

Recherches sur les mouvements d'Uranus par U. J. Le Verrier. (Fortsetzung).

Prenons quatre longitudes exactes de la planète, à la détermination de chacune desquelles nous aurons fait concourir plusieurs observations concordantes; et calculons les éléments de l'ellipse, de manière qu'ils satisfassent rigoureusement à ces quatre longitudes. Comparons ensuite les positions déterminées au moyen de ces éléments, avec la série d'observations que nous possédons, et examinons avec soin les causes qui peuvent faire différer le résultat du calcul du résultat de l'observation. Elles sont au nombre de trois, savoir: 1° l'erreur propre de la nouvelle observation comparée; 2° l'incertitude qui peut affecter la position calculée, par suite des erreurs des longitudes qui ont servi de base à la détermination des éléments elliptiques; 3° enfin l'erreur théorique due à ce que la planète obéirait réellement à quelque force secondaire inconnue. Si nous prouvions que les deux premi-

res causes ne sauraient suffire pour expliquer la différence qui existe entre le calcul et l'observation, nous serions forcés d'admettre l'influence de la troisième. Appliquons ce mode de raisonnement à la question qui nous occupe.

J'ai trouvé, entre les erreurs en longitude héliocentriques des Tables provisoires, et les corrections des éléments elliptiques d'Uranus, les 18 équations de condition suivantes, correspondant à différentes époques. Elles ne sont pas toutes nécessaires au but que je me propose ici: mais elles nous serviront plus loin pour un autre problème. Ces équations ne peuvent être rigoureuses que si l'on tient compte dans chacune d'elles de l'erreur de la position observée. C'est cette erreur qui a été désignée par les symboles (1), (2), (3), (4)... et aussi dans quatre des équations par les lettres P, Q, R, S.

Equations de condition déduites des longitudes héliocentriques.

1690,98	0,977	$\delta\epsilon$	-106,5	δn	-1,912	δc	+0,487	δw	-63,1	+	(1)	= 0
1712,25	1,097		-96,2		-0,388		-2,086		-59,9	+	(2)	= 0
1715,23	1,099		-93,2		+0,111		-2,121		-64,6	+	P	= 0
1747,7	0,928		-48,5		+1,127		+1,542		+34,8	+	(3)	= 0
1754,7	0,912		-41,3		+0,254		+1,874		+32,8	+	(4)	= 0
1761,7	0,917		-35,1		-0,669		+1,775		+24,7	+	(5)	= 0
1768,7	0,941		-29,5		-1,461		+1,257		+10,0	+	(6)	= 0
1775,7	0,982		-23,9		-1,939		+0,393		-3,7	+	Q	= 0
1782,7	1,031		-17,8		-1,932		-0,653		-17,4	+	(7)	= 0
1789,7	1,074		-11,1		-1,355		-1,595		-28,6	+	(8)	= 0
1796,7	1,098		-3,6		-0,320		-2,097		-29,8	+	(9)	= 0
1803,7	1,091	+	4,0		+0,830		-1,943		-33,6	+	(10)	= 0
1810,7	1,056	+	11,3		+1,686		-1,202		-35,3	+	R	= 0
1817,7	1,008	+	17,8		+2,004		-0,171		-32,3	+	(11)	= 0
1824,7	0,962	+	23,8		+1,773		+0,821		-24,5	+	(12)	= 0
1831,7	0,928	+	29,4		+1,129		+1,541		+3,4	+	(13)	= 0
1838,7	0,912	+	35,3		+0,255		+1,874		+50,0	+	(14)	= 0
1845,7	0,917	+	41,9		-0,666		+1,775		+110,5	+	S	= 0

Employons les quatre équations de 1715, 1775, 1810 et 1845, à la détermination des corrections des éléments de l'ellipse. Ces corrections seront des fonctions des quatre indéterminées P, Q, R, S. On trouvera:

$$\begin{aligned} \delta n &= + 1^{\text{h}}359^{\text{m}}5^{\text{s}} + 0,022\,296\,P - 0,021\,692\,Q - 0,019\,105\,R + 0,018\,508\,S \\ \delta c &= - 19,400 - 0,169\,3\,P - 0,146\,8\,Q - 0,306\,7\,R - 0,377\,4\,S \\ \delta\epsilon &= - 49,330 - 0,486\,44\,P + 0,896\,04\,Q + 0,220\,44\,R - 0,630\,41\,S \\ \delta w &= - 102,83 - 0,621\,40\,P + 0,924\,04\,Q + 0,692\,13\,R - 1,041\,8\,S \end{aligned}$$

Il serait facile, au moyen de ces expressions, de discuter le degré d'exactitude auquel on peut atteindre, dans la détermination des éléments, au moyen des quatre positions que nous venons d'employer. Mais tel n'est pas notre but. Il nous faut substituer la solution que nous venons de former

1690,98	$\Delta = -182^{\circ}6 + (1) -1,913$	P	+0,904	Q	+1,651	R	-1,642	S
1712,25	$\Delta = + 21,7 + (2) -0,846$		-0,349		-0,028		+0,224	
1715,23	$\Delta = + 0,0 + 0,000$		+0,000		+0,000		-0,000	
1747,7	$\Delta = -263,3 + (3) -2,745$		+3,351		+1,958		-3,565	
1754,7	$\Delta = -246,3 + (4) -2,354$		+2,721		+1,852		-3,221	
1761,7	$\Delta = -190,3 + (5) -1,715$		+1,668		+1,470		-2,423	
1768,7	$\Delta = -105,6 + (6) -0,888$		+0,354		+0,823		-1,289	
1775,7	$\Delta = 0,0 + 0,000$		-0,000		+0,000		+0,000	
1782,7	$\Delta = +100,9 + (7) +0,774$		-2,100		-0,854		+1,180	
1789,7	$\Delta = +166,3 + (8) +1,221$		-2,605		-1,520		+1,905	
1796,7	$\Delta = +175,4 + (9) +1,193$		-2,308		-1,790		+1,906	
1803,7	$\Delta = +109,5 + (10) +0,708$		-1,299		-1,573		+1,163	
1810,7	$\Delta = 0,0 + 0,000$		+0,000		+0,000		+0,000	
1817,7	$\Delta = -108,9 + (11) -0,642$		+1,103		-0,326		-1,136	
1824,7	$\Delta = -182,7 + (12) -1,005$		+1,690		+0,209		-1,896	
1831,7	$\Delta = -188,8 + (13) -1,008$		+1,662		+0,469		-2,123	
1838,7	$\Delta = -125,0 + (14) -0,656$		+1,061		+0,399		-1,804	
1845,7	$\Delta = 0,0 + 0,000$		+0,000		+0,000		+0,000	

Il nous reste à voir, si toutes ces expressions peuvent devenir nulles par un choix convenable des indéterminées (1), (2), (3) P, Q, R, S, en dedans des limites d'erreur, dont les observations sont susceptibles. Or, sans m'arrêter à chacune d'elles en particulier, je me contenterai d'examiner

$$\left\{ 355^{\circ}9 + \{(7)+(8)+(9)+(10)\} + \frac{2}{3} \{(11)+(12)+(13)+(14)\} \right\} - 1,071 P - 4,609 R - 4,286 S = 0$$

La valeur de la partie indéterminée peut-elle s'élever à $355^{\circ}9$?

Toutes les indéterminées (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), R et S correspondent à des positions qui ont été déduites chacune d'une dizaine d'observations très-exactes, faites dans les temps modernes. Nous ferons donc, sans aucun doute une hypothèse extrême, en admettant que chacune de ces erreurs soit égale au maximum à $4''$ sexagésimales, et en supposant qu'elles soient toutes dans le sens voulu pour diminuer l'erreur de la fonction précédente. La position de 1715 a été déduite de trois observations concordantes de *Flamsteed*, qui ne permettent pas d'y supposer une erreur P de plus de dix à quinze secondes: nous verrons plus tard qu'on peut, dans une autre théorie satisfaire beaucoup mieux à cette observation. Or, malgré tout ce qu'a de peu probable l'hypothèse que toutes ces erreurs agissent dans le même sens, et qu'elles soient toutes à leur maximum, nous ne parviendrons pas à expliquer par cette cause plus de $92''$ sur $356''$ qui composent la constante de la fonction précédente. Le reste, c'est à dire $264''$ secondes sexagésimales devra de toute nécessité être attribué à une influence étrangère, jusqu'ici inconnue, agissant sur Uranus.

dans nos équations de condition, et cela étant fait, nous trouverons qu'elle laisse entre la théorie et l'observation, et aux différentes époques que nous avons considérées, les écarts suivants, que je désignerai par Δ :

la combinaison suivante qu'on en déduit, et qui devrait aussi être nulle, et dans laquelle l'erreur de la position de 1775, qui est celle qui eût donné lieu à plus d'incertitude a complètement disparu. On doit avoir l'équation:

Pour fixer nettement le sens du résultat auquel je viens de parvenir, je demande la permission d'insister sur deux points. Je me suis appuyé sur des formules exactes, avantage dont s'étaient privés mes devanciers, en ne commençant pas par approfondir la théorie; cette négligence aurait toujours fait suspecter l'exactitude de leurs conclusions. On doit remarquer en second lieu, que je ne me suis pas borné à essayer des combinaisons plus ou moins nombreuses d'équations, et à déclarer que je n'avais pas réussi à représenter le mouvement de la planète; on n'aurait pas manqué de m'objecter que j'avais peut-être omis la véritable combinaison qu'un autre plus heureux pourrait la découvrir. On se serait ainsi trouvé dans la même incertitude qu'auparavant: mais telle n'est pas la marche que j'ai suivie. J'ai démontré, si je ne me trompe, qu'il y a incompatibilité formelle entre les observations d'Uranus et l'hypothèse que cette planète ne serait soumise qu'aux actions du soleil et des autres planètes, agissant conformément au principe de la gravitation universelle. On ne parviendra jamais, dans cette hypothèse, à représenter les mouvements observés.

Troisième partie.

Les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus peuvent-elles être expliquées par l'action d'une nouvelle planète? En quel lieu du ciel cet astre devrait-il être situé?

A peine avait-on commencé, il y a quelques années, à soupçonner que le mouvement d'Uranus était modifié par quelque cause inconnue, que déjà toutes les hypothèses possibles étaient hasardées sur la nature de cette cause. Chacun, il est vrai, suivit simplement le penchant de son imagination sans apporter aucune considération à l'appui de son assertion. On songea à la résistance de l'éther; on parla d'un gros satellite qui accompagnerait Uranus, ou bien d'une planète encore inconnue, dont la force perturbatrice devrait être prise en considération; on alla même jusqu'à supposer qu'à cette énorme distance du Soleil, la loi de la gravitation pourrait perdre quelque chose de sa rigueur. Enfin, une comète n'aurait-elle pas pu troubler brusquement Uranus dans sa marche?

Je le répète, toutes ces opinions ont été émises sous forme d'hypothèses, et sans qu'on ait cherché à étayer aucune d'elles par des considérations positives. On ne doit pas s'en étonner. Le problème du mouvement d'Uranus n'avait pas été traité avec une rigueur telle, qu'il fût démontré qu'on ne pourrait pas parvenir à le résoudre, par la considération des forces actuellement connues. Dans cette incertitude, il était sans-doute permis de hasarder une hypothèse. Mais nul n'aurait pu se résoudre à entreprendre un travail considérable sur des inégalités dont l'existence était encore problématique. Aujourd'hui il en est tout autrement. On ne saurait plus douter de ces inégalités et le moment est venu de chercher à démêler la direction et la grandeur de la force qui les produit.

Je ne me dissimule pas les écueils dont est semée la route que je vais actuellement parcourir. Plus d'une fois, des obstacles imprévus m'auraient fait renoncer à mon entreprise, si je n'avais eu la profonde conviction de son utilité. Comment, en effet les astronomes arriveraient-ils à découvrir, dans l'immense étendue du ciel, la cause physique des perturbations d'Uranus, si l'on ne parvient pas à jalonner leur travail, à circonscrire leurs recherches dans une enceinte déterminée? Et quel est celui d'entre eux qui se résoudrait à chercher un astre télescopique successivement dans les douze signes du zodiaque? Il faut donc commencer par prouver que les recherches doivent être concentrées dans un petit nombre de degrés. On pourra alors compter que les veilles des observateurs ne feront pas défaut; qu'avant peu, l'astronomie physique se sera enrichie de l'astre dont l'astronomie théorique aura à l'avance dévoilé l'existence et fixé la position.

Je ne m'arrêterai pas à cette idée que les lois de la gravitation pourraient cesser d'être rigoureuses à la grande distance à laquelle Uranus est situé du soleil. Ce n'est pas la première fois que, pour expliquer des inégalités dont on n'avait pu se rendre compte, on s'en est pris au principe de la gravitation universelle. Mais on sait aussi qu'on a toujours été conduit par un examen plus approfondi des faits à rejeter cette ressource extrême.

Je ne saurais croire davantage, dans la circonstance actuelle, à l'influence de la résistance de l'éther; résistance dont on a à peine entrevu des traces dans le mouvement des corps de la densité la plus faible; c'est à dire dans les circonstances qui seraient les plus propres à manifester l'action de ce fluide.

Les inégalités d'Uranus seraient-elles dues à un gros satellite qui accompagnerait la planète? Les oscillations qui se manifesteraient dans la marche d'Uranus affecteraient alors une très courte période; et c'est précisément le contraire qui résulte des observations. Les inégalités qui nous occupent se développent avec une très grande lenteur. Il est donc impossible de recourir à l'hypothèse actuelle, d'autant plus que le satellite devrait être effectivement très-gros, et n'aurait pu échapper aux observateurs.

Serait-ce donc une comète qui, tombant sur Uranus, aurait, à une certaine époque, changé brusquement la grandeur et la direction de son mouvement? J'ai déjà dit qu'on satisfaisait assez bien au mouvement de la planète entre 1781 et 1820, sans le secours d'aucune force extraordinaire. Cette remarque qui semble prouver que la force perturbatrice n'a point exercé d'influence sensible durant cette période, serait assez conforme à l'hypothèse actuelle d'une altération brusque du mouvement de la planète. Mais alors, la période de 1781 à 1820 pourrait se lier naturellement, soit à la série des observations antérieures, soit à la série des observations postérieures, et ne serait incompatible qu'avec l'une d'elles. Or c'est ce qui n'a pas lieu. On peut prouver que la série intermédiaire ne peut s'accorder d'une part avec les anciennes observations, et, de l'autre, avec les nouvelles.

Il ne nous reste ainsi d'autre hypothèse à essayer que celle d'un corps agissant d'une manière continue sur Uranus, changeant son mouvement d'une manière très lente. Ce corps, d'après ce que nous connaissons de la constitution de notre système solaire, ne saurait être qu'une planète, encore ignorée. Mais cette hypothèse est-elle plus plausible que les précédentes? N'a-t-elle rien d'incompatible avec les inégalités obser-

vées? Est-il possible d'assigner la place que cette planète devrait occuper dans le ciel?

Et d'abord, on ne saurait la placer au-dessous de Saturne, qu'elle dérangerait plus qu'elle ne trouble Uranus, et l'on sait que son influence sur Saturne est insensible.

Peut-on la supposer située entre Saturne et Uranus? Il faudrait la placer beaucoup plus près de l'orbite d'Uranus que de celle de Saturne; et dès lors sa masse devrait être assez petite pour ne produire sur Uranus que des perturbations qui sont, en définitive, peu considérables. Il est facile d'en conclure que son action perturbatrice ne s'exercerait qu'au moment où elle passerait dans le voisinage d'Uranus; et le peu de différence qu'il y aurait entre les durées des révolutions des deux astres ferait que la circonstance présente ne se serait rencontrée qu'une fois dans la période qu'embrassent les observations de la planète. Cette conséquence est contraire à ce qu'on déduit des observations.

La planète perturbatrice sera donc située au-delà d'Uranus. Nous ne devons pas supposer qu'elle en soit voisine; car alors sa masse serait très-petite, et nous retomberions ainsi dans les mêmes impossibilités que précédemment. Ce sera bien loin au-delà d'Uranus que nous pourrions espérer de découvrir ce nouveau corps, dont la masse sera assez considérable. Nous savons, par la singulière loi qui s'est manifestée entre les distances moyennes des planètes au Soleil, que les planètes les plus éloignées sont situées à des distances du centre, qui sont, à très-peu près, doubles les unes des autres; il serait donc naturel d'admettre que le nouveau corps est deux fois plus éloigné du Soleil qu'Uranus, si la considération suivante ne nous en faisait à peu près une loi. J'ai dit que la planète cherchée ne pouvait être située à une petite distance d'Uranus. Or, il n'est pas plus possible de la placer à une très-grande distance, à une distance triple de celle d'Uranus au Soleil, par exemple. Il faudrait, en effet, dans cette hypothèse, attribuer à cette planète une masse très-considérable; la grande distance à laquelle elle se trouverait à la fois de Saturne et d'Uranus rendrait ses actions, sur ces deux planètes, comparables entr'elles; et il ne serait point possible d'expliquer les inégalités d'Uranus sans développer dans Saturne des perturbations très-sensibles, et dont il n'existe point de trace.

Ajoutons, que les orbites de Jupiter, Saturne et Uranus étant fort peu inclinées à l'écliptique, on peut admettre, dans une première approximation; qu'il en est de même pour la planète cherchée; les observations des latitudes d'Uranus le prouvent sans réplique, puisque ces latitudes n'ont guères d'autres inégalités sensibles que celles qui sont dues aux

actions de Jupiter et de Saturne. Nous sommes ainsi conduits à nous poser la question suivante.

„Est il possible que les inégalités d'Uranus soient dues „à l'action d'une planète, située dans l'écliptique, à une „distance moyenne double de celle d'Uranus? Et s'il en est „ainsi, où est actuellement située ceste planète? Quelle est „sa masse? Quels sont les éléments de l'orbite qu'elle par- „court?“ Le problème étant énoncé en ces termes, je le résous rigoureusement.

Si l'on pouvait déterminer, à chaque époque, la variation des perturbations dues à l'action de la masse inconnue, on en deduirait la direction dans laquelle tombe Uranus, par suite de l'action incessante du corps troublant: on connaîtrait ainsi la position de ce corps. Mais le problème est loin de se présenter aussi simplement. Les expressions numériques des perturbations ne pourraient se conclure immédiatement des observations, que si l'on connaissait les valeurs rigoureuses des éléments de l'ellipse décrite par Uranus autour du Soleil; et ces éléments, à leur tour ne peuvent se déterminer exactement si l'on ne connaît pas la quantité des perturbations. On le voit il est impossible de scinder en deux parties distinctes la recherche des éléments de l'orbite d'Uranus, et celle des éléments du corps qui la trouble. En vain espérerait-on, en formant des équations empiriques, découvrir à priori, la loi des perturbations: on courrait le risque de se tromper grossièrement, puisqu'on n'aurait ainsi obtenu qu'une expression propre à représenter l'excès des perturbations sur les erreurs provenant des inexactitudes des éléments elliptiques, et nullement les perturbations elles-mêmes. Il n'y a qu'une route à suivre: il faudra former les expressions des perturbations, dues au nouveau corps, en fonctions de sa masse, et des éléments inconnues de l'ellipse qu'il décrit: il faudra introduire ces perturbations dans les coordonnées d'Uranus, calculées au moyen des éléments inconnus de l'ellipse que cette planète parcourt autour du Soleil. Egalant les coordonnées, ainsi obtenues, aux coordonnées observées, on prendra pour inconnues, dans les équations de condition qui en résulteront, non seulement les éléments de l'ellipse décrite par Uranus, mais encore les éléments de l'ellipse décrite par la planète troublante, dont nous cherchons la position.

Les équations de condition dont j'ai fait usage, dans cette partie de mes recherches, sont celles que j'ai déjà rapportées plus haut. Seulement, j'ai ajouté à leurs premiers membres les perturbations, dues au nouveau corps troublant, et qui sont des fonctions, de sa masse m' , de son excentricité e' , des longitudes ω' et s' du périhélie et de l'époque. Soient, pour abréger,

$$h' = e' \sin \omega' \quad \ell' = e' \cos \omega'$$

La longitude héliocentrique d'Uranus renferme les perturbations suivantes, dans lesquelles les coefficients expriment des secondes sexagésimales, tandis que les angles, placés sous les signes Sinus et Cosinus ont été, pour plus de commodité, dans le calcul, rapporté au quart de la circonférence pris pour unité d'angle. L'unité de masse est supposée égale à la dix-millième partie de la masse du Soleil.

$$d\nu = m' \left\{ \begin{array}{l} +18'' \sin (2,0722 + s' - 0,030\ 778\ t) \\ +29,5 \sin (2,1444 + 2s' - 0,061\ 555\ t) \\ +2,9 \sin (0,2166 + 3s' - 0,092\ 333\ t) \\ +1,9 \sin (2,1388 + s' + 0,016\ 832\ t) \\ +17,0 \sin (2,2110 + 2s' - 0,013\ 945\ t) \\ +24,4 \sin (0,2882 + 3s' - 0,044\ 723\ t) \\ +43'' \cos (0,0000 + s' + 0,016\ 832\ t) \\ +m' h' \left\{ \begin{array}{l} -122 \cos (2,0722 + 2s' - 0,013\ 945\ t) \\ -930 \cos (0,1444 + 3s' - 0,044\ 723\ t) \\ -43 \sin (0,0000 + s' + 0,016\ 832\ t) \end{array} \right. \\ +m' l' \left\{ \begin{array}{l} +122 \sin (2,0722 + 2s' - 0,013\ 945\ t) \\ +930 \sin (0,1444 + 3s' - 0,044\ 723\ t) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le détail du calcul qui suit serait fort long, et son exposition m'entraînerait beaucoup trop loin dans ce résumé. J'en vais indiquer la marche succinctement et arriver immédiatement aux résultats. On peut éliminer avec rigueur les éléments d'Uranus: j'ai employé pour cela les équations de 1715, 1775, 1810 et 1845. J'ai obtenu ainsi des relations entre la masse de la planète cherchée, les deux inconnues h' et l' , et la valeur de la longitude moyenne à l'origine du temps. La suite de la discussion demande une attention toute particulière.

Les nouvelles relations suffisent encore pour déterminer, avec une entière certitude, les variables h' et l' en fonctions de la masse et de la longitude de l'époque. Imaginons que le calcul ait été fait: qu'on ait éliminé des différentes relations l'excentricité et la longitude du périhélie. On tombera sur des équations qui, ne renfermant plus d'autres arbitraires que la masse de la planète et la longitude moyenne à l'origine du temps devront toutes être satisfaites par un choix convenable de ces inconnues.

Or on reconnaît, avec un peu d'attention que pourvu que les positions de 1690, 1747 et 1757 soient convenablement représentées il en sera de même de toutes les autres. Je vais donc donner le tableau des écarts qui restent à ces époques dans la nouvelle théorie, entre le calcul et les observations, et pour toutes les valeurs de la longitude moyenne comprise dans la circonférence du cercle. Ce sera la discussion de ces écarts qui nous conduira à reconnaître si nous pouvons représenter convenablement les positions d'Uranus au moyen de l'action d'un nouvel astre qui nous apprendra dans quelle région du ciel cet astre doit être situé. Mais pour que cette discussion soit complète, il est nécessaire d'introduire l'influence qu'ont sur les résultats les inexactitudes des positions admises en 1715 et 1775. Les positions prises en 1810 et 1845 sont trop précises pour que la même précaution soit nécessaire à leur égard.

Tableau des excès des longitudes calculées, par la nouvelle théorie, sur les longitudes observées.

Epoque s'	Année 1757.				Année 1747.				Année 1690.			
Q	$+744''$	$+9''m'$	$+3''5P$	$+6''7Q$	$+261''$	$+16''m'$	$+1''3P$	$+1''6Q$	$-324''$	$-87''m'$	$-0''4P$	$+2''0Q$
0,0	+744	+76	+3,3	+7,2	+246	+44	+1,2	+1,7	-316	-76	-0,3	+1,3
0,1	+725	+147	+3,1	+7,5	+226	+72	+1,2	+1,8	-291	-60	-0,2	+1,6
0,2	+676	+210	+2,9	+7,7	+206	+96	+1,1	+1,9	-260	-40	-0,1	+1,5
0,3	+613	+255	+2,7	+7,8	+186	+111	+1,0	+1,9	-232	-16	+0,0	+1,5
0,4	+554	+281	+2,5	+7,7	+167	+116	+1,0	+2,0	-207	+8	+0,1	+1,5
0,5	+502	+280	+2,4	+7,7	+150	+111	+0,9	+1,9	-187	+28	+0,1	+1,5
0,6	+459	+251	+2,3	+7,6	+136	+92	+0,9	+1,9	-171	+45	+0,2	+1,5
0,7	+423	+198	+2,2	+7,5	+126	+66	+0,8	+1,9	-159	+56	+0,2	+1,6
0,8	+393	+127	+2,2	+7,4	+119	+36	+0,8	+1,8	-151	+56	+0,2	+1,6
0,9	+368	+54	+2,2	+7,4	+114	+2	+0,8	+1,8	-148	+48	+0,2	+1,6
1,0	+349	-19	+2,1	+7,3	+110	-26	+0,8	+1,8	-145	+36	+0,2	+1,5
1,1	+338	-78	+2,1	+7,3	+109	-48	+0,8	+1,8	-143	+17	+0,2	+1,5
1,2	+331	-117	+2,1	+7,3	+108	-61	+0,8	+1,8	-141	-4	+0,2	+1,5
1,3	+327	-137	+2,1	+7,3	+107	-66	+0,8	+1,8	-141	-26	+0,3	+1,5
1,4	+323	-140	+2,1	+7,3	+106	-63	+0,8	+1,8	-138	-42	+0,3	+1,5
1,5	+317	-126	+2,1	+7,3	+103	-51	+0,8	+1,8	-132	-53	+0,3	+1,5
1,6	+307	-96	+2,0	+7,3	+98	-36	+0,8	+1,8	-122	-57	+0,3	+1,5
1,7	+292	-61	+2,0	+7,4	+92	-20	+0,8	+1,8	-110	-51	+0,4	+1,5
1,8	+273	-32	+2,0	+7,4	+85	-6	+0,7	+1,9	-96	-38	+0,4	+1,5

(Suite du Tableau précédent.)

	Année 1757.				Année 1747.				Année 1690.			
Q	+250°	- 14°m'	+1°9P	+7°3Q	+ 76°	+ 44°m'	+0°7P	+1°9Q	- 79°	- 18°m'	+0°5P	+1°5Q
2,0	+250°	- 1	+1,9	+7,2	+ 66	+ 11	+0,7	+1,8	- 63	+ 3	+0,5	+1,5
2,1	+226	- 1	+1,9	+7,2	+ 66	+ 11	+0,7	+1,8	- 63	+ 3	+0,5	+1,5
2,2	+201	+ 4	+1,8	+7,1	+ 56	+ 14	+0,7	+1,7	- 47	+ 24	+0,5	+1,6
2,3	+176	+ 4	+1,8	+7,0	+ 48	+ 14	+0,7	+1,7	- 31	+ 40	+0,5	+1,7
2,4	+153	+ 2	+1,7	+6,8	+ 40	+ 12	+0,7	+1,6	- 18	+ 51	+0,6	+1,9
2,5	+134	+ 1	+1,7	+6,6	+ 33	+ 11	+0,7	+1,6	- 6	+ 57	+0,6	+2,0
2,6	+120	+ 1	+1,7	+6,4	+ 27	+ 9	+0,7	+1,5	+ 2	+ 57	+0,6	+2,2
2,7	+112	+ 0	+1,8	+6,2	+ 24	+ 6	+0,7	+1,4	+ 7	+ 53	+0,6	+2,3
2,8	+111	+ 1	+1,8	+6,0	+ 24	+ 3	+0,7	+1,3	+ 8	+ 45	+0,5	+2,3
2,9	+115	+ 1	+1,9	+5,7	+ 24	- 1	+0,8	+1,2	+ 4	+ 35	+0,5	+2,5
3,0	+127	- 3	+2,0	+5,5	+ 29	- 6	+0,8	+1,2	- 4	+ 21	+0,4	+2,6
3,1	+130	- 11	+2,1	+5,3	+ 38	- 12	+0,9	+1,1	- 17	+ 5	+0,3	+2,8
3,2	+186	- 22	+2,3	+5,1	+ 51	- 18	+0,9	+1,0	- 37	- 14	+0,2	+2,9
3,3	+236	- 37	+2,5	+4,9	+ 70	- 25	+1,0	+0,9	- 65	- 35	+0,1	+3,0
3,4	+300	- 52	+2,7	+4,8	+ 93	- 32	+1,1	+0,8	-101	- 55	+0,0	+3,0
3,5	+383	- 69	+2,9	+4,8	+123	- 37	+1,2	+0,8	-144	- 73	-0,1	+3,0
3,6	+479	- 84	+3,2	+4,9	+158	- 39	+1,2	+0,9	-194	- 86	-0,3	+3,0
3,7	+576	- 85	+3,4	+5,1	+193	- 34	+1,3	+1,1	-244	- 94	-0,4	+2,8
3,8	+661	- 74	+3,6	+5,5	+224	- 25	+1,4	+1,2	-287	- 96	-0,6	+2,6
3,9	+722	- 44	+3,6	+6,2	+249	- 9	+1,4	+1,4	-315	- 93	-0,5	+2,3
4,0	+744	+ 9	+3,6	+6,7	+261	+ 16	+1,3	+1,6	-324	- 87	-0,4	+2,0

La position d'Uranus en 1757 est très bien connue. Jetons les yeux sur l'erreur de la théorie à cette époque. Elle est énorme dans toutes les parties de la circonférence. Elle ne s'abaisse qu'en un point, quand on suppose ϵ' égal à 2^{g} . La discussion des erreurs du calcul en 1747 et 1690 conduit au même résultat; et nous pouvons déjà conclure qu'il n'y a qu'une seule région de l'écliptique où l'on puisse placer l'astre troublant de manière à satisfaire aux observations d'Uranus.

Supposons de plus m égal à 1; P et Q égaux l'un et l'autre à -14^{g} , ce qui est admissible: nous trouverons que pour $\epsilon' = 2^{\text{g}}$ l'excès de la longitude calculée sur la longitude observée se réduira,

en 1757 à $+3^{\text{g}}$ 0

en 1747 à $-1,5$

en 1690 à $+14,2$

et puisque, d'après ce que j'ai dit, il me suffisait de satisfaire à cette condition que les écarts fussent ramenés entre les limites des erreurs dont les observations sont susceptibles, je me trouve en droit de conclure: qu'on peut effectivement représenter les irrégularités du mouvement d'Uranus par l'action d'une planète, située à une distance moyenne double de la distance moyenne d'Uranus au Soleil; et, ce qui est très important, qu'on n'y parvient que d'une seule manière.

En disant que le problème n'est susceptible que d'une solution, j'entends qu'il n'y a pas deux régions du ciel que l'on puisse choisir à volonté, pour y placer la planète à une

époque déterminée, au 1 Janvier 1847 par exemple. Mais chacun comprendra que, dans cette région unique, on doit se borner à assigner à la position de l'astre de certaines limites, restreintes si les observations sont exactes et en nombre convenable; étendues si les observations sont insuffisantes. Occupons-nous donc enfin de la position de la planète dans le ciel.

Bien que ce point soit le but le plus important de mon travail, puisqu'il devra servir de point de départ aux observateurs pour découvrir le nouvel astre, je vais le présenter très succinctement, me réservant d'en traiter au contraire plus loin avec beaucoup de détails. α étant une indéterminée, j'ai trouvé, pour l'expression de la longitude héliocentrique de la planète, exprimée en degrés sexagésimaux, au 1. Janvier 1847:

$$\nu = 314^{\circ}5 + 12^{\circ}25\alpha + \frac{1}{m} \{ 20^{\circ}82 - 10^{\circ}79\alpha - 1^{\circ}14\alpha^2 \}$$

La discussion de cette formule, sous le rapport des limites dans lesquelles m' et α doivent rester comprises, pour que l'on ne cesse pas de satisfaire aux observations, montre qu'on peut, à très peu près, assigner 325° de longitude héliocentrique à la planète, au 1. Janvier 1847.

Tel est le résultat capital auquel je suis parvenu. Lorsque, dans l'ignorance complète de la position de la planète cherchée, il m'était nécessaire d'étendre les discussions des formules, et leur comparaison aux observations, à toutes les régions de l'écliptique, j'ai dû nécessairement, pour simplifier mon travail et ne pas le rendre impossible, ne m'occuper que d'un certain nombre de positions choisies d'Uranus; mais

actuellement que les éléments de la planète sont déterminés avec approximation, par les calculs précédents, il devient possible de faire entrer dans la solution du problème toutes les observations que nous possédons. On pourra même corriger la durée de la révolution périodique. Je vais m'en occuper dans la quatrième partie de ce travail: qu'on me permette auparavant d'en résumer les trois premières parties.

On voit que, pour obtenir de la réunion de la théorie avec les observations tous les secours dont j'avais besoin, il m'a fallu successivement:

Reprendre le calcul des perturbations que Jupiter exerce sur Uranus; déterminer celles qui sont produites par Saturne, en poussant les approximations jusqu'aux carrés et aux produits des masses, ce qui a introduit de notables changements dans les théories admises.

Réduire près de trois cents observations méridiennes d'Uranus.

Calculer les positions héliocentriques correspondantes de cette planète, en supposant qu'elle n'obéisse qu'aux actions réunies du Soleil, de Jupiter et de Saturne; en déduire les coordonnées géocentriques avec le secours des Tables du Soleil, et prouver péremptoirement qu'il y a incompatibilité entre les lieux ainsi calculés, et les lieux observés.

L'existence d'une planète encore inconnue se trouvant ainsi indiquée, j'ai renversé le problème qu'on s'est jusqu'ici

proposé dans le calcul des perturbations. Au lieu d'avoir à mesurer l'action d'une planète déterminée, j'ai dû partir des inégalités reconnues dans Uranus, pour en déduire les éléments de l'orbite de la planète perturbatrice; pour donner la position de cette planète dans le ciel, et montrer que son action rendait parfaitement compte des inégalités d'Uranus.

Il ne viendra sans-doute à personne, l'idée de vouloir réduire notre système Solaire à d'étroites limites, et d'en tirer une conclusion contre l'existence d'un nouvel astre. Dans ce cas, cependant, je répondrais qu'on aurait eu les mêmes raisons d'affirmer, le 12 Mars 1781, que Saturne était la dernière des planètes, sauf à être contredit le lendemain par la découverte d'Uranus. L'hypothèse qu'il existe des planètes plus éloignées du Soleil que celles que nous connaissons, est-elle donc neuve? Dès l'année 1758 l'illustre géomètre Clairaut déclarait, dans la séance publique de l'Académie des Sciences, à l'occasion des perturbations de la Comète de *Halley*, qu'un corps qui traverse des régions aussi éloignées pourrait être soumis à des forces totalement inconnues, telles que l'action de planètes, trop distantes pour être jamais aperçues.

Esperons seulement, que les astres dont parle Clairaut ne seront pas tous invisibles; que si le hasard a fait découvrir Uranus, on réussira bien à voir la planète dont je viens de faire connaître la position.

Quatrième partie. Détermination plus précise de l'Orbite de la Planète troublante, et de sa position actuelle.

J'ai fait usage, dans cette partie de mon travail, pour donner plus de précision à mes résultats, de toutes les observations d'Uranus, au nombre de 19, faites anciennement par *Flamsteed*, *Bradley*, *Mayer* et *Lemonnier*; j'emploie en outre le nombre considérable de 262 observations choisies convenablement parmi celles qui ont été faites à Paris et à Greenwich depuis 1781 jusqu'en 1845, soit dans les oppositions, soit dans les quadratures.

Chacune des longitudes, déduites des observations, comparée avec la longitude donnée à la même époque par la théorie, fournit une équation de condition entre les corrections des éléments de l'orbite d'Uranus, entre la masse et les éléments de l'orbite de la planète cherchée. Ces équations renfermant ainsi neuf inconnues: il est nécessaire que j'entre dans quelques détails sur la manière dont ces variables s'y trouvent engagées.

Les corrections des éléments de l'orbite d'Uranus y entrent linéairement, et ne peuvent ainsi donner lieu à aucune difficulté.

Considérons parmi les éléments de la planète cherchée les trois variables déjà employées m' , $m'h'$ et $m'l'$. Les équations seront du premier degré par rapport à ces variables, si l'on n'a égard qu'aux inégalités séculaires, aux inégalités périodiques, indépendantes des excentricités, et aux inégalités périodiques dépendant de la première puissance des excentricités. Cet avantage disparaîtrait, s'il fallait tenir compte des inégalités du second ordre, sous leur forme habituelle. Mais s'il est permis à cause de la longueur de la période des plus sensibles, de les négliger dans une première approximation, il devient impossible, dans un travail précis, d'omettre l'inégalité dont l'argument dépend de la longitude moyenne d'Uranus, diminuée de trois fois la longitude moyenne de la planète cherchée. J'ai évité les difficultés auxquelles eut donné lieu l'introduction de cette inégalité, sous la forme habituelle, au moyen d'un artifice fondé sur la longueur de la période. En sorte que les équations de condition se sont trouvées définitivement être du premier degré par rapport à la masse et aux deux autres variables dont dépendent l'excentricité et la longitude du périhélie.

Les coefficients de ces trois variables sont des fonctions du demi-grand axe de l'orbite de la planète troublante et de la longitude de l'époque de cette planète. Mais ces fonctions, sous leur forme la plus générale, sont tellement compliquées qu'elles s'opposent à toute discussion immédiate. Et, tandis que les trois premières variables peuvent être tirées directement des équations, la longitude moyenne et le demi-grand axe ne peuvent être obtenus que par des approximations successives.

Guidé par des considérations particulières, et par quelques essais, j'ai admis, dans ma première solution, que le grand axe de l'orbite de la planète cherchée était double du grand axe de l'orbite d'Uranus. J'ai ensuite fait voir qu'avec cette hypothèse, et par une détermination convenable des autres éléments, on pouvait satisfaire aux équations du problème. C'était une solution détournée des équations. Dans le travail actuel, la valeur la plus exacte du grand axe est, comme celle des autres éléments, déduite directement des équations. Il en est de même des limites entre lesquelles on peut le faire varier, sans cesser de représenter les observations d'Uranus.

J'ai dit que les fonctions du grand axe et de la longitude de l'époque, qui entrent dans les équations de condition, étaient trop compliquées pour se prêter à aucune discussion directe; qu'il était nécessaire, à l'égard de ces deux variables, de recourir à des approximations successives. Mes recherches précédentes m'avaient fait connaître qu'on pouvait prendre pour valeur approchée du rapport du grand axe d'Uranus à celui de la planète troublante la fraction 0,50: des essais ultérieurs m'ont appris que la fraction 0,51 serait encore plus approchée. Quant à la longitude moyenne, elle devait être, d'après les mêmes recherches, égale à 252° environ. Au moyen de ces données, j'ai pu faire ensorte que les coefficients, qui étaient des fonctions du grand axe de l'orbite et de la longitude de l'époque, ne renfermassent plus d'autres variables que les corrections dont ont besoin les valeurs approchées que nous venons d'indiquer pour ces éléments. De plus, ces corrections

sont assez petites pour qu'on puisse développer les fonctions qui les renferment par rapport à leurs puissances et à leurs produits; et s'en tenir aux termes du premier et du second ordre, dans les limites où sont restreintes les variables.

Nous voyons donc, quant à la forme des équations, qu'elles sont du premier degré par rapport aux corrections des éléments de l'orbite d'Uranus: qu'elles sont encore du premier degré par rapport aux trois éléments qui donnent la masse, l'excentricité, et la longitude du périhélie: enfin que les coefficients de ces trois variables sont des fonctions du second ordre par rapport aux corrections dont ont besoin les valeurs approchées qu'on possède pour le grand axe et pour la longitude moyenne.

Je ne transcris point ici toutes ces équations qui n'offriraient au lecteur aucun intérêt, à moins que je n'entrasse dans une multitude d'autres détails qui me feraient passer les bornes que je dois assigner à cette note. Elle n'a d'autre but que de faire connaître aux astronomes les résultats auxquels je suis parvenu. La publication complète du travail ne se fera pas attendre: on y trouvera tous les détails nécessaires à la vérification des méthodes et des calculs. Je passe donc à la résolution des équations, après avoir fait remarquer que si deux des éléments m'ont forcé de recourir à la méthode des approximations successives, en m'appuyant sur mes recherches antérieures, on ne possède pas de moyen plus simple de déterminer les orbites des planètes, par l'observation directe de ces astres.

Il n'est pas nécessaire de traiter séparément chacune des équations ainsi formées. La lenteur du mouvement d'Uranus et de celui de la planète perturbatrice permet d'en réunir plusieurs, de manière à former des équations moyennes, dont les constantes seront probablement d'autant plus exactes qu'elles résulteront de l'emploi d'un plus grand nombre d'observations. Les équations de condition distinctes, auxquelles je me suis arrêté, ont donc été formées de la manière suivante.

Première équation. Une observation faite par *Flamsteed*, le 23 Décembre 1690.

Deuxième équation. Quatre observations, faites en 1712 et 1715, par *Flamsteed*.

Troisième équation. Deux observations, faites en 1750, par *Lemonnier*.

Quatrième équation. Deux observations, faites en 1753 et 1756, par *Bradley* et *Mayer*.

Cinquième équation. Une observation, faite en 1764, par *Lemonnier*.

Sixième équation. Huit observations, faites en 1768 et 1769 par *Lemonnier*.

Septième équation. Une observation, faite en 1771 par *Lemonnier*.

Enfin, les observations faites depuis 1781 jusqu'en 1845, | équations, qui, réunies aux précédentes ont porté le nombre
étant groupées convenablement, m'ont fourni vingt-six | des équations définitives à trente-trois.

(Bechluss folgt).

Altona 1846. October 22.

(Nr. 578 und Nr. 579 werden nachgeliefert).

BEILAGE

ZU N^o 581. DER ASTRONOMISCHEN NACHRICHTEN.

Name des neuen Planeten.

Nach einem unter dem 6^{ten} October von Herrn *Arago* erhaltenen Briefe, hat Herr *Le Verrier* sein unbestreitbares Recht, dem von ihm entdeckten Planeten einen Namen zu geben, an Herrn *Arago* übertragen. Zufolge dieses ihm übertragenen Rechtes giebt Herr *Arago* dem neuen Planeten den Namen des Entdeckers **LEVERRIER**, und hat für ihn das Zeichen



gewählt.

S.

Erste Beobachtungen von *Le Verrier's* Planeten.

Von Herrn Professor *Encke* habe ich folgende Micrometer-beobh. erhalten, bei denen als Vergleichsster ein Stern Ster Gr^uße gebraucht ist, dessen mittlere noch schärfer zu bestimmende Position für 1846

$$327^{\circ}56'56''4 \quad -13^{\circ}26'9''6$$

angenommen ward. Die daraus berechneten scheinbaren Positionen sind:

1846 Sept. 7	327°57'55''25	-13°25'44''74
— 17	54,18	45,12
Octbr. 7	52,66	45,61

Herr Professor *Encke* bestimmte durch diesen Stern folgende Positionen des Planeten

	M. Zt. Berlin.	AR.	Decl.
Sept. 23	12 ^h 0' 14''6	328°19' 16''0	-13°24' 8''2
24	8 54 40,9	18 14,3	24 29,7
25	9 41 45,0	16 59,8	24 55,4
26	10 11 54,3	15 48,3	25 22,2
27	8 29 48,9	14 42,8	25 44,6
28	11 31 28,8	13 25,5	26 11,5
29	9 14 3,7	12 23,4	26 32,6
Octb. 2	11 5 35,2	9 7,0	27 41,4
6	8 0 54,2	5 16,2	29 1,3
10	8 52 56,3	1 42,2	30 14,7

Die Differenzen in AR. und Decl. mit dem angegebenen Sterne sind an jedem Tage zu den bemerkten Zeiten:

	in AR.	in Decl.
Sept. 23	+21' 21''5	+1' 36''8
24	+20 19,9	+1 15,3
25	+19 5,5	+0 49,7
26	+17 54,1	+0 22,9
27	+16 48,7	+0 0,5

	in AR.	in Decl.
Sept. 28	+15' 31''6	-0' 26''3
29	+14 29,6	-0 47,4
Octbr. 2	+11 13,7	-1 56,0
6	+ 7 23,5	-3 15,7
10	+ 3 50,2	-4 29,8

Herr Professor *Encke* bestimmte ferner durch gute Messungen, in völliger Uebereinstimmung mit Dr. *Galle* am 29^{sten} September den Durchmesser

2''79

Herr Geheimer Hofrath *Gauss* hat mir folgende Meridianbeobachtungen gesandt:

	M. Zt. Göttingen.		
Sept. 27	9 ^h 27' 57''1	328°14' 35''8	-13°25' 54''0
Octbr. 6	8 51 56,5	5 12,6	29 6,0
10	8 35 58,8	1 40,7	30 17,8

Auf der hiesigen Sternwarte hat Herr Dr. *Petersen* folgende Meridianbeobh. erhalten, von denen die erste durch schärfere Reduction 0''4 von der im Circular gegebenen abweicht.

	M. Zt. Altona.		
Sept. 28	9 ^h 23' 56''0	328°13' 27''0	-13°26' 16''2
29	9 19 56,5	12 21,8	26 39,8

An diesem Tage war der Planet nur zuweilen zwischen Wolken sichtbar, doch kann die Beob. nur wenige Secunden unrichtig seyn.