

MÉMOIRE

SUR LA

STABILITÉ DU SYSTÈME SOLAIRE,

PAR M. D. EGINITIS.

I.

1. Depuis la découverte de la gravitation universelle, la détermination des lois exactes des mouvements des planètes ne dépend que d'un problème de Mécanique. En appliquant l'Analyse à la solution de ce grand problème, on est conduit à trois équations différentielles du second ordre.

Malheureusement l'intégration rigoureuse de ces équations présente des difficultés analytiques insurmontables dans l'état actuel de la Science. On ne peut les intégrer que dans le cas simple où l'on considère deux corps, le Soleil et une planète. Mais, d'après la loi de Newton, les planètes ne sont pas seulement attirées par le Soleil : elles s'attirent encore mutuellement, et ces attractions mutuelles ont pour effet de troubler le mouvement elliptique qu'auraient les diverses planètes si chacune d'elles existait seule avec le Soleil. Elles produisent ainsi sur leurs éléments elliptiques des *inégalités* qui varient d'une planète à l'autre. Fort heureusement, la prépondérance du Soleil dans notre système planétaire et la grandeur des distances mutuelles des planètes rendent ces inégalités tellement petites que, bien qu'on ne puisse pas en trouver la valeur rigoureuse et finie, on arrive, par des approximations successives, à en obtenir une mesure suffisamment exacte.

2. Les inégalités des éléments elliptiques des orbites planétaires sont de deux sortes : les unes, insensibles pour un petit intervalle de temps, croissent indéfiniment avec le temps et finissent par devenir considérables : on les nomme *inégalités séculaires*; les autres dépendent de la configuration mutuelle des planètes, de leurs nœuds et de leurs périhélies, et redeviennent les mêmes toutes

XIX.

H.1

les fois que ces configurations sont les mêmes; on les nomme pour cela *inégalités périodiques*.

De toutes les inégalités séculaires, la plus importante est celle qui peut affecter les grands axes, non seulement parce que la stabilité du système solaire en dépend absolument, mais encore parce que toute l'Astronomie théorique est basée sur leur invariabilité.

Dans son beau Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1773, l'illustre Laplace a démontré, le premier, que les grands axes ne sont pas sujets à des inégalités séculaires; mais, dans son analyse, il n'a tenu compte que des termes du premier et du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites planétaires.

3. On a cherché ensuite à trouver ce que pouvaient donner les termes négligés. En 1776, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, Lagrange a pu réduire toutes les inégalités à une formule excessivement simple, dépendant de la dérivée d'une fonction finie du moyen mouvement de la planète considérée, et démontrer, avec une facilité extrême, que le fameux théorème de l'invariabilité des grands axes subsiste même quand on tient compte de toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais cette démonstration de Lagrange ne peut être considérée comme suffisante, puisqu'elle ne s'étend que jusqu'aux premières puissances des masses des planètes troublantes.

Quelques années plus tard, en reprenant l'étude de cette question, Poisson a obtenu des résultats fort importants. Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1808 ⁽¹⁾, il a pu démontrer l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires en ayant égard aux deuxièmes puissances des masses des planètes perturbatrices.

Dans ce Mémoire, Poisson a d'abord fait voir, par la méthode de la *variation des constantes* de Lagrange, que les inégalités des éléments de la planète troublée n'introduisent aucun terme séculaire; ensuite, en employant l'équation des forces vives, il a démontré que les variations des éléments des orbites des planètes troublantes sont également sans effet sur les inégalités séculaires. Mais le calcul de Poisson est extrêmement long et compliqué, à cause du changement de la fonction perturbatrice d'une planète à l'autre.

4. L'importance fondamentale du *théorème de Poisson* a engagé Lagrange à reprendre cette question et à en chercher la démonstration par une voie tout à

⁽¹⁾ *Journal de l'École Polytechnique*, XV^e Cahier, année 1809.

fait différente. Pour éviter l'inconvénient de la méthode suivie par Poisson et pour simplifier le calcul, il a rapporté ⁽¹⁾ le mouvement des planètes non pas au centre du Soleil, mais au centre de gravité du système planétaire. En suivant cette méthode, on obtient des équations différentielles dans lesquelles la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes; on pourrait ainsi démontrer, par une même analyse, que le théorème de l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires est vrai, même quand on tient compte des deuxièmes puissances des masses.

Malheureusement cette démonstration de Lagrange est entachée de quelques erreurs de calcul et, par conséquent, elle a perdu toute sa valeur.

Dans ces dernières années, M. Tisserand a indiqué une nouvelle méthode ⁽²⁾, qui lui a permis de démontrer le *théorème de Poisson* d'une manière à la fois simple et élégante. Le savant astronome a réussi à trouver des équations différentielles du mouvement troublé, dans lesquelles les fonctions perturbatrices correspondant aux diverses planètes ne diffèrent que par des facteurs constants.

5. De ce qui précède, on voit que le théorème de l'invariabilité des grands axes n'est démontré que quand on a égard aux deux premières puissances des masses.

Dans un Mémoire communiqué à l'Académie des Sciences en 1816, Poisson a cherché à le démontrer en tenant compte des troisièmes puissances des masses; mais il n'a considéré que les termes provenant des inégalités des éléments de la planète troublée, et il a négligé quelques termes, ce qui l'a conduit à un résultat erroné.

Dans une Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris en 1878, M. Haretu, en suivant la méthode indiquée par M. Tisserand et à l'aide de l'ancienne démonstration de Poisson, a trouvé un terme du troisième ordre proportionnel au temps; mais il n'a pas cherché à se rendre compte de sa grandeur ⁽³⁾, ni à donner son expression analytique.

Dans une Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CIV, p. 792), *Sur un point de la théorie de la Lune*, M. Tisserand a été conduit par induction à admettre que les grands axes seraient sujets probablement à des inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses.

⁽¹⁾ *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1808.

⁽²⁾ *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, 7^e série, t. VII. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. LXXXII. — *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 391-403.

⁽³⁾ TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, p. 403.

6. Quand on compare les positions des planètes déduites des Tables aux observations modernes les plus précises, on trouve des discordances qui ne peuvent pas être attribuées à l'existence d'erreurs sérieuses dans les théories des planètes (¹). C'est ce qui nous a engagé à étudier la nature des inégalités négligées dans les théories planétaires usuelles et à chercher les formes analytiques générales des plus importantes d'entre elles, en vue de préciser leur grandeur et leur sensibilité dans les *calculs des perturbations*.

L'invariabilité des grands axes étant la base des théories planétaires, nous nous sommes proposé de chercher, par une analyse rigoureuse, si, parmi les inégalités qui affectent les grands axes, il s'en trouve certaines qui soient séculaires, sensibles, ne se détruisant pas mutuellement, et, dans ce dernier cas, quelle est leur expression générale analytique et quelle est la grandeur des perturbations qu'elles introduisent dans le mouvement troublé.

Dans le cas où les grands axes seraient assujettis à des inégalités qui croîtraient indéfiniment avec le temps, ces variations, changeant la nature même des orbites, pourraient, à la longue, rendre les expressions générales des éléments osculateurs pour une époque quelconque fautives, et, par suite, les Tables qui donnent les positions théoriques des planètes absolument erronées.

En outre, l'existence de ces inégalités, même si elles sont excessivement petites, et conséquemment insensibles pour le moment dans les théories planétaires, donne lieu à une autre question du plus haut intérêt. Les inégalités de cette espèce croissant avec le temps, quels sont les changements que la suite des siècles pourrait amener dans les orbites planétaires? Les valeurs que les variations des grands axes atteindront ainsi avec le temps peuvent-elles déformer les positions et la nature des orbites au point d'amener la destruction du système planétaire?

Il est donc très intéressant, pour l'Astronomie théorique ainsi que pour l'avenir même du système planétaire, de chercher s'il y a des inégalités séculaires des grands axes, de déterminer leur nature et de calculer leur effet.

En étudiant les inégalités du troisième ordre des grands axes, nous avons trouvé des termes séculaires dont nous allons donner l'expression analytique.

Pour cela, nous allons tâcher d'abord de simplifier autant que possible l'expression générale des variations du troisième ordre des grands axes, afin de nous débarrasser des termes qui peuvent être démontrés, *a priori*, comme périodiques. Parmi les termes qui nous resteront, nous chercherons ensuite à en

(¹) GAILLOT, *Théorie analytique du mouvement des planètes* (*Bulletin astronomique*, t. V, p. 329).

séparer les séculaires. Enfin nous donnerons quelques applications numériques de nos formules pour nous rendre compte de l'importance de ces inégalités dans les théories planétaires.

II.

7. On sait que, pour déterminer le mouvement troublé des centres de gravité des planètes, il suffit d'obtenir en fonction du temps leurs coordonnées rectangulaires héliocentriques x, y, z . Mais, comme il est impossible d'intégrer rigoureusement les équations différentielles, il est plus avantageux, dans les approximations successives auxquelles on a recours, de considérer les expressions variables des éléments elliptiques.

On transforme ainsi le problème et l'on introduit, au lieu de trois équations différentielles du second ordre en x, y, z , six équations différentielles du premier ordre en $a, e, \theta, \varphi, \varpi, \varepsilon$, qui sont les six éléments de l'orbite. Comme ces éléments varient entre des limites très resserrées, on peut, dans une première approximation, les considérer, dans les équations qui donnent leurs variations, comme constants, et obtenir ainsi, par de simples quadratures, des valeurs approchées de $a, e, \theta, \dots$. Ensuite, en remplaçant dans les six équations les six inconnues qui y figurent par leurs valeurs obtenues dans la première approximation, on obtient, par de simples quadratures aussi, les inégalités des éléments elliptiques du second ordre par rapport aux masses. En procédant ainsi, on peut trouver, par de simples quadratures, les inégalités d'un ordre quelconque des éléments elliptiques.

8. Parmi les six équations qui remplacent les trois équations différentielles du mouvement troublé des planètes, voici celle qui donne la variation du demi grand axe de l'orbite

$$(1) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

où a représente le *demi grand axe* de l'orbite elliptique de la planète troublée, n son *moyen mouvement*, ε la *longitude moyenne de l'époque* et R la *fonction perturbatrice* correspondante.

Il convient de remarquer ici que R est du premier ordre par rapport aux masses des planètes troublantes.

Pour avoir les expressions générales des inégalités de différents ordres du demi grand axe, faisons varier dans le second membre de l'équation (1) les éléments de la planète troublée et des planètes troublantes; en représentant par la caractéristique δ les variations correspondantes des termes qui figurent dans

l'équation (1), on trouve

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \delta \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{2}{na} + \delta \frac{2}{na} \right)$$

ou bien, en développant et n'écrivant que les termes des trois premiers ordres,

$$(2) \quad \frac{d(\delta_1 a + \delta_2 a + \delta_3 a + \dots)}{dt} = \left(\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R_3}{\partial \varepsilon} + \dots \right) \times \left[\frac{2}{na} - \frac{2}{na^2} (\delta_1 a + \delta_2 a + \dots) - \frac{2}{n^2 a} (\delta_1 n + \delta_2 n + \dots) \right],$$

où $\delta_1 a, \delta_2 a, \dots, \delta_1 n, \delta_2 n, \dots, \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial R_3}{\partial \varepsilon}, \dots$ représentent des quantités des ordres respectifs 1, 2, 3, ... par rapport aux masses des planètes troublées.

En égalant dans les deux membres de l'équation (2) les termes des trois premiers ordres, on trouve

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\delta_1 a}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{d\delta_2 a}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{na^2} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \delta_1 a - \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \delta_1 n, \\ \frac{d\delta_3 a}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R_3}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{na^2} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \delta_2 a - \frac{2}{na^2} \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} \delta_1 a - \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \delta_2 n - \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} \delta_1 n. \end{cases}$$

9. Il nous faut maintenant simplifier ces formules et en même temps éliminer les variations de n qui y figurent. Dans ce but, nous allons considérer la formule connue

$$n^2 a^3 = f(1 + m),$$

dans laquelle nous avons désigné par 1 la masse du Soleil et par m celle de la planète troublée.

Il est évident que l'on doit avoir aussi

$$(n + \delta_1 n + \delta_2 n + \dots)^2 (a + \delta_1 a + \dots)^3 = n^2 a^3;$$

en développant, nous obtenons les expressions

$$(4) \quad \begin{cases} \delta_1 n = -\frac{3n}{2a} \delta_1 a, \\ \delta_2 n = -\frac{3n}{2a} \delta_2 a + \frac{15}{8} \frac{n}{a^2} (\delta_1 a)^2, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

En intégrant maintenant les deux premières équations (3), après avoir remplacé dans la deuxième $\delta_1 n$ par son expression trouvée plus haut, on trouve

$$(5) \quad \begin{cases} \delta_1 a = \frac{2}{na} \int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt, \\ \delta_2 a = \frac{2}{na} \int \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} dt + \frac{1}{na^2} \int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \delta_1 a dt. \end{cases}$$

10. On a déjà démontré que $\delta_1 a$ et $\delta_2 a$ ne sont composés que de termes périodiques. Nous allons donc examiner les termes de l'expression de $\delta_3 a$.

Dans ce but, si nous remplaçons dans l'expression de $\frac{d\delta_3 a}{dt}$, $\delta_1 n$, $\delta_2 n$, $\delta_2 a$ par leurs expressions trouvées plus haut, nous aurons

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d\delta_3 a}{dt} = & \frac{2}{na} \frac{\partial R_3}{\partial \varepsilon} + \frac{2}{n^2 a^3} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} dt + \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right) \\ & - \frac{1}{n^2 a^4} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \delta_1 a dt - \frac{15}{4na^3} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} (\delta_1 a)^2. \end{aligned}$$

Nous allons simplifier, autant que possible, cette formule et la transformer en une autre qui se prête mieux à la discussion des termes dont elle est composée.

Considérons, en premier lieu, les termes

$$(7) \quad \frac{2}{n^2 a^3} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} dt + \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right);$$

en mettant

$$R_1 + R_2 = R''$$

dans l'expression précédente, la partie qui est entre parenthèses peut être remplacée par l'expression

$$\frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt,$$

à la condition de négliger ultérieurement dans les calculs les termes du deuxième et du quatrième ordre, que nous introduisons ainsi.

Or

$$\frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt = \frac{1}{2} \frac{d \left(\int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt \right)^2}{dt};$$

donc l'expression (7) devient

$$(8) \quad \frac{1}{n^2 a^3} \frac{d \left(\int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt \right)^2}{dt}.$$

11. Passons maintenant au troisième terme du second membre de l'équation (6).

On voit aisément que l'on a

$$(9) \quad -\frac{1}{n^2 a^3} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \delta_1 a \, dt = -\frac{1}{n^3 a^3} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} \left(\int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right)^2 = -\frac{1}{3 n^3 a^3} \frac{d \left(\int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right)^3}{dt}.$$

En remplaçant aussi, dans le quatrième terme du second membre de l'équation (6), $\delta_1 a$ par son expression (5), on trouve

$$(10) \quad -\frac{15}{4 n a^3} \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} (\delta_1 a)^2 = -\frac{5}{n^3 a^3} \frac{d \left(\int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right)^3}{dt}.$$

Remplaçons maintenant, dans l'équation (6), les trois derniers termes par leurs expressions (8), (9), (10); nous aurons

$$\frac{d \delta_3 a}{dt} = \frac{2}{n a} \frac{\partial R_3}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{n^2 a^3} \frac{d \left(\int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt \right)^2}{dt} - \frac{16}{3 n^3 a^3} \frac{d \left(\int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right)^3}{dt}$$

ou bien, en intégrant,

$$(11) \quad \delta_3 a = \frac{2}{n a} \int \frac{\partial R_3}{\partial \varepsilon} dt + \frac{1}{n^2 a^3} \left(\int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt \right)^2 - \frac{16}{3 n^3 a^3} \left(\int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right)^3.$$

Nous sommes ainsi parvenu à une formule qui se prête bien à l'examen des termes dont est composée l'expression générale des inégalités du troisième ordre du grand axe.

Considérons, en premier lieu, le terme

$$(12) \quad -\frac{16}{3 n^3 a^3} \left(\int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt \right)^3;$$

nous savons que

$$\delta_1 a = \frac{2}{n a} \int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt$$

et que $\delta_1 a$, et par suite $\int \frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} dt$, ne contient que des termes périodiques; il est donc évident que sa troisième puissance sera aussi composée exclusivement de termes périodiques; donc l'expression (12) ne contient aucun terme séculaire.

12. Passons maintenant à l'examen du terme

$$(13) \quad \frac{2}{n a} \int \frac{\partial R_3}{\partial \varepsilon} dt,$$

qui contient les inégalités provenant de la variation des éléments de la planète troublée et des planètes troublantes. L'examen de la composition de ce terme présente des complications singulières, à cause de la variation de la fonction perturbatrice d'une planète à l'autre.

On peut simplifier considérablement la discussion de ce terme en employant la méthode indiquée par M. Tisserand. Cependant, malgré l'élégance et l'uniformité de cette méthode par la considération d'une seule fonction perturbatrice pour toutes les planètes, la discussion en est encore longue.

D'après notre analyse, l'expression (13) ne contient que des termes périodiques; par conséquent, nous nous dispensons de reproduire ici tous ces longs calculs, d'autant plus que leur reproduction ne présente aucun intérêt pour le but principal de notre travail, qui est la recherche des termes séculaires.

13. Il nous reste maintenant à considérer le terme

$$(14) \quad \frac{1}{n^2 a^3} \left(\int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt \right)^2,$$

le seul qui contient des inégalités séculaires.

Pour le montrer et en même temps pour trouver leur expression analytique, nous allons prendre le développement de la fonction perturbatrice

$$(15) \quad R = f(m' \Sigma N' e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \cos D' + m'' \Sigma N'' e^h e''^{h''} \eta''^{f''} \cos D'' + \dots),$$

où l'on a

$$\begin{aligned} D' &= i\lambda + i'l' + k\varpi + k'\varpi' + u\tau, \\ \lambda &= l + \tau' - \tau, \\ \omega &= \varpi + \tau' - \tau, \\ l &= nt + \varepsilon, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

en désignant par $l, l'', \dots$ les *longitudes moyennes* respectives des planètes troublantes, par $m', m'', \dots$ leurs masses et par $e', e'', \dots$ les *excentricités* de leurs orbites. $N', N'', \dots$ sont des fonctions des rapports des demi grands axes $\frac{a}{a'}, \frac{a}{a''}, \dots$, $\varpi, \varpi', \dots$ les *longitudes des périhélies*, $\eta, \eta', \dots$ les moitiés des inclinaisons mutuelles des orbites et $\tau, \tau', \dots$ les longitudes de leurs *nœuds descendants*. Par i et i' , nous avons désigné des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, qui ne peuvent pas être simultanément nuls, et par u un nombre entier négatif.

XIX.

H.2

Cela posé, l'équation (15) nous donne

$$(16) \quad \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -f(m' \Sigma N' i e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \sin D' + m'' \Sigma N'' i e^h e''^{h''} \eta''^{f''} \sin D'' + \dots),$$

où le second membre ne contient que des termes périodiques.

14. Il nous faut maintenant trouver, à l'aide de l'expression (16), celle de

$$\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R_2}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Pour cela, nous allons mettre dans le second membre de l'équation (16), au lieu des éléments elliptiques de la planète troublée et des planètes troublantes, leurs valeurs osculatrices à une certaine époque, augmentées de leurs inégalités du premier ordre par rapport aux masses; et, du résultat, nous ne retiendrons que les termes des deux premiers ordres.

Or les inégalités du premier ordre des éléments elliptiques, déduites de la première approximation, sont de la forme

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 a = A' \cos D' + A'' \cos D'' + \dots, \\ \delta_1 e = b t + B' \cos D' + \dots, \\ \delta_1 \eta' = \xi t + E' \cos D' + \dots, \\ \delta_1 \lambda = \gamma t + L' \sin D' + \dots, \\ e \delta_1 \varpi = c t + P' \sin D' + \dots, \\ \delta_1 a' = A'_1 \cos D' + A''_1 \cos D'' + \dots, \\ \delta_1 e' = b' t + B'_1 \cos D' + \dots, \\ \delta_1 l' = M' \sin D' + M'' \sin D'' + \dots, \\ e' \delta_1 \varpi' = c' t + G' \sin D' + \dots, \\ \eta' \delta_1 \tau' = \chi t + Q' \sin D' + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Remplaçons maintenant, dans la valeur de $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, a , a' , e , ... par $a + \delta_1 a$, $a' + \delta_1 a'$, $e + \delta_1 e$, ... et développons par rapport aux puissances de $\delta_1 a$, $\delta_1 a'$, $\delta_1 e$,

Il importe de remarquer ici que, tous les coefficients A , A' , b , b' , ... étant du premier ordre par rapport aux masses, il suffit, pour le but que nous nous proposons, de retenir dans le développement de $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ les premières puissances des inégalités du premier ordre des éléments.

De cette manière, on aura

$$(18) \quad \frac{\partial \mathbf{R}''}{\partial \varepsilon} = -f m' \sum i e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \left(N' \sin \mathbf{D}' + N' \frac{h'}{e'} \sin \mathbf{D}' \delta_1 e' + N' \frac{h}{e} \sin \mathbf{D}' \delta_1 e \right. \\ \left. + N' \frac{f'}{\eta'} \sin \mathbf{D}' \delta_1 \eta' + \frac{\partial N'}{\partial a} \sin \mathbf{D}' \delta_1 a \right. \\ \left. + \frac{\partial N'}{\partial a'} \sin \mathbf{D}' \delta_1 a' + i N' \cos \mathbf{D}' \delta_1 \lambda \right. \\ \left. + i' N' \cos \mathbf{D}' \delta_1 l' + k' N' \cos \mathbf{D}' \delta_1 \varpi \right. \\ \left. + k N' \cos \mathbf{D}' \delta_1 \omega + u N' \cos \mathbf{D}' \delta_1 \tau' \right) \\ + \dots$$

En substituant, dans le second membre de l'équation précédente, les expressions de $\delta_1 a$, $\delta_1 e$, ... données par les formules (17) et en réduisant, on trouve

$$(19) \quad \frac{\partial \mathbf{R}''}{\partial \varepsilon} = -f m' \left\{ \sum N' i e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \sin \mathbf{D}' + N' i e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \left(\frac{h}{e} b + \frac{h'}{e'} b' + \frac{f'}{\eta'} \xi \right) t \sin \mathbf{D}' \right. \\ \left. + N' i e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \left(\frac{k}{e} c + \frac{k'}{e'} c' + \frac{u}{\eta} \chi + i \gamma \right) t \cos \mathbf{D}' \right. \\ \left. + e^h e'^{h'} \eta'^{f'} i \left[N' \left(\mathbf{B}' \frac{h}{e} + \mathbf{B}'_1 \frac{h'}{e'} + \mathbf{E}' \frac{f'}{\eta'} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\mathbf{A}' \frac{\partial N'}{\partial a} + \mathbf{A}'_1 \frac{\partial N'}{\partial a'} \right) \right] \sin \mathbf{D}' \cos \mathbf{D}' \right. \\ \left. + N' e^h e'^{h'} \eta'^{f'} i \left(i \mathbf{L}' + i' \mathbf{M}' + \frac{k}{e} \mathbf{P}' + \frac{k'}{e'} \mathbf{G}' + \frac{u}{\eta} \mathbf{Q}' \right) \cos \mathbf{D}' \sin \mathbf{D}' \right. \\ \left. + \dots \right\} \\ + \dots$$

En intégrant par rapport à t , on déduit de la formule précédente

$$(20) \quad \int \frac{\partial \mathbf{R}''}{\partial \varepsilon} dt = \sum f m' \left\{ \frac{N' e^h e'^{h'} \eta'^{f'}}{in + i' n'} \cos \mathbf{D}' \right. \\ \left. + N' i e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \left(\frac{h}{e} b + \frac{h'}{e'} b' + \frac{f'}{\eta'} \xi \right) \right. \\ \left. \times \left[\frac{t}{in + i' n'} \cos \mathbf{D}' - \frac{\sin \mathbf{D}'}{(in + i' n')^2} \right] \right. \\ \left. - N' i e^h e'^{h'} \eta'^{f'} \left(\frac{k}{e} c + \frac{k'}{e'} c' + \frac{u}{\eta} \chi + i \gamma \right) \right. \\ \left. \times \left[\frac{t \sin \mathbf{D}'}{in + i' n'} + \frac{\cos \mathbf{D}'}{(in + i' n')^2} \right] \right. \\ \left. + e^h e'^{h'} \eta'^{f'} i \left[N' \left(\mathbf{B}' \frac{h}{e} + \mathbf{B}'_1 \frac{h'}{e'} + \mathbf{E}' \frac{f'}{\eta'} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\mathbf{A}' \frac{\partial N'}{\partial a} + \mathbf{A}'_1 \frac{\partial N'}{\partial a'} \right) \right] \frac{\cos(\mathbf{D}' + \mathbf{D}'')}{in + i' n' + \dots} \right. \\ \left. + \dots \right\}$$

15. Pour trouver la forme analytique du terme (14), il faut élever au carré l'expression précédente de $\int \frac{\partial R''}{\partial \varepsilon} dt$. Nous trouverons ainsi des termes qui seront du deuxième, du troisième et du quatrième ordre par rapport aux masses. Parmi ces termes, en négligeant, suivant la condition que nous nous sommes imposée, ceux du deuxième et du quatrième, il nous restera les termes du troisième ordre, que nous nous proposons maintenant d'examiner pour tirer d'entre eux ceux qui sont séculaires.

Or les termes du troisième ordre, que nous trouvons en élevant au carré l'expression (20), sont des formes suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & 2\Gamma_1 t \left(\frac{1}{2} + \cos 2D'\right), \\
 (\beta) & 2\Gamma_2 \sin D' \cos D', \\
 (\gamma) & 2\Gamma_3 t \sin D' \cos D', \\
 (\delta) & \Gamma_4 \cos^2 D', \\
 (\varepsilon) & \Gamma_5 \cos D' \cos(D' + D''), \\
 & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Il est évident que tous ces termes sont périodiques, excepté le premier, qui donne un terme séculaire $\Gamma_1 t$.

On voit donc facilement que chaque partie de la fonction perturbatrice, relative à une planète troublante, nous donne des inégalités séculaires provenant de la multiplication de termes de mêmes arguments.

Donc les grands axes des orbites planétaires sont sujets à des perturbations séculaires du troisième ordre par rapport aux masses des planètes perturbatrices.

L'expression générale de ces inégalités, déduite du carré de l'expression (20), est

$$(21) \quad \frac{1}{n^2 a^3} \sum f^2 m'^2 \left(\frac{N' i e^h e'^{h'} \eta' f'}{in + i' n'} \right)^2 \left(\frac{h}{e} b + \frac{h'}{e'} b' + \frac{f'}{\eta'} \xi \right) t,$$

Σ s'étendant à tous les termes de la fonction perturbatrice. On voit donc que chaque terme de la fonction perturbatrice donne lieu à un terme séculaire du troisième ordre.

Pour arriver à ce résultat, nous avons admis tacitement que la quantité

$$in + i' n',$$

qui entre en diviseur dans les formules précédentes, est différente de zéro. Pour que cela soit vrai, il faut que les moyens mouvements des différents corps de

notre système planétaire ne soient pas entre eux dans des rapports rigoureusement commensurables. C'est effectivement ce qui a lieu, les valeurs numériques des moyens mouvements tirées des observations n'étant pas dans des rapports exactement commensurables pour aucune combinaison des planètes prises deux à deux.

III.

16. L'existence des inégalités séculaires des grands axes étant maintenant démontrée, il y a lieu de se demander si les variations qui en proviennent pour les distances moyennes, ainsi que pour les moyens mouvements des diverses planètes, iront toujours dans le même sens, en s'accumulant continuellement avec le temps, ou si elles sont elles-mêmes périodiques, de fort longues périodes, comme les inégalités séculaires des excentricités et des inclinaisons mutuelles des orbites.

La forme sous laquelle nous avons mis l'expression analytique des inégalités séculaires des grands axes va nous donner d'une manière excessivement simple la solution de cette question. En effet, d'après la formule (21), on voit que chaque terme séculaire contient comme coefficient une des trois quantités

$$(22) \quad bt, \quad b't, \quad \xi t,$$

qui sont les termes séculaires des excentricités et des inclinaisons mutuelles des diverses planètes. Or Laplace a démontré que, quelles que soient les masses des planètes, par cela seul qu'elles se meuvent toutes dans le même sens et dans des orbites peu excentriques et peu inclinées les unes par rapport aux autres, les inégalités séculaires des inclinaisons et des excentricités des orbites sont elles-mêmes périodiques, de périodes excessivement longues, et renfermées dans d'étroites limites. Donc les inégalités qui affectent les grands axes sont aussi périodiques, puisque les quantités (22) qu'elles contiennent comme coefficients sont les premiers termes du développement en série de fonctions circulaires. Les périodes de ces fonctions étant excessivement longues, on peut supposer ces inégalités proportionnelles au temps pendant un grand intervalle de temps, avant et après l'époque où l'on fixe l'origine du temps. Il est évident aussi que les périodes des différents termes séculaires sont les mêmes que celles des inégalités séculaires correspondantes des excentricités et des inclinaisons mutuelles. Donc le système planétaire est aussi stable relativement aux inclinaisons et aux excentricités que par rapport aux grands axes de ses orbites.

IV.

16. Pour évaluer la grandeur des perturbations qui affectent les grands axes et voir si elles pourront, après un nombre plus ou moins grand de siècles, modifier considérablement l'aspect général du système planétaire, nous allons les calculer pour les grands axes de la Terre et de Saturne.

Mais d'abord nous allons transformer notre formule, afin d'utiliser les calculs déjà faits par Le Verrier.

Considérons, en premier lieu, la *Terre*.

Dans le quatrième Volume des *Annales de l'Observatoire de Paris (Mémoires)*, Le Verrier a donné les valeurs numériques en secondes d'arc de l'expression

$$A = \frac{2am'\alpha}{\mu} \frac{iN'}{i'\gamma + i} e^h e'^{h'} \eta'^{f'}.$$

En introduisant dans la formule (21) la quantité A, elle devient

$$(23) \quad \frac{1}{4a} \sum A^2 \left(\frac{h}{e} b + \frac{h'}{e'} b' + \frac{f'}{\eta'} \xi \right) t.$$

Nous avons calculé, pour chaque planète perturbatrice, les termes les plus sensibles, en négligeant ceux qui ne pourraient influencer le résultat d'une manière sensible. En procédant ainsi, nous avons trouvé les nombres ci-dessous, donnés par leurs logarithmes :

$$\log A^2 \left(\frac{h}{e} b + \frac{h'}{e'} b' + \frac{f'}{\eta'} \xi \right).$$

$$\text{Action de Mercure..} \left\{ \begin{array}{l} \bar{9},4752461 \\ \bar{10},3783361 \\ \bar{10},1618381 \end{array} \right.$$

$$\text{Action de Vénus....} \left\{ \begin{array}{l} \bar{6},3110468n \\ \bar{6},7567877n \\ \bar{9},8897116n \\ \bar{7},3686049n \\ \bar{7},4813613n \\ \bar{8},4845677 \end{array} \right.$$

$$\text{Action de Mars} \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{8},5517383n \\ \bar{7},1170923 \\ \bar{8},9420870 \\ \bar{8},0927776 \end{array} \right.$$

$$\text{Action de Jupiter} \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{7},7054149n \\ \bar{6},6968689 \\ \bar{7},1842297 \end{array} \right.$$

Les termes provenant des actions de Saturne, d'Uranus et de Neptune étant trop petits pour modifier sensiblement le résultat, nous les avons négligés.

Ainsi, après avoir effectué tous les calculs indiqués par la formule (23), nous avons trouvé, en définitive, la valeur suivante de la variation séculaire du grand axe de la Terre :

$$\partial_3 a = -0,000\,000\,000\,000\,000\,020\,65\,at.$$

17. Considérons, en second lieu, *Saturne*.

Dans le Tome X des *Annales de l'Observatoire de Paris (Mémoires)*, Le Verrier a calculé, pour les perturbations du mouvement de Saturne produites par l'action de Jupiter, les termes de la forme

$$A' = 2a' \frac{m\nu}{\mu'} \frac{i'N'}{i'\nu + i} e^h e^{h'} \eta^{i'} \eta';$$

par conséquent, la formule (21) devient

$$(24) \quad \frac{1}{4a'} \sum A'^2 \left(\frac{h}{e} b + \frac{h'}{e'} b' + \frac{f'}{\eta'} \xi \right) t.$$

Pour Saturne, nous n'avons calculé que les termes provenant de l'action de Jupiter, les autres étant très petits et presque insensibles.

Voici les résultats de nos calculs :

$$\log \sum A^2 \left(\frac{h}{e} b + \frac{h'}{e'} b' + \frac{f'}{\eta'} \xi \right).$$

$$\text{Action de Jupiter} \dots \left\{ \begin{array}{ll} \bar{3},8783258 & \bar{5},1570883 \\ \bar{2},3923506 n & \bar{3},0231743 n \\ \bar{2},0864142 n & \bar{1},2732196 \\ \bar{1},1535226 & 0,0425660 n \\ \bar{3},3010381 n & 0,3663259 n \\ \bar{1},1474194 & \bar{1},6406930 \\ \bar{4},0512498 & \bar{1},9930296 \\ \bar{3},4406326 n & \bar{1},6717074 n \\ \bar{1},5926070 n & \end{array} \right.$$

$$\delta_3 a' = -0,000000000019259 at.$$

18. Les résultats de notre travail nous fournissent les conclusions suivantes :

1° *Les grands axes des orbites planétaires sont sujets à des inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses des planètes perturbatrices.*

2° *Ces inégalités sont périodiques et de périodes excessivement longues, de sorte que, en raison de leur petitesse, on peut les supposer proportionnelles au temps pendant plusieurs siècles.*

3° *La Terre et Saturne, par suite de ces inégalités, s'approchent actuellement du Soleil de quantités excessivement petites.*

