2475	208	06
$\bar{1},348$	4804	295	15	$\bar{1},398$	2422	229	05
$\bar{1},349$	4762	312	15	$\bar{1},399$	2368	250	05
$\bar{1},350$	1,4624720	$\bar{2},738328$	$\bar{3},65515$	$\bar{1},400$	1,4622314	$\bar{2},739271$	$\bar{3},65505$

VI. — TABLES DE MARTH.

$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$	$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$
$\bar{1},400$	1,4622314	$\bar{2},739271$	$\bar{3},65505$	$\bar{1},450$	1,4619266	$\bar{2},740460$	$\bar{3},65493$
$\bar{1},401$	2260	293	05	$\bar{1},451$	9198	487	92
$\bar{1},402$	2205	314	05	$\bar{1},452$	9129	514	92
$\bar{1},403$	2151	335	04	$\bar{1},453$	9059	541	92
$\bar{1},404$	2096	357	04	$\bar{1},454$	8990	568	92
$\bar{1},405$	2041	378	04	$\bar{1},455$	8920	595	91
$\bar{1},406$	1985	400	04	$\bar{1},456$	8849	622	91
$\bar{1},407$	1930	422	03	$\bar{1},457$	8779	650	91
$\bar{1},408$	1874	444	03	$\bar{1},458$	8708	677	91
$\bar{1},409$	1817	466	03	$\bar{1},459$	8636	705	90
$\bar{1},410$	1761	488	03	$\bar{1},460$	8565	733	90
$\bar{1},411$	1704	510	03	$\bar{1},461$	8493	761	90
$\bar{1},412$	1647	532	02	$\bar{1},462$	8420	789	89
$\bar{1},413$	1590	555	02	$\bar{1},463$	8348	817	89
$\bar{1},414$	1532	577	02	$\bar{1},464$	8275	845	89
$\bar{1},415$	1474	600	02	$\bar{1},465$	8201	874	88
$\bar{1},416$	1416	622	01	$\bar{1},466$	8127	902	88
$\bar{1},417$	1358	645	01	$\bar{1},467$	8053	931	88
$\bar{1},418$	1299	668	01	$\bar{1},468$	7979	960	88
$\bar{1},419$	1240	691	01	$\bar{1},469$	7904	740989	87
$\bar{1},420$	1181	714	00	$\bar{1},470$	7829	741018	87
$\bar{1},421$	1121	737	00	$\bar{1},471$	7753	047	87
$\bar{1},422$	1062	761	00	$\bar{1},472$	7677	077	86
$\bar{1},423$	1001	784	65500	$\bar{1},473$	7601	106	86
$\bar{1},424$	0941	808	65499	$\bar{1},474$	7525	136	86
$\bar{1},425$	0880	831	99	$\bar{1},475$	7448	166	85
$\bar{1},426$	0819	855	99	$\bar{1},476$	7370	196	85
$\bar{1},427$	0758	879	99	$\bar{1},477$	7292	226	85
$\bar{1},428$	0697	903	99	$\bar{1},478$	7214	256	85
$\bar{1},429$	0635	927	98	$\bar{1},479$	7136	287	84
$\bar{1},430$	0573	951	98	$\bar{1},480$	7057	317	84
$\bar{1},431$	0510	739976	98	$\bar{1},481$	6978	348	84
$\bar{1},432$	0448	740000	98	$\bar{1},482$	6898	379	83
$\bar{1},433$	0385	025	97	$\bar{1},483$	6818	410	83
$\bar{1},434$	0321	049	97	$\bar{1},484$	6738	441	83
$\bar{1},435$	0258	074	97	$\bar{1},485$	6657	472	82
$\bar{1},436$	0194	099	96	$\bar{1},486$	6576	503	82
$\bar{1},437$	0130	124	96	$\bar{1},487$	6494	535	82
$\bar{1},438$	0065	149	96	$\bar{1},488$	6412	567	81
$\bar{1},439$	4620000	174	96	$\bar{1},489$	6330	599	81
$\bar{1},440$	4619935	200	95	$\bar{1},490$	6247	630	81
$\bar{1},441$	9870	225	95	$\bar{1},491$	6164	663	80
$\bar{1},442$	9804	251	95	$\bar{1},492$	6081	695	80
$\bar{1},443$	9738	277	95	$\bar{1},493$	5997	727	80
$\bar{1},444$	9671	302	94	$\bar{1},494$	5912	760	79
$\bar{1},445$	9605	328	94	$\bar{1},495$	5828	793	79
$\bar{1},446$	9538	355	94	$\bar{1},496$	5742	826	79
$\bar{1},447$	9470	381	94	$\bar{1},497$	5657	859	78
$\bar{1},448$	9403	407	93	$\bar{1},498$	5571	892	78
$\bar{1},449$	9335	433	93	$\bar{1},499$	5485	925	78
$\bar{1},450$	1,4619266	$\bar{2},740460$	$\bar{3},65493$	$\bar{1},500$	1,4615398	$\bar{2},741959$	$\bar{3},65477$

VI. — TABLES DE MARTH.

$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$	$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$
$\bar{1},500$	1,4615398	$\bar{2},741959$	$\bar{3},65477$	$\bar{1},550$	1,4610476	$\bar{2},743849$	$\bar{3},65458$
$\bar{1},501$	5311	741992	77	$\bar{1},551$	0365	891	57
$\bar{1},502$	5223	742026	77	$\bar{1},552$	0254	934	57
$\bar{1},503$	5135	060	76	$\bar{1},553$	0142	743977	56
$\bar{1},504$	5046	094	76	$\bar{1},554$	4610029	744020	56
$\bar{1},505$	4957	129	75	$\bar{1},555$	4609915	063	55
$\bar{1},506$	4868	163	75	$\bar{1},556$	9802	107	55
$\bar{1},507$	4778	198	75	$\bar{1},557$	9687	150	54
$\bar{1},508$	4688	232	74	$\bar{1},558$	9572	194	54
$\bar{1},509$	4597	267	74	$\bar{1},559$	9457	238	53
$\bar{1},510$	4506	302	74	$\bar{1},560$	9341	283	53
$\bar{1},511$	4415	338	73	$\bar{1},561$	9224	327	52
$\bar{1},512$	4323	373	73	$\bar{1},562$	9107	372	52
$\bar{1},513$	4230	409	73	$\bar{1},563$	8989	417	52
$\bar{1},514$	4137	444	72	$\bar{1},564$	8870	462	51
$\bar{1},515$	4044	480	72	$\bar{1},565$	8752	507	51
$\bar{1},516$	3950	516	71	$\bar{1},566$	8632	553	50
$\bar{1},517$	3856	553	71	$\bar{1},567$	8512	599	50
$\bar{1},518$	3762	589	71	$\bar{1},568$	8391	645	49
$\bar{1},519$	3666	626	70	$\bar{1},569$	8270	691	49
$\bar{1},520$	3571	663	70	$\bar{1},570$	8148	737	48
$\bar{1},521$	3475	699	70	$\bar{1},571$	8025	784	48
$\bar{1},522$	3378	737	69	$\bar{1},572$	7902	831	47
$\bar{1},523$	3281	774	69	$\bar{1},573$	7778	878	47
$\bar{1},524$	3184	811	68	$\bar{1},574$	7654	925	46
$\bar{1},525$	3086	849	68	$\bar{1},575$	7529	744972	46
$\bar{1},526$	2987	887	68	$\bar{1},576$	7404	745020	45
$\bar{1},527$	2889	925	67	$\bar{1},577$	7277	068	45
$\bar{1},528$	2789	742963	67	$\bar{1},578$	7151	116	44
$\bar{1},529$	2689	743001	66	$\bar{1},579$	7023	165	44
$\bar{1},530$	2589	040	66	$\bar{1},580$	6895	213	43
$\bar{1},531$	2488	078	66	$\bar{1},581$	6767	262	43
$\bar{1},532$	2387	117	65	$\bar{1},582$	6637	311	42
$\bar{1},533$	2285	156	65	$\bar{1},583$	6507	360	42
$\bar{1},534$	2183	196	64	$\bar{1},584$	6377	410	41
$\bar{1},535$	2080	235	64	$\bar{1},585$	6245	460	41
$\bar{1},536$	1977	275	64	$\bar{1},586$	6114	510	40
$\bar{1},537$	1873	314	63	$\bar{1},587$	5981	560	39
$\bar{1},538$	1769	354	63	$\bar{1},588$	5848	610	39
$\bar{1},539$	1664	395	62	$\bar{1},589$	5714	661	38
$\bar{1},540$	1558	435	62	$\bar{1},590$	5579	712	38
$\bar{1},541$	1453	475	62	$\bar{1},591$	5444	763	37
$\bar{1},542$	1346	516	61	$\bar{1},592$	5308	815	37
$\bar{1},543$	1239	557	61	$\bar{1},593$	5172	866	36
$\bar{1},544$	1132	598	60	$\bar{1},594$	5035	918	36
$\bar{1},545$	1024	640	60	$\bar{1},595$	4897	745970	35
$\bar{1},546$	0916	681	59	$\bar{1},596$	4758	746023	35
$\bar{1},547$	0807	723	59	$\bar{1},597$	4619	075	34
$\bar{1},548$	0697	745	58	$\bar{1},598$	4479	128	33
$\bar{1},549$	0587	807	58	$\bar{1},599$	4338	181	33
$\bar{1},550$	1,4610476	$\bar{2},743849$	$\bar{3},65458$	$\bar{1},600$	1,4604197	$\bar{2},746235$	$\bar{3},65432$

VI. — TABLES DE MARTH.

$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$	$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$
$\bar{1},600$	1,4604197	$\bar{2},746235$	$\bar{3},65432$	$\bar{1},650$	1,4596153	$\bar{2},749249$	$\bar{3},65400$
$\bar{1},601$	4055	288	32	$\bar{1},651$	5971	317	65399
$\bar{1},602$	3912	342	31	$\bar{1},652$	5788	385	99
$\bar{1},603$	3769	396	31	$\bar{1},653$	5603	453	98
$\bar{1},604$	3625	451	30	$\bar{1},654$	5418	522	97
$\bar{1},605$	3480	505	29	$\bar{1},655$	5232	591	96
$\bar{1},606$	3334	560	29	$\bar{1},656$	5045	660	96
$\bar{1},607$	3188	615	28	$\bar{1},657$	4857	730	95
$\bar{1},608$	3041	671	28	$\bar{1},658$	4668	800	94
$\bar{1},609$	2893	727	27	$\bar{1},659$	4478	871	93
$\bar{1},610$	2745	783	26	$\bar{1},660$	4287	749941	92
$\bar{1},611$	2596	839	26	$\bar{1},661$	4096	750012	92
$\bar{1},612$	2446	895	25	$\bar{1},662$	3903	084	91
$\bar{1},613$	2295	746952	25	$\bar{1},663$	3709	155	90
$\bar{1},614$	2143	747009	24	$\bar{1},664$	3514	227	89
$\bar{1},615$	1991	066	23	$\bar{1},665$	3318	300	89
$\bar{1},616$	1838	124	23	$\bar{1},666$	3122	373	88
$\bar{1},617$	1684	181	22	$\bar{1},667$	2924	446	87
$\bar{1},618$	1530	240	22	$\bar{1},668$	2725	519	86
$\bar{1},619$	1374	298	21	$\bar{1},669$	2525	593	85
$\bar{1},620$	1218	356	20	$\bar{1},670$	2324	667	85
$\bar{1},621$	1062	415	20	$\bar{1},671$	2123	742	84
$\bar{1},622$	0904	475	19	$\bar{1},672$	1920	816	83
$\bar{1},623$	0745	534	18	$\bar{1},673$	1716	892	82
$\bar{1},624$	0586	594	18	$\bar{1},674$	1511	750967	81
$\bar{1},625$	0426	654	17	$\bar{1},675$	1305	751043	81
$\bar{1},626$	0265	714	17	$\bar{1},676$	1098	119	80
$\bar{1},627$	4600104	775	16	$\bar{1},677$	0889	196	79
$\bar{1},628$	4599941	835	15	$\bar{1},678$	0680	273	78
$\bar{1},629$	9778	897	15	$\bar{1},679$	0470	350	77
$\bar{1},630$	9614	747958	14	$\bar{1},680$	0259	428	76
$\bar{1},631$	9449	748020	13	$\bar{1},681$	4590046	506	75
$\bar{1},632$	9283	082	13	$\bar{1},682$	4589833	584	75
$\bar{1},633$	9117	144	12	$\bar{1},683$	9618	663	74
$\bar{1},634$	8949	207	11	$\bar{1},684$	9402	742	73
$\bar{1},635$	8781	269	11	$\bar{1},685$	9185	822	72
$\bar{1},636$	8612	333	10	$\bar{1},686$	8967	902	71
$\bar{1},637$	8442	396	09	$\bar{1},687$	8748	751982	70
$\bar{1},638$	8271	460	08	$\bar{1},688$	8528	752063	69
$\bar{1},639$	8100	524	08	$\bar{1},689$	8306	144	69
$\bar{1},640$	7927	588	07	$\bar{1},690$	8084	225	68
$\bar{1},641$	7754	653	06	$\bar{1},691$	7860	307	67
$\bar{1},642$	7549	718	06	$\bar{1},692$	7635	389	66
$\bar{1},643$	7404	783	05	$\bar{1},693$	7409	472	65
$\bar{1},644$	7228	849	04	$\bar{1},694$	7182	555	64
$\bar{1},645$	7051	915	04	$\bar{1},695$	6954	639	63
$\bar{1},646$	6874	748981	03	$\bar{1},696$	6724	722	62
$\bar{1},647$	6695	749047	02	$\bar{1},697$	6493	807	61
$\bar{1},648$	6515	114	01	$\bar{1},698$	6261	891	60
$\bar{1},649$	6335	181	01	$\bar{1},699$	6028	752976	59
$\bar{1},650$	1,4596153	$\bar{2},749249$	$\bar{3},65400$	$\bar{1},700$	1,4585794	$\bar{2},753062$	$\bar{3},65358$

VI. — TABLES DE MARTH.

$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$	$l \frac{x}{r+r''}$	$lQ.$	$lQ_1.$	$lQ_2.$
$\bar{1},700$	1,4585794	$\bar{2},753062$	$\bar{3},65358$	$\bar{1},750$	1,4572355	$\bar{2},757894$	$\bar{3},65304$
$\bar{1},701$	5558	147	57	$\bar{1},751$	2048	758003	03
$\bar{1},702$	5322	234	56	$\bar{1},752$	1740	112	02
$\bar{1},703$	5083	320	55	$\bar{1},753$	1429	222	65301
$\bar{1},704$	4844	407	55	$\bar{1},754$	1117	332	65299
$\bar{1},705$	4604	495	54	$\bar{1},755$	0803	443	98
$\bar{1},706$	4362	583	53	$\bar{1},756$	0488	555	97
$\bar{1},707$	4119	671	52	$\bar{1},757$	4570171	667	95
$\bar{1},708$	3874	760	51	$\bar{1},758$	4569852	780	94
$\bar{1},709$	3629	849	50	$\bar{1},759$	9532	758893	93
$\bar{1},710$	3382	753938	49	$\bar{1},760$	9209	759007	92
$\bar{1},711$	3134	754028	48	$\bar{1},761$	8885	121	90
$\bar{1},712$	2884	119	41	$\bar{1},762$	8559	236	89
$\bar{1},713$	2633	210	46	$\bar{1},763$	8232	351	88
$\bar{1},714$	2381	301	45	$\bar{1},764$	7902	467	86
$\bar{1},715$	2128	393	44	$\bar{1},765$	7571	583	85
$\bar{1},716$	1873	485	43	$\bar{1},766$	7238	700	84
$\bar{1},717$	1617	577	42	$\bar{1},767$	6903	818	82
$\bar{1},718$	1359	670	41	$\bar{1},768$	6566	759936	81
$\bar{1},719$	1100	764	40	$\bar{1},769$	6228	760055	80
$\bar{1},720$	0840	858	38	$\bar{1},770$	5887	174	78
$\bar{1},721$	0579	754952	37	$\bar{1},771$	5545	294	77
$\bar{1},722$	0316	755047	36	$\bar{1},772$	5200	415	75
$\bar{1},723$	4580051	142	35	$\bar{1},773$	4854	536	74
$\bar{1},724$	4579786	238	34	$\bar{1},774$	4506	657	73
$\bar{1},725$	9518	334	33	$\bar{1},775$	4156	779	71
$\bar{1},726$	9250	431	32	$\bar{1},776$	3804	760902	70
$\bar{1},727$	8980	528	31	$\bar{1},777$	3450	761026	68
$\bar{1},728$	8708	625	30	$\bar{1},778$	3095	150	67
$\bar{1},729$	8435	723	29	$\bar{1},779$	2737	274	66
$\bar{1},730$	8161	822	28	$\bar{1},780$	2377	400	64
$\bar{1},731$	7885	755921	27	$\bar{1},781$	2015	525	63
$\bar{1},732$	7608	756020	25	$\bar{1},782$	1651	652	61
$\bar{1},733$	7329	120	24	$\bar{1},783$	1285	779	60
$\bar{1},734$	7049	220	23	$\bar{1},784$	0917	761907	58
$\bar{1},735$	6767	321	22	$\bar{1},785$	0547	762035	57
$\bar{1},736$	6484	423	21	$\bar{1},786$	4560175	164	55
$\bar{1},737$	6199	525	20	$\bar{1},787$	4559801	293	54
$\bar{1},738$	5913	627	19	$\bar{1},788$	9425	424	52
$\bar{1},739$	5625	730	17	$\bar{1},789$	9047	554	51
$\bar{1},740$	5336	833	16	$\bar{1},790$	8666	686	49
$\bar{1},741$	5045	756937	15	$\bar{1},791$	8283	818	48
$\bar{1},742$	4752	757041	14	$\bar{1},792$	7899	762951	46
$\bar{1},743$	4458	146	13	$\bar{1},793$	7512	763084	45
$\bar{1},744$	4163	251	12	$\bar{1},794$	7122	218	43
$\bar{1},745$	3866	357	10	$\bar{1},795$	6731	353	41
$\bar{1},746$	3567	463	09	$\bar{1},796$	6337	488	40
$\bar{1},747$	3266	570	08	$\bar{1},797$	5941	624	38
$\bar{1},748$	2964	678	07	$\bar{1},798$	5543	761	37
$\bar{1},749$	2660	785	06	$\bar{1},799$	5143	763898	35
$\bar{1},750$	1,4572355	$\bar{2},757894$	$\bar{3},65304$	$\bar{1},800$	1,4554740	$\bar{2},764036$	$\bar{3},65233$

VI. — log R, argument $\iota : \left(1 - \frac{r + r''}{4a}\right)$.

	1,000	1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700	1,800	1,900
0,000	0,00000	0,07600	0,14557	0,20975	0,26931	0,32488	0,37698	0,42602	0,47234	0,51624
0,002	0,00159	0,07745	0,14691	0,21098	0,27045	0,32596	0,37799	0,42697	0,47324	0,51709
0,004	0,00318	0,07890	0,14824	0,21221	0,27160	0,32703	0,37900	0,42792	0,47414	0,51795
0,006	0,00476	0,08034	0,14957	0,21344	0,27275	0,32810	0,38001	0,42887	0,47504	0,51880
0,008	0,00634	0,08179	0,15089	0,21467	0,27389	0,32917	0,38101	0,42982	0,47594	0,51965
0,010	0,00792	0,08323	0,15222	0,21590	0,27503	0,33024	0,38202	0,43077	0,47684	0,52050
0,012	0,00950	0,08466	0,15354	0,21712	0,27617	0,33131	0,38302	0,43172	0,47773	0,52135
0,014	0,01107	0,08610	0,15486	0,21835	0,27731	0,33237	0,38402	0,43266	0,47863	0,52220
0,016	0,01264	0,08753	0,15618	0,21957	0,27845	0,33344	0,38502	0,43361	0,47952	0,52305
0,018	0,01421	0,08896	0,15750	0,22079	0,27959	0,33450	0,38602	0,43455	0,48042	0,52390
0,020	0,01577	0,09039	0,15881	0,22200	0,28072	0,33556	0,38702	0,43549	0,48131	0,52475
0,022	0,01733	0,09182	0,16012	0,22322	0,28185	0,33662	0,38802	0,43643	0,48220	0,52559
0,024	0,01889	0,09324	0,16143	0,22443	0,28299	0,33768	0,38902	0,43737	0,48309	0,52644
0,026	0,02045	0,09466	0,16274	0,22565	0,28412	0,33874	0,39001	0,43831	0,48398	0,52728
0,028	0,02200	0,09608	0,16405	0,22686	0,28524	0,33980	0,39100	0,43925	0,48487	0,52813
0,030	0,02355	0,09749	0,16535	0,22807	0,28637	0,34086	0,39200	0,44019	0,48575	0,52897
0,032	0,02509	0,09891	0,16665	0,22927	0,28750	0,34191	0,39299	0,44112	0,48664	0,52981
0,034	0,02664	0,10032	0,16795	0,23048	0,28862	0,34296	0,39398	0,44206	0,48753	0,53065
0,036	0,02818	0,10173	0,16925	0,23168	0,28974	0,34401	0,39497	0,44299	0,48841	0,53149
0,038	0,02971	0,10313	0,17055	0,23288	0,29086	0,34506	0,39596	0,44393	0,48929	0,53233
0,040	0,03125	0,10454	0,17184	0,23408	0,29198	0,34611	0,39694	0,44486	0,49018	0,53317
0,042	0,03278	0,10594	0,17313	0,23528	0,29310	0,34716	0,39793	0,44579	0,49106	0,53401
0,044	0,03431	0,10734	0,17442	0,23648	0,29422	0,34821	0,39891	0,44672	0,49194	0,53485
0,046	0,03583	0,10873	0,17571	0,23767	0,29533	0,34925	0,39990	0,44765	0,49282	0,53568
0,048	0,03736	0,11013	0,17700	0,23887	0,29644	0,35030	0,40088	0,44857	0,49370	0,53652
0,050	0,03888	0,11152	0,17828	0,24006	0,29756	0,35134	0,40186	0,44950	0,49458	0,53735
0,052	0,04039	0,11291	0,17956	0,24125	0,29867	0,35238	0,40284	0,45043	0,49545	0,53819
0,054	0,04191	0,11430	0,18084	0,24244	0,29978	0,35342	0,40382	0,45135	0,49633	0,53902
0,056	0,04342	0,11568	0,18212	0,24362	0,30088	0,35446	0,40480	0,45228	0,49721	0,53985
0,058	0,04493	0,11706	0,18340	0,24481	0,30199	0,35549	0,40577	0,45320	0,49808	0,54068
0,060	0,04644	0,11844	0,18467	0,24599	0,30309	0,35653	0,40675	0,45412	0,49895	0,54151
0,062	0,04794	0,11982	0,18694	0,24717	0,30420	0,35756	0,40772	0,45505	0,49983	0,54234
0,064	0,04944	0,12120	0,18821	0,24835	0,30530	0,35860	0,40870	0,45596	0,50070	0,54317
0,066	0,05094	0,12257	0,18948	0,24953	0,30640	0,35963	0,40967	0,45688	0,50157	0,54400
0,068	0,05243	0,12394	0,19075	0,25071	0,30750	0,36066	0,41064	0,45780	0,50244	0,54483
0,070	0,05393	0,12531	0,19101	0,25188	0,30859	0,36169	0,41161	0,45871	0,50331	0,54565
0,072	0,05542	0,12668	0,19227	0,25305	0,30969	0,36272	0,41258	0,45963	0,50418	0,54648
0,074	0,05690	0,12804	0,19353	0,25423	0,31078	0,36374	0,41354	0,46054	0,50505	0,54730
0,076	0,05839	0,12940	0,19479	0,25540	0,31188	0,36477	0,41451	0,46146	0,50591	0,54813
0,078	0,05987	0,13076	0,19605	0,25656	0,31297	0,36579	0,41548	0,46237	0,50678	0,54895
0,080	0,06135	0,13212	0,19730	0,25773	0,31406	0,36682	0,41644	0,46328	0,50764	0,54977
0,082	0,06283	0,13348	0,19856	0,25890	0,31515	0,36784	0,41740	0,46419	0,50851	0,55060
0,084	0,06430	0,13483	0,19981	0,26006	0,31623	0,36886	0,41836	0,46510	0,50937	0,55142
0,086	0,06577	0,13618	0,20106	0,26122	0,31732	0,36988	0,41932	0,46601	0,51023	0,55224
0,088	0,06724	0,13753	0,20230	0,26238	0,31840	0,37090	0,42028	0,46692	0,51109	0,55306
0,090	0,06871	0,13887	0,20355	0,26354	0,31949	0,37191	0,42124	0,46782	0,51195	0,55387
0,092	0,07017	0,14022	0,20479	0,26469	0,32057	0,37293	0,42220	0,46873	0,51281	0,55469
0,094	0,07163	0,14156	0,20603	0,26585	0,32165	0,37394	0,42316	0,46963	0,51367	0,55551
0,096	0,07309	0,14290	0,20727	0,26700	0,32273	0,37496	0,42411	0,47054	0,51453	0,55632
0,098	0,07454	0,14424	0,20851	0,26816	0,32381	0,37597	0,42507	0,47144	0,51538	0,55714
0,100	0,07600	0,14557	0,20975	0,26931	0,32488	0,37698	0,42602	0,47234	0,51624	0,55795

XXIII.

G. 16

VII. — *Mouvement elliptique* : $10^5 C_2$, arg. horizontal $\varphi = \text{arc sine}$.

M.	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°
0	462	457	452	445	437	429	420	411	402	393	383	374	364	355	345
1	462	456	451	444	437	429	420	411	402	393	383	373	363	354	344
2	461	455	450	443	436	428	419	410	401	392	382	372	362	353	343
3	460	454	449	442	435	427	418	409	400	391	381	370	360	351	341
4	459	453	447	440	433	425	416	407	398	389	379	368	358	349	339
5	458	452	445	439	431	423	414	405	396	386	376	365	355	346	336
6	456	450	443	437	429	421	411	402	393	383	373	362	352	342	332
7	454	448	441	435	427	418	408	399	389	379	369	358	348	338	328
8	451	445	439	432	424	415	405	395	385	375	365	354	343	333	323
9	449	442	436	429	421	411	401	391	381	370	360	349	338	328	317
10	446	439	433	425	417	407	397	386	376	365	355	343	332	322	311
11	443	436	429	421	413	403	392	381	371	360	349	337	326	316	305
12	439	432	425	417	408	398	387	376	365	354	343	331	320	309	298
13	435	428	421	412	403	393	382	370	359	348	337	325	313	302	291
14	431	424	416	407	398	387	376	364	353	342	330	318	306	294	283
15	427	420	411	402	392	381	370	358	346	335	323	311	298	286	275
16	423	415	406	396	386	375	363	351	339	327	315	303	290	278	266
17	419	410	401	390	380	369	356	344	332	320	307	295	282	270	257
18	414	405	395	384	373	362	349	337	324	312	299	287	273	261	248
19	409	400	389	378	367	355	342	330	317	304	291	278	265	252	239
20	404	394	383	372	360	348	335	322	309	296	282	269	256	243	230
21	399	388	377	365	353	341	328	314	301	288	274	260	247	234	221
22	393	382	370	358	346	333	320	306	293	279	265	251	238	225	212
23	387	376	364	351	339	326	312	298	285	271	256	242	229	216	203
24	381	369	357	344	331	318	304	290	276	262	247	233	220	207	194
25	375	363	351	337	324	311	296	282	268	254	238	224	211	198	185
26	369	356	344	330	316	303	288	274	259	245	229	215	202	189	176
27	363	350	337	323	309	295	280	266	250	236	220	206	193	180	167
28	356	343	330	316	301	287	272	257	242	227	212	198	185	172	159
29	350	336	323	309	293	279	263	248	233	218	203	189	176	164	151
30	343	329	316	301	285	271	255	240	225	210	195	181	168	156	143
31	337	323	309	294	277	263	247	231	216	201	187	173	160	148	135
32	330	316	301	286	270	255	239	223	208	193	179	165	152	140	128
33	323	309	293	278	262	247	231	215	200	185	171	157	144	133	121
34	316	302	286	271	254	239	223	207	192	177	164	150	137	126	114
35	309	295	279	263	246	231	215	199	184	169	156	143	130	119	108
36	303	288	272	256	239	223	207	191	176	162	149	136	124	113	102
37	296	281	265	248	231	215	199	183	168	155	142	129	117	107	96
38	290	274	258	241	224	208	192	176	161	148	135	123	111	101	91
39	283	267	251	234	217	201	185	169	154	141	128	117	105	96	86
40	277	261	244	227	210	194	178	163	148	135	122	111	100	91	82
41	270	254	237	220	203	187	171	157	142	129	116	105	95	86	78
42	264	248	231	213	196	181	165	151	136	123	111	100	90	82	75
43	258	241	224	206	189	174	159	145	130	118	106	95	86	78	72
44	252	235	218	200	183	168	153	139	125	113	101	91	82	75	69
45	246	229	212	194	177	162	147	133	120	108	96	87	78	72	67
46	240	223	206	188	171	156	141	128	115	103	92	83	75	69	65
47	234	217	200	182	165	150	136	123	110	99	88	80	72	67	63
48	229	211	194	177	160	145	131	118	106	95	85	77	70	65	62
49	224	206	189	172	155	140	126	113	102	91	82	75	68	64	61
50	219	201	184	167	150	135	122	109	98	88	80	73	67	63	61
51	214	196	179	162	145	131	118	105	95	85	78	71	66	63	61
52	209	191	174	157	141	127	114	102	92	83	76	70	65	63	62
53	204	186	169	152	137	123	110	99	89	81	74	69	65	63	63
54	200	182	165	148	133	119	107	96	87	79	73	69	65	64	64
55	195	178	161	144	129	116	104	94	85	78	72	69	66	65	66
56	191	174	157	141	126	113	102	92	84	77	72	69	67	67	68
57	187	170	153	137	123	110	100	90	83	76	72	69	68	69	70
58	184	167	150	134	120	108	98	89	82	76	72	70	70	71	73
59	180	163	147	131	118	106	97	88	82	76	73	71	72	73	76
60	177	160	144	129	116	105	96	88	82	77	74	73	74	76	80

USAGE DES TABLES.

La Table I donne, dans l'hypothèse du rayon vecteur de la Terre constant et égal à l'unité, hypothèse admissible pour les premiers essais, la valeur de l'inverse du rayon vecteur r en fonction de la distance à la Terre Δ , et de l'angle à la Terre dont le cosinus = C.

La même Table donne $\log \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{r^3}\right)$, utile pour le calcul des orbites paraboliques et elliptiques.

La Table II, réduction de la grande Table d'Oppolzer, fait connaître les valeurs de $M = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$, avec six décimales, les valeurs de M sont données pour les sept premiers degrés de l'angle ν , ensuite les logarithmes jusqu'à $\nu = 160^\circ$.

Quand ν atteint ou dépasse 160° , on utilise les formules

$$M = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}} = (1,4378124) \frac{1 + 3 \cotang^{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \nu}{\cotang^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \nu}, \quad \cos \frac{1}{2} \nu = \sqrt{\frac{q}{r}}, \quad \cotang \frac{1}{2} \nu = \frac{\cos \frac{1}{2} \nu}{\sin \frac{1}{2} \nu}.$$

Pour le problème inverse, calcul de ν d'après t , on peut prendre (Cf. OPPOLZER, édition Pasquier, p. 62)

$$l \cotang \frac{1}{2} \nu = l y + (1,6377843) y^2 \sqrt{1 + y^2}, \\ y^2 = (0,9585416) \frac{q}{t^{\frac{2}{3}}};$$

les parenthèses désignent des logarithmes.

La Table III permet, dans le cas de la relation d'Euler

$$6\theta' = (r + r'' + x)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - x)^{\frac{3}{2}},$$

de déduire $\frac{x^2}{2\theta'^2}$ de $r + r''$ pour les valeurs de l'argument $\frac{2\theta'}{(r + r'')^{\frac{3}{2}}} < 0,50$.

Pour les valeurs plus grandes, on peut utiliser la Table ci-après :

Valeurs de $10^6 \log \frac{x^2}{2\theta'^2} \frac{r+r''}{2}$,			arg $\frac{2\theta'}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}}$ de 0,50 à 0,90.								
0,50	9802		0,60	14705		0,70	21145		0,80	29807	
0,51	10235	433	0,61	15272	567	0,71	21895	750	0,81	30844	1037
0,52	10679	444	0,62	15855	583	0,72	22667	772	0,82	31921	1077
0,53	11136	457	0,63	16454	599	0,73	23463	796	0,83	33040	1119
0,54	11606	470	0,64	17069	615	0,74	24284	821	0,84	34207	1167
0,55	12088	482	0,65	17702	633	0,75	25130	846	0,85	35424	1217
0,56	12584	496	0,66	18352	650	0,76	26004	874	0,86	36697	1273
0,57	13093	509	0,67	19021	669	0,77	26907	903	0,87	38033	1336
0,58	13616	523	0,68	19708	687	0,78	27840	933	0,88	39439	1406
0,59	14153	537	0,69	20416	708	0,79	28806	966	0,89	40926	1487
0,60	14705	552	0,70	21145	729	0,80	29807	1001	0,90	42506	1580

Pour des valeurs encore plus grandes de l'argument, recourir à la transformation d'Encke et poser $x : (r + r'') = \sin \chi$; il vient

$$\frac{6\theta'}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = \left(\cos \frac{\chi}{2} + \sin \frac{\chi}{2}\right)^3 - \left(\cos \frac{\chi}{2} - \sin \frac{\chi}{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} \sin 3 \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{\sin \frac{1}{2}\chi}{\sqrt{2}}\right),$$

d'où

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\chi}{\sqrt{2}} = \sin \frac{1}{3} \operatorname{arc} \left[\sin = \frac{3\theta'}{2^{\frac{1}{2}}(r+r'')^{\frac{3}{2}}} \right],$$

$\operatorname{arc} \left[\sin = \frac{3\theta'}{2^{\frac{1}{2}}(r+r'')^{\frac{3}{2}}} \right]$ devant être compris entre 0° et 90° , puisque le premier membre est $< \frac{1}{2}$; on aura ensuite $x = (r + r'') \sin \chi$.

Par continuité, on résout la relation

$$6\theta' = (r + r'' + x)^{\frac{3}{2}} + (r + r'' - x)^{\frac{3}{2}},$$

dans le cas d'un mouvement héliocentrique $> 180^\circ$, en prenant la valeur de $\operatorname{arc} \left[\sin = \frac{3\theta'}{2^{\frac{1}{2}}(r+r'')^{\frac{3}{2}}} \right]$ entre 90° et 180° .

Les Tables IV et V, empruntées au *Theoria Motus...*, ne réclament aucune explication.

Les Tables de Marth (VI) permettent de passer facilement, dans le cas d'une comète, de l'hypothèse parabolique à celle d'une durée de révolution donnée. On a (p. 71) la relation

$$\log(t'' - t) = \log z + \frac{1}{2} \log(r + r'') + \log Q + \frac{4Q_1}{\partial K} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{r+r''}{4a}} \right) + \left(\frac{x}{a} \right)^2 Q_2 R$$

+ termes négligés;

la valeur des termes négligés est indiquée dans la Table ci-dessous, à double entrée; elle ne varie pas sensiblement quand le produit $\frac{x}{r+r''} \frac{r+r''}{a}$ demeure constant; l'unité est la septième décimale.

$$l \frac{r+r''}{a}$$

$l \frac{x}{r+r''}$	$\bar{1},0$	$\bar{1},1$	$\bar{1},2$	$\bar{1},3$	$\bar{1},4$	$\bar{1},5$	$\bar{1},6$	$\bar{1},7$	$\bar{1},8$	$\bar{1},9$	$0,0$
$\bar{1},0$								0,0	0,1	0,2	0,4
$\bar{1},1$							0,0	0,1	0,2	0,4	1,0
$\bar{1},2$						0,0	0,1	0,2	0,4	1,1	2,6
$\bar{1},3$				0,0	0,0	0,1	0,2	0,5	1,1	2,6	6,6
$\bar{1},4$			0,0	0,1	0,1	0,2	0,5	1,2	2,8	6,7	
$\bar{1},5$		0,0	0,1	0,1	0,3	0,6	1,3	3,0	7,0		
$\bar{1},6$	0,0	0,1	0,1	0,3	0,7	1,5	3,3	7,5			
$\bar{1},7$	0,1	0,2	0,4	0,8	1,7	3,8	8,4	19			
$\bar{1},8$	0,2	0,5	1,0	2,0	4,4	9,6	22				

Il faut recourir à des essais pour tirer x de la relation ci-dessus, $l'' - l$, $r + r''$ et a étant supposés donnés.

La Table VII a pour objet de faciliter le calcul de l'anomalie vraie pour les orbites des astéroïdes dont l'excentricité ne dépasse pas $0,407 (= \sin 24^\circ)$, la précision étant celle des Tables de logarithmes à cinq décimales.

Cette Table reproduit, avec une légère modification, celle publiée en 1885 (*Bulletin astronomique*, t. II, p. 453). L'anomalie vraie v est donnée en fonction de l'anomalie moyenne M par la relation

$$\frac{v}{2} = \arcsin(\operatorname{tang} = C \operatorname{tang} \frac{1}{2} M) - \frac{1}{3} [\arcsin(\operatorname{tang} = C \operatorname{tang} \frac{1}{2} M) - \frac{1}{2} M].$$

Si $\arcsin e = \varphi$ est $\leq 10^\circ$, on a

$$\log C = 2 \log \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{5}{8} \varphi) + C_1;$$

Si φ dépasse 10° , on prend

$$\log C = 2 \log \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{5}{8} \varphi) + f(C_2 - 400).$$

Les valeurs de C_1 et f se trouvent comprises dans les petites Tables ci-après; les valeurs de C_2 sont données dans la Table VII.

Les valeurs de $\log C$ pour le commencement et la fin d'une éphéméride seront souvent identiques; en tout cas, une interpolation facile fera connaître les valeurs de $\log C$ pour les dates intermédiaires.

Valeurs de C₁ (arg. horiz. φ compris entre 0° et 10°).

M.	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	M.
0°	0	0	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+8	0°
5	0	0	0	+1	+2	+2	+4	+5	+6	+7	5
10	0	0	0	+1	+1	+2	+3	+4	+5	+6	10
15	0	0	0	+1	+1	+2	+2	+3	+3	+3	15
20	0	0	0	0	+1	+1	+2	+2	+1	0	20
25	0	0	0	0	+1	+1	+1	0	-1	-3	25
30	0	0	0	0	0	0	-1	-2	-4	-7	30
35	0	0	0	0	-1	-1	-2	-4	-7	-12	35
40	0	0	0	-1	-1	-2	-4	-6	-10	-16	40
45	0	0	0	-1	-2	-3	-5	-8	-13	-20	45
50	0	0	0	-1	-2	-4	-7	-10	-16	-23	50
55	0	0	-1	-1	-3	-5	-8	-12	-18	-26	55
60	0	0	-1	-2	-3	-5	-9	-14	-20	-28	60
65	0	0	-1	-2	-3	-6	-9	-14	-21	-30	65
70	0	0	-1	-2	-4	-6	-10	-15	-22	-31	70
75	0	0	-1	-2	-4	-6	-10	-15	-22	-31	75
80	0	0	-1	-2	-4	-7	-11	-16	-22	-30	80
85	0	0	-1	-2	-4	-6	-10	-15	-21	-29	85
90	0	0	-1	-2	-4	-6	-10	-14	-20	-27	90
95	0	0	-1	-2	-4	-6	-9	-13	-18	-24	95
100	0	0	-1	-2	-3	-5	-8	-12	-16	-21	100
105	0	0	-1	-2	-3	-5	-7	-10	-13	-17	105
110	0	0	-1	-2	-3	-4	-6	-8	-10	-13	110
115	0	0	-1	-1	-2	-3	-4	-6	-7	-9	115
120	0	0	0	-1	-2	-2	-3	-4	-4	-4	120
125	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	125
130	0	0	0	0	0	0	0	+1	+2	+5	130
135	0	0	0	0	0	+1	+2	+3	+5	+9	135
140	0	0	0	0	+1	+2	+3	+5	+8	+13	140
145	0	0	0	0	+1	+2	+4	+7	+11	+17	145
150	0	0	0	+1	+2	+3	+6	+9	+14	+21	150
155	0	0	0	+1	+2	+4	+7	+11	+16	+24	155
160	0	0	0	+1	+2	+4	+7	+12	+18	+26	160
165	0	0	+1	+1	+3	+5	+8	+13	+19	+28	165
170	0	0	+1	+1	+3	+5	+9	+14	+21	+30	170
175	0	0	+1	+1	+3	+5	+9	+14	+21	+30	175
180	0	0	+1	+1	+3	+5	+9	+14	+21	+31	180

Valeurs de f.

φ.	f.	φ.	f.
10°	0,127	17°	0,515
11	+34	18	+91
12	+40	19	+103
13	+47	20	+116
14	+54	21	+131
15	+62	22	+148
16	+71	23	+166
17	+80	24	+186
	+11		

APPENDICE ⁽¹⁾.

FORMULES USUELLES POUR LE CALCUL D'UNE ORBITE CIRCULAIRE ET D'UNE ORBITE PARABOLIQUE.

Notations. — Les quantités qui se rapportent aux différentes observations étant distinguées par des accents, soient, pour la première observation,

t le temps moyen de l'observation ;

α, δ l'ascension droite et la déclinaison ramenées à janvier 0 ;

x, y, z les coordonnées rectangulaires héliocentriques du lieu M de l'astre rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de janvier 0 ;

r, ν le rayon vecteur et l'anomalie vraie de l'astre ;

Δ la distance géocentrique ;

ξ, η, ζ les cosinus directeurs du lieu géocentrique (c'est-à-dire que l'on a posé $\cos \delta \cos \alpha = \xi, \cos \delta \sin \alpha = \eta, \sin \delta = \zeta$).

Soient, pour le Soleil,

L, R la longitude et le rayon vecteur ;

X, Y, Z les coordonnées rectangulaires équatoriales.

Les coordonnées du Soleil sont rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens. X, Y, Z sont déduites directement de l'éphéméride par un calcul à cinq décimales (orbite circulaire) et par le calcul d'une éphéméride ; autrement, elles sont calculées par les formules (la latitude du Soleil est négligée, ϵ est l'obliquité moyenne)

$$X = R \cos L, \quad Y = R \sin L \cos \epsilon, \quad Z = R \sin L \sin \epsilon \quad (\text{c/. p. 61}).$$

On a

$$x = \Delta \cos \delta \cos \alpha - X = \Delta \xi - X, \quad y = \Delta \eta - Y, \quad z = \Delta \zeta - Z$$

et, l'angle à la Terre étant désigné par ψ ,

$$R \cos \psi = X \xi + Y \eta + Z \zeta = \Sigma X \xi.$$

(¹) Les formules à employer pour la préparation des calculs et les essais étant disséminées dans le texte, on a cru utile de les réunir ici pour plus de clarté, en y ajoutant quelques perfectionnements. Pour les orbites elliptiques consulter le Chapitre III et le Chapitre IV pour la correction des orbites.

ORBITE CIRCULAIRE D'UNE PETITE PLANÈTE, DÉDUITE DE DEUX OBSERVATIONS.

Éléments du calcul (à faire avec cinq décimales).

$$\begin{array}{llll} t, & \alpha, & \delta; & \xi, \eta, \zeta; & X, Y, Z; & R; \\ t'', & \alpha'', & \delta''; & \xi'', \eta'', \zeta''; & X'', Y'', Z''; & R''. \end{array}$$

Calcul de $R \cos \psi = \Sigma X \xi$, $R'' \cos \psi'' = \Sigma X'' \xi''$. — Pour une valeur supposée r du rayon de l'orbite circulaire ($r = 2,8$ en moyenne), on calcule (p. 33)

$$\Delta = R \cos \psi + \sqrt{R^2 \cos^2 \psi - R^2 + r^2}, \quad \Delta'' = R'' \cos \psi'' + \sqrt{R''^2 \cos^2 \psi'' - R''^2 + r^2},$$

les coordonnées rectangulaires

$$\begin{array}{lll} x = \Delta \xi - X, & y = \Delta \eta - Y, & z = \Delta \zeta - Z, \\ x'' = \Delta'' \xi'' - X'', & y'' = \Delta'' \eta'' - Y'', & z'' = \Delta'' \zeta'' - Z''; \end{array}$$

le carré de la corde x joignant les deux lieux

$$x^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2;$$

ensuite $[\theta' = k(t'' - t), \log k = \bar{2}, 2355814]$

$$\frac{x^2}{\theta'^2} r - 1 + \frac{1}{12} \frac{\theta'^2}{r^3} \quad (\text{p. 7}).$$

Une correction approchée de r , si ce nombre n'est pas nul, s'obtient en le divisant par

$$\frac{2\Delta - 1}{1 + \Delta} + 2 \frac{f}{\theta'} (1 - \Delta) - \frac{f^2}{\theta'^2} (1 + \Delta) \quad (1);$$

$\frac{f}{\theta'}$ est le rapport des mouvements apparents diurnes de l'astre et de la Terre; le mouvement de l'astre se déduit des mouvements $d\alpha, d\delta$ en ascension droite et déclinaison, en formant $\sqrt{\cos^2 \delta d\alpha^2 + d\delta^2}$.

(1) On arrive à ce résultat, non indiqué dans le texte, en remplaçant dans le coefficient de $d\Delta$ (p. 29), pris en signe contraire,

$$\frac{2\Delta - 1}{1 + \Delta} + \frac{2f}{\theta'} P(1 - \Delta) - 2 \frac{f^2}{\theta'^2} \Delta,$$

$2P$ par une limite supérieure $2 - \frac{f}{\theta'}$ (p. 27); il vient alors, en admettant $1 - \Delta < 0$ ou petit, ce qui a lieu pour les astéroïdes :

$$\frac{2\Delta - 1}{1 + \Delta} + \frac{2f}{\theta'} P(1 - \Delta) - 2 \frac{f^2}{\theta'^2} \Delta > \frac{2\Delta - 1}{1 + \Delta} + 2 \frac{f}{\theta'} (1 - \Delta) - \frac{f^2}{\theta'^2} (1 + \Delta).$$

ORBITE PARABOLIQUE D'UNE COMÈTE.

Éléments du calcul (à faire avec six décimales).

$$\begin{array}{llllll} t; & \alpha, & \delta; & \xi, & \eta, & \zeta; & L, & R; & X, & Y, & Z; \\ t'; & \alpha', & \delta'; & & & & L', & R'; & X', & Y', & Z'; \\ t''; & \alpha'', & \delta''; & \xi'', & \eta'', & \zeta''; & L'', & R''; & X'', & Y'', & Z''. \end{array}$$

Préparation des essais. — On calcule $g, G', X'' - X, Y'' - Y, Z'' - Z$ (p. 8, 44) :

$$\begin{aligned} \frac{g}{R} \cos(G' - L) &= \frac{R''}{R} \cos(L'' - L) - 1, \\ \frac{g}{R} \sin(G' - L) &= \frac{R''}{R} \sin(L'' - L); \\ X'' - X &= g \cos G', \\ Y'' - Y &= g \sin G' \cos \varepsilon, \\ Z'' - Z &= g \cos G' \sin \varepsilon; \end{aligned} \quad g > 0,$$

les différences $X'' - X, \dots$ doivent s'accorder avec les différences conclues directement; puis (p. 10, 61)

$$\begin{aligned} X_1 &= X' - \frac{2t' - t - t''}{3(t'' - t)} (X'' - X), & Y_1 &= Y' - \frac{2t' - t - t''}{3(t'' - t)} (Y'' - Y), \\ Z_1 &= Z' - \frac{2t' - t - t''}{3(t'' - t)} (Z'' - Z) \quad (1). \end{aligned}$$

On calcule les coefficients de x^2 dans

$$\begin{aligned} x^2 &= f^2 \left(\frac{\Delta + \Delta''}{2} \right)^2 - 2fgP \frac{\Delta + \Delta''}{2} + h^2 \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{2} \right)^2 - 2hgQ \left(\frac{\Delta'' - \Delta}{2} \right) + g^2, \\ \left. \begin{aligned} f^2 &= \Sigma(\xi'' - \xi)^2, & fgP &= \Sigma(\xi'' - \xi)(X'' - X) \\ h^2 &= \Sigma(\xi'' + \xi)^2, & hgQ &= \Sigma(\xi'' + \xi)(X'' - X) \end{aligned} \right\} \quad (\text{cf. p. 7, 42, 44}); \end{aligned}$$

ensuite les coefficients de $\frac{x^2}{2\theta'^2}$. Comme vérification, on calcule x^2 , ou mieux $\frac{x^2}{2\theta'^2}$, au moyen de $x^2 = \Sigma(x'' - x)^2$, des valeurs simples telles que $\pm 1; 0; \pm 0,1; \dots$ étant attribuées à $\frac{\Delta + \Delta''}{2}$ et $\frac{\Delta'' - \Delta}{2}$; les deux résultats doivent s'accorder.

(1) L'introduction de X_1, Y_1, Z_1 à la place de X', Y', Z' , omise comme inutile dans le texte, a l'avantage de supprimer, sans rien compliquer, la considération des termes en $C - c$ dans la relation d'Olbers et dans la relation complémentaire (p. 12, 36).

On calcule (p. 42, 43)

$$\begin{aligned} R \cos \psi &= \Sigma X \xi, & R'' \cos \psi'' &= \Sigma X'' \xi'', \\ R \cos \psi + R'' \cos \psi'', & R'' \cos \psi'' - R \cos \psi, \\ (R \cos \psi + R'' \cos \psi'')^2, & (R'' \cos \psi'' - R \cos \psi)^2, & (R'' \cos \psi'' - R \cos \psi)(R \cos \psi + R'' \cos \psi''); \end{aligned}$$

d'où

$$2(R''^2 \sin^2 \psi'' + R^2 \sin^2 \psi), \quad R''^2 \sin^2 \psi'' - R^2 \sin^2 \psi.$$

Essais. — D'une valeur supposée de $\Delta + \Delta''$, fournie par un premier calcul en s'aidant de la Table I⁽¹⁾, on déduit $\Delta'' - \Delta$ par la relation d'Olbers (p. 12, 45):

$$\begin{aligned} Y_1 \operatorname{tang} \delta' - Z_1 \sin \alpha' &= k \sin K & (k > 0), \\ X_1 \operatorname{tang} \delta' - Z_1 \cos \alpha' &= k \cos K \\ \frac{\cos \delta \operatorname{tang} \delta' \sin(\alpha - K) - \sin \delta \sin(\alpha' - K)}{\theta''} \Delta & \\ + \frac{\cos \delta'' \operatorname{tang} \delta' \sin(\alpha'' - K) - \sin \delta'' \sin(\alpha' - K)}{\theta} \Delta'' &= 0; \end{aligned}$$

$$\theta = (\bar{2}, 2355814)(t'' - t'), \quad \theta' = (\bar{2}, 2355814)(t'' - t), \quad \theta'' = (\bar{2}, 2355814)(t' - t).$$

Si la comète (d'après son apparence, d'après la nature du mouvement assez faible et de sens direct) peut être périodique, il faut préférer la relation complémentaire (p. 36, 37, 40, 48)

$$\begin{aligned} \frac{\cos \delta \operatorname{tang} \delta' \cos(\alpha - K) - \sin \delta \cos(\alpha' - K)}{\theta''} \Delta & \\ + \frac{\cos \delta'' \operatorname{tang} \delta' \cos(\alpha'' - K) - \sin \delta'' \cos(\alpha' - K)}{\theta} \Delta'' + \frac{k \theta'}{2 R R' R''} \left[1 - \frac{R R' R''}{\left(\frac{r + r''}{2} \right)^3} \right] &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$(r + r'')^2 = (\Delta + \Delta'' - R \cos \psi - R'' \cos \psi'')^2 + 2(R^2 \sin^2 \psi + R''^2 \sin^2 \psi'').$$

(k n'est pas la constante de Gauss, mais la quantité mentionnée plus haut.)

(¹) On met l'équation à résoudre sous la forme $a\Delta + b - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{r} - c \right) = 0$. Le dernier terme varie d'une manière assez régulière avec Δ (RADAU, *Bulletin astronomique*, t. IV, p. 416). Avec une Table de multiplication, on calcule le premier membre pour deux valeurs de Δ dont l'une peut être $\Delta = 1$. Le Tableau de la page 38 montre que, dans les trois quarts des cas, Δ et r sont ensemble plus petits ou plus grands que l'unité.

Partant de $\Delta + \Delta''$ et de $\Delta'' - \Delta$, au moyen des formules (p. 40)

$$\begin{aligned} & 2(r^2 + r''^2) \\ &= (\Delta + \Delta'' - R \cos \psi - R'' \cos \psi'')^2 + (\Delta'' - \Delta - R'' \cos \psi'' + R \cos \psi)^2 + 2(R^2 \sin^2 \psi + R''^2 \sin^2 \psi''), \\ & r''^2 - r^2 \\ &= (\Delta + \Delta'' - R \cos \psi - R'' \cos \psi'') (\Delta'' - \Delta - R'' \cos \psi'' + R \cos \psi) + R''^2 \sin^2 \psi'' - R^2 \sin^2 \psi, \end{aligned}$$

on calcule successivement (p. 19, 45, 48)

$$\begin{aligned} & 2(r^2 + r''^2), \quad r''^2 - r^2, \quad \sin 2\omega = \frac{r''^2 - r^2}{r^2 + r''^2}, \\ \text{tang } \omega &= \frac{\sin 2\omega}{1 + \cos 2\omega}, \quad \frac{r + r''}{2} = \sqrt{\frac{r^2 + r''^2}{2}} \cos \omega, \end{aligned}$$

puis $\frac{x^2}{2\theta'^2}$, d'après $\frac{r + r''}{2}$ (Table III), ce qui conduit à une nouvelle valeur de $\Delta + \Delta''$, et ainsi de suite. [Voir page 43 le procédé pour abréger les essais (').]

CALCUL DES CONSTANTES DE GAUSS ET DES ÉLÉMENTS.

La manière de procéder est la même pour toutes les orbites. Les essais ayant donné les distances géocentriques Δ, Δ'' , on calcule les coordonnées rectangulaires (p. 32, 46, 50)

$$\begin{aligned} x &= \Delta \xi - X, \quad \dots, \\ x'' &= \Delta'' \xi'' - X'', \quad \dots, \\ x'' - x &\text{ et } x'' + x, \quad \dots, \end{aligned}$$

puis (p. 19)

$$\begin{aligned} x^2 &= \Sigma(x'' - x)^2, \quad 2(r^2 + r''^2) = \Sigma(x'' + x)^2 + x^2, \quad \sin 2\omega = \frac{\Sigma(x'' - x)(x'' + x)}{r^2 + r''^2}, \\ \sin^2 \frac{\varphi'' - \varphi}{2} &= \frac{x^2 - (r + r'')^2 \text{tang}^2 \omega}{(r + r'')^2 \cos^2 \omega'}, \quad \text{où } \sin \omega' = \text{tang } \omega. \end{aligned}$$

Aussitôt après, vient le calcul des constantes de Gauss, d'après les rela-

(1) Si le mouvement apparent de la comète était très faible, comme il est arrivé pour la comète Holmes, il serait indiqué, ayant poussé le calcul jusqu'à $\cos \omega$, de calculer $\frac{x^2}{2\theta'^2}$ avec $\Delta + \Delta''$, $\Delta'' - \Delta$, d'en tirer (Table III) $r + r''$, $2(r^2 + r''^2) = (r + r'')^2 \sec^2 \omega$ et, de là, $\Delta + \Delta''$. On sait que la comète Holmes a offert des difficultés spéciales aux astronomes. Consulter, à ce sujet, l'Ouvrage intéressant de M. Zwiers : *Recherches sur l'orbite de la comète périodique de Holmes et sur les perturbations de son mouvement elliptique*. Amsterdam, 1895.

tions (p. 34)

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \sin a \cos \left(A' + \frac{\varphi + \varphi''}{2} \right) \\ = [x'' - x - (x'' + x) \operatorname{tang} \omega] \frac{1}{\frac{r + r''}{2} \cos^2 \omega'} \\ 2 \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \sin a \sin \left(A' + \frac{\varphi + \varphi''}{2} \right) \\ = [x'' + x - (x'' - x) \operatorname{tang} \omega] \frac{1}{\frac{r + r''}{2} \cos^2 \omega'} \end{aligned} \right\} \quad (\text{cf. p. 46, 50})$$

et les relations analogues, avec les contrôles

$$\Sigma \sin^2 a = 2, \quad \Sigma \sin^2 a \sin 2A' = 0, \quad \Sigma \sin^2 a \cos 2A' = 0.$$

Le calcul des éléments dans l'orbite est poursuivi en distinguant les orbites :

Cercle. — Moyen mouvement en secondes d'arc $(3,5500065)r^{-3}$. Origine du temps au milieu de l'intervalle des deux observations.

Parabole. — La distance périhélie q et $\frac{\varphi + \varphi''}{2}$ sont donnés par les formules (p. 43)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{r + r''}{2} \cos^2 \omega'} \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi''}{4}}{q} = \frac{\cos \frac{\varphi'' - \varphi}{4}}{\cos \frac{\omega'}{2}} \frac{\operatorname{tang} \omega}{\sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2}} \\ \sqrt{\frac{r + r''}{2} \cos^2 \omega'} \frac{\cos \frac{\varphi + \varphi''}{4}}{q} = \frac{\cos \frac{\omega'}{2}}{\cos \frac{\varphi'' - \varphi}{4}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{cf. p. 46, 50});$$

de $\frac{\varphi + \varphi''}{2}$ et $\frac{\varphi'' - \varphi}{2}$ sont déduits φ , φ'' et la date T du passage au périhélie.

Ellipse. — On calcule la quantité η^2 (p. 71) au moyen d'approximations successives avec les Tables IV et V; on a

$$\begin{aligned} \text{où} \quad h &= \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}, \\ m &= \frac{\theta'^2}{\left[(r + r'') \cos \omega' \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \right]^3}, \quad l = \frac{x^2}{2(r + r'')^2 \cos \omega' \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \left(1 + \cos \omega' \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Supposant $\xi = 0$, on calcule h et $\log \eta^2$ par la Table IV, ensuite (Table V)
 ξ au moyen de $x = \frac{m}{\eta^2} - l$; de nouveau h , $\log \eta^2$, ξ ,

Après que l'on a obtenu (p. 74)

$$\frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' = \frac{2m \cos \omega' \cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}}{\eta^2 \sin^2 \frac{\varphi'' - \varphi}{2}},$$

e et $\frac{\varphi + \varphi''}{2}$ sont déduits de

$$\frac{e\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' \sin \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \frac{\text{tang } \omega}{\sin \frac{\varphi'' - \varphi}{2}},$$

$$\frac{e\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' \cos \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \frac{1}{\cos \frac{\varphi'' - \varphi}{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{rr''}}{p} \cos \omega' \right)$$

(cf. p. 65, 77).

(Voir page 75 pour différentes vérifications.)

Les éléments Ω , i , ϖ s'obtiennent rapidement par les formules de la page 21.
 Voir page 47 pour la disposition du calcul.

