

# SUR LES CONSÉQUENCES PHOTOMÉTRIQUES DE LA DÉVIATION D'EINSTEIN.

Par M. F. LINK.

**SOMMAIRE.** — La déviation d'Einstein des rayons lumineux dans le champ de gravitation a pour conséquence une modification de l'éclairement produit par ces rayons. Le phénomène est discuté et quelques applications aux systèmes stellaires sont données. C'est surtout dans les amas globulaires que les conséquences photométriques de la déviation d'Einstein apparaissent. Les modifications de l'éclairement sont accompagnées des variations de forme des sources lumineuses, dont l'observation paraît plus difficile.

**1. Introduction.** — La déviation d'Einstein des rayons lumineux dans le champ de gravitation d'un corps céleste est une des conséquences pratiques de la théorie de la relativité une conséquence dont la vérification s'est montrée assez difficile.

Personne ne peut nier qu'il existe un déplacement quasi radial des étoiles au voisinage du Soleil éclipsé. Sa grandeur cadre assez bien avec la valeur théorique d'Einstein. Si l'accord n'est pas parfait, il ne faut pas perdre de vue des difficultés très grandes de ce genre de mesures.

En attendant les résultats de nouvelles mesures plus précises, nous nous proposons d'étudier les conséquences photométriques de cette déviation supposée réelle. A notre connaissance personne ne s'est occupé de ce phénomène. Une courte note de Chwolson [1] attire l'attention sur les conséquences géométriques, modifications de la forme apparente des étoiles, sans toutefois donner la théorie et surtout les conséquences photométriques de la déviation. A vrai dire son influence est négligeable dans le cas de notre Soleil. Mais dans certains systèmes stellaires l'effet peut devenir mesurable.

**2. Déviation des rayons.** — Avant d'aborder la partie photo-

métrique du problème, nous nous occuperons de la forme de la trajectoire lumineuse dans le champ de gravitation d'un corps

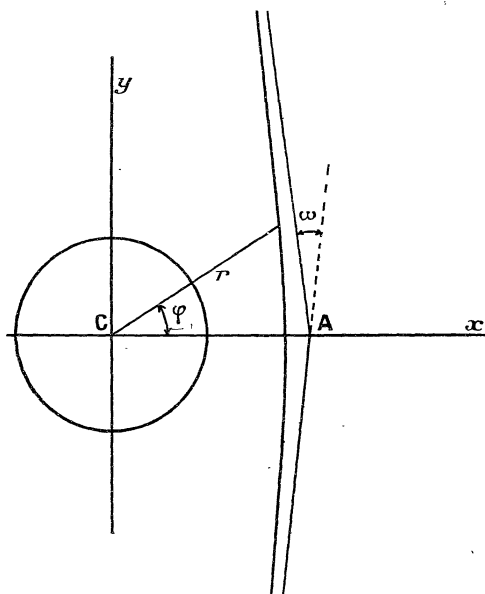


Fig. 1.

céleste. Soient C son centre (voir *fig. 1*),  $m$  sa masse et  $a$  son rayon. L'équation approchée de la trajectoire sera [2]

$$(1) \quad R = r \cos \varphi + \frac{m}{R} (r \cos^2 \varphi + 2r \sin^2 \varphi)$$

ou bien

$$(1') \quad x = R - \frac{m}{R} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

où  $R$  est la distance  $\overline{CA}$ .

La trajectoire possède deux asymptotes

$$(2) \quad x = R \pm \frac{2m}{R} y$$

qui se coupent sur l'axe  $Cx$  en A.

L'angle des asymptotes

$$(2') \quad \omega = \frac{4m}{R}$$

# CONSÉQUENCES PHOTOMÉTRIQUES DE LA DÉVIATION D'EINSTEIN. 75

donne la déviation totale des rayons ayant traversé le champ de gravitation. On obtient ainsi pour le Soleil :

$$m = 1^{\text{km}}, 47, \quad a = 695 \cdot 10^3 \text{ km}, \quad \omega = 1'', 75.$$

La déviation partielle entre les deux points  $(\varphi_1, r_1)$  et  $(\varphi_2, r_2)$  peut être exprimée par l'intégrale [3]

$$\omega_{1,2} = \frac{m}{R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos(\varphi + 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi,$$

d'où, en posant  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , on obtient la formule (2').

La distance minima de l'asymptote au centre C sera

$$(3) \quad R'_0 = R \left( 1 - \frac{8m^2}{R^2} \right),$$

et celle de la trajectoire

$$R_0 = R \left( 1 - \frac{m}{R} \right).$$

Pour les recherches qui suivent il sera plus commode d'adopter comme unité de masse et de longueur la masse et le rayon du Soleil. On aura alors

$$(2'') \quad \omega = Kk \frac{a}{R}, \quad \text{où} \quad k = 1'', 75, \quad K = \frac{m}{a} \frac{a_{\odot}}{m_{\odot}}.$$

La valeur de K dépend de la place de l'étoile dans le diagramme de Russel. D'une façon générale K augmente en allant des géants vers les nains. Pour un géant tel que Antarès on a  $K = 0,06$  et pour l'étoile AC 70°, 8427, la plus petite étoile connue [4], on a  $K = 600$ . Pour notre Soleil on a naturellement  $K = 1$ .

**3. Modification de l'intensité.** — Soient M un élément émetteur de lumière, N un élément récepteur (sur la Terre) et C le centre du corps déviant. D'une façon générale, sans tenir compte de la cause interne de la déviation, on trouve pour l'angle  $r = \widehat{\text{MCO}}$  (voir *fig. 2*)

$$(4) \quad r = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{R'_0}{a} - \omega,$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les semi-diamètres apparents du corps C vus de M et de N respectivement.

Dans le cas de la déviation d'Einstein,

$$(4') \quad r = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{R}{a} - \frac{Kk}{R} a, \quad R'_0 = R.$$

Le flux lumineux contenu entre les deux cônes infiniment voisins  $\tau$  et  $\tau + d\tau$  frappe le plan II en  $dS'$ . En l'absence du corps déviant,

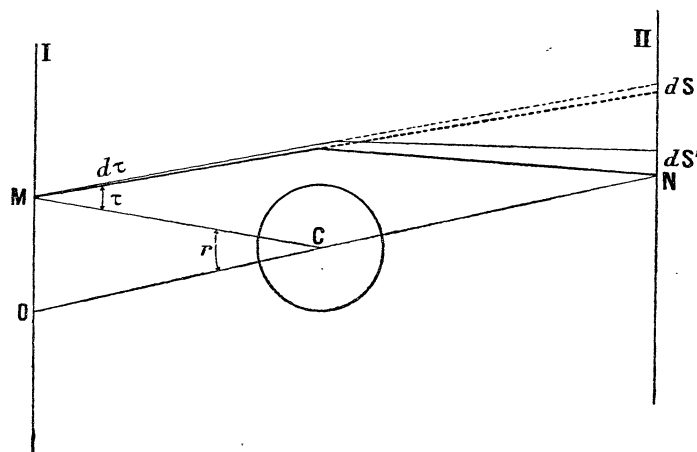


Fig. 2.

il le frapperait en  $dS$ . Le rapport  $\frac{dS'}{dS}$  donne la modification de l'éclairement en N. On l'obtient d'une façon analogue que nous avons traité l'affaiblissement par la réfraction dans les éclipses de Lune [5]:

$$(5) \quad \frac{i}{j} = \frac{dS'}{dS} = s = \left[ 1 - \frac{\omega}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{a}{R'_0} \right] \left[ 1 - \frac{d\omega}{dR'_0} \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2} \right].$$

Comme  $\frac{d\omega}{dR'_0}$  est en général négatif, la formule se compose de deux termes agissant dans les sens contraires. Le premier  $1 - \frac{\omega}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{a}{R'_0} < 1$  produit l'augmentation de l'éclairement à la suite de la déviation, tandis que le second  $> 1$  donne la diminution due à la dispersion des rayons. Leurs influences antagonistes se combinent suivant la loi qui donne  $\omega$  en fonction de R. Dans notre cas on trouve facilement

$$(5') \quad s = 1 - \frac{K^2 k^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \frac{a^4}{R^4}.$$

## CONSÉQUENCES PHOTOMÉTRIQUES DE LA DÉVIATION D'EINSTEIN. 77

Pour le Soleil le facteur  $\frac{k}{\alpha_1 + \alpha_2}$  est très petit et l'on a par suite, même au bord du Soleil  $s = 1 - 4 \cdot 10^{-6}$ , une augmentation excessivement faible. Les circonstances plus favorables à la suite de la petitesse des  $\alpha$  ont lieu pour les étoiles [6].

**4. Discussion.** — La formule pour  $s$  est symétrique par rapport aux distances MC et CN. On peut donc échanger l'élément émetteur contre l'élément récepteur sans qu'il y ait de changement dans le rapport des intensités.

Nous allons suivre les variations de ce rapport avec la distance  $R$  décroissante. Loin de l'astre pour des grandes valeurs de  $R$ , il y a toujours une très faible augmentation de l'éclairement du fait que  $s$  est peu inférieur à l'unité. Sa valeur décroît et tend vers le zéro quand la distance des rayons s'approche à la valeur critique

$$(6) \quad R^* = a \sqrt{\frac{Kk}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \quad \rho^* = \alpha_2 \sqrt{\frac{Kk}{\alpha_1 + \alpha_2}} \quad (r^* = 0),$$

où  $\rho$  est la distance apparente au centre C vue de la Terre.

Dans ce cas limite le flux émis par un élément du plan I situé sur l'axe  $\overline{NC}$  ( $r = 0$ ) et passant à la distance  $R^*$  est concentré au point N dans le plan II.

Plus près du corps C le rapport devient négatif. Ceci tient à la signification géométrique de  $s$  qui est le rapport des variations de deux aires. Du point de vue énergétique, il faut prendre sa valeur absolue ainsi que pour l'angle  $r$  qui devient aussi négatif. On trouve ensuite d'une façon générale

$$(7) \quad R = R^* \frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

tant que  $s$  reste faible (positif ou négatif), on peut écrire

$$\begin{aligned} R &= R^* \left( 1 + \frac{s}{4} + \dots \right), \\ \rho &= \rho^* \left( 1 + \frac{s}{4} + \dots \right), \\ r &= \frac{s}{2} \sqrt{Kk(\alpha_1 + \alpha_2)}. \end{aligned}$$

Au voisinage de la distance critique les variations de l'intensité sont symétriques.

Quand la distance atteint la valeur  $R = R^* 2^{-\frac{1}{4}} = 0,84 R^*$ , le rapport  $s$  devient égal à l'unité ( $-1$ ), c'est-à-dire il n'y a pas de modification de l'intensité. Cette distance dépassée, la valeur absolue de  $s$  devient supérieure à l'unité et l'affaiblissement de l'intensité se maintient jusqu'à la surface du corps déviant (voir *fig.* 5, p. 86).

Les phases que nous venons de décrire ne sont pas forcément toutes possibles. Pour cela il faut que  $\rho^* > \alpha_2$ . Dans le cas de notre Soleil, par exemple pour une étoile occultée à l'infini,  $\rho^* = 0',7 < \alpha_2 = 32'$ , ce cas est donc impossible. D'une façon générale, pour que le cas critique soit possible, il faut que

$$(7') \quad \alpha_1 + \alpha_2 < K k.$$

Nous donnerons plus loin un critère complet.

**5. Occultation mutuelle de deux étoiles.** — Dans la discussion précédente nous avons supposé une source ponctuelle occultée par une étoile. En réalité il faut toujours considérer l'occultation mutuelle de deux étoiles.

Nous allons étudier d'abord l'influence du corps occultant sur l'intensité des éléments lumineux du plan I (voir *fig.* 3). En éliminant le rapport  $\frac{a}{R}$  des formules (4') et (5') on obtient,

$$\frac{I}{s_{1,2}} = \left( \frac{\mathcal{J}}{i} \right)_{1,2} = \frac{I}{1 - \frac{16 K^2 k^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(r \pm \sqrt{r^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2) K k})^4}}.$$

Il s'ensuit que le point M du plan I éclaire la Terre (en N) par deux faisceaux dont les intensités pour des raisons citées dans le n° 4 sont de signes contraires. Pour avoir l'éclairement global, il faut prendre la valeur absolue de leur différence. On obtient ainsi pour  $i = 1$

$$(8) \quad \mathcal{J} = |\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2| = \frac{r^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) K k}{r \sqrt{r^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2) K k}}.$$

Cette formule donne l'éclairement en N produit par un élément du plan I en M situé à la distance angulaire  $r$  de l'axe  $\overline{NC}$ . Il y a donc toujours l'augmentation de l'intensité.

Loin de l'axe pour  $r^2 \gg 4(\alpha_1 + \alpha_2)Kk$ , on a

$$\mathcal{J} = 1 - \frac{4(\alpha_1 + \alpha_2)^2 K^2 k^2}{r^4} \approx 1.$$

Très près de l'axe on trouve au contraire

$$(9) \quad \mathcal{J} = \frac{\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}}{r} \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{r^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)Kk} \dots \right).$$

Cette relation est sensiblement hyperbolique. Au centre même ( $r = 0$ ), on a  $\mathcal{J} = \infty$  comme nous avons trouvé dans la discussion précédente (voir *fig.* 6, p. 86).

Pour trouver l'éclat de l'étoile occultée, il faut évaluer l'intégrale  $E = \int b \mathcal{J} dq$ , où  $b$  est la brillance d'un élément de surface  $dq$  sur laquelle il faut étendre l'intégration.

Supposant le disque uniforme on aurait en l'absence de l'étoile occultante  $e = \pi r_1^2 b$ , où  $r_1$  est son rayon apparent.

Le rapport

$$\frac{E}{e} = \frac{1}{\pi r_1^2} \int \mathcal{J} dq$$

donne alors la modification (augmentation) d'éclat par l'effet Einstein.

L'effet atteindra son maximum pour l'occultation centrale. Tant que  $r_1$  est suffisamment petit pour que la formule (9) soit applicable, nous trouvons

$$(10) \quad \frac{E}{e} \approx \frac{2 \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}}{r_1}.$$

Si la brillance n'est pas uniforme sur le disque de l'étoile occultée, il faut adopter une loi qui donne la brillance en fonction de la distance au centre du disque. En adoptant la formule

$$b = 1 - c + \frac{c}{r_1} \sqrt{r_1^2 - r^2},$$

on trouve de la même façon

$$\frac{E'}{e'} = \frac{E}{e} \frac{12 - 2.57c}{12 - 4c}.$$

Pour le maximum d'obscurcissement  $c = 1$ , on obtient

$$\frac{E'}{e} = \frac{E}{e} \cdot 1,18 \dots$$

C'est une différence que nous négligerons dans les parties suivantes.

**6. Conservation des brillances.** — Les variations d'éclat seront accompagnées des variations de la forme de l'étoile occultée en

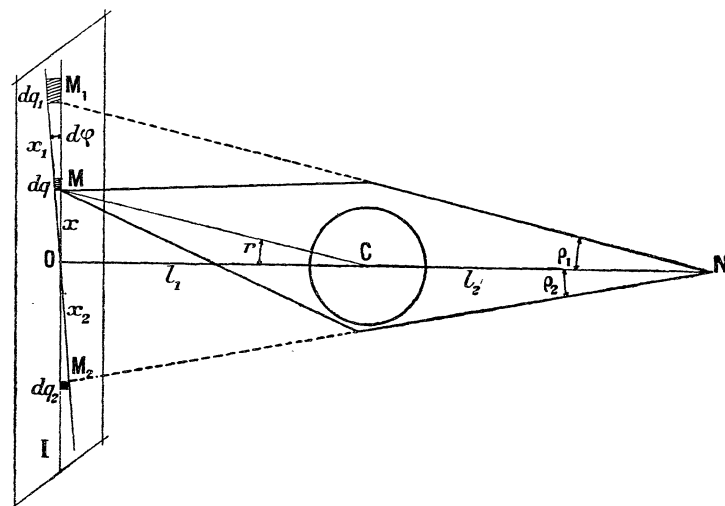


Fig. 3.

vertu de la loi de conservation des brillances. Pour démontrer celle-ci, considérons un élément lumineux  $dq$  du plan I (voir *fig.* 3).

En l'absence du corps occultant, l'élément vu de la Terre apparaît sous l'angle solide

$$d\sigma = \frac{dq}{(l_1 + l_2)^2} = \frac{x \, dx \, d\varphi}{(l_1 + l_2)^2}.$$

Le champ de gravitation du corps C dédouble l'image de l'élément. On aura

$$dq_{1,2} = x_{1,2} \, dx_{1,2} \, d\varphi$$

et, par suite,

$$d\sigma'_{1,2} = \frac{x_{1,2} \, dx_{1,2} \, d\varphi}{(l_1 + l_2)^2}.$$

Si la loi de conservation des brillances est valable, le rapport  $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$

CONSÉQUENCES PHOTOMÉTRIQUES DE LA DÉVIATION D'EINSTEIN. 81  
doit donner la formule (8). En écrivant

$$x = r l_1, \quad x'_{1,2} = \rho_{1,2}(l_1 + l_2),$$

on obtient

$$\frac{d\sigma'_{1,2}}{d\sigma} = \frac{\rho_{1,2} d\rho_{1,2}(l_1 + l_2)^2}{r dr l_1^2};$$

pour  $\rho$  nous avons à l'aide de (4)

$$(11) \quad \rho_{1,2} = \alpha_2 \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma'_{1,2}}{d\sigma} &= \frac{(l_1 + l_2)^2}{l_1^2} \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \\ &\times \frac{(r \pm \sqrt{r^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}) \left(1 \pm \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}}\right)}{4r}. \end{aligned}$$

Pour des raisons exposées dans le n° 4, les valeurs  $d\sigma_1$  et  $d\sigma_2$  sont toujours de signes contraires. Pour notre but, il faut prendre la valeur absolue de leur différence. On trouve ainsi

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{|d\sigma'_1 - d\sigma'_2|}{d\sigma} = \frac{r^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}{r\sqrt{r^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}},$$

ce qui est identique à l'expression (8).

**7. Variations de la forme de l'étoile occultée.** — Pour trouver la forme apparente de l'étoile occultée, nous discuterons d'abord la formule (11). Soit le plan I, le plan de la figure 4. Le centre de l'étoile occultée se trouve en A et celle de l'étoile occultante projetée de la Terre sera au point O.

A chaque point M de l'étoile occultée correspond l'angle  $r$ . L'image de ce point sera dédoublée par l'effet Einstein comme le montre la formule (11) :

$$\rho_{1,2} = \alpha_2 \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2)Kk}}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Quand le point M est très loin de l'axe, c'est-à-dire quand

$$r^2 \gg 4(\alpha_1 + \alpha_2)Kk,$$

*Mém.* (Tome X. — Fasc. 1).

6

on aura

$$\rho_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} r, \quad \rho_2 = 0.$$

Il se forme alors deux images de M, une  $M_1$  coïncidant pratiquement avec M et l'autre  $M_2$  se confondant avec O. Quand le

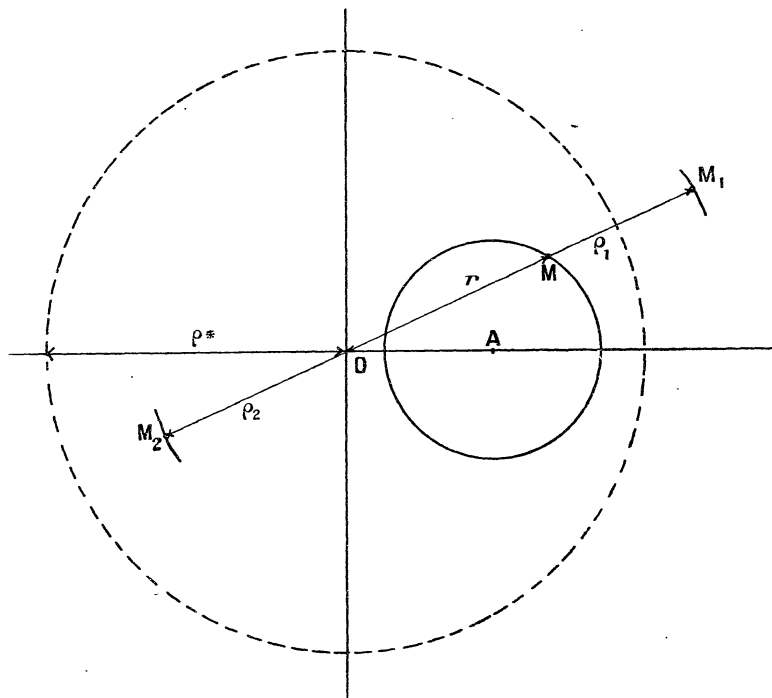


Fig. 4.

point M s'approche de l'axe, l'image  $M_1$  s'approche aussi, mais plus lentement, restant en retard sur M, tandis que  $M_2$  s'éloigne dans la direction opposée. Quand

$$r \rightarrow 0, \quad \rho_{1,2} \rightarrow \alpha_2 \sqrt{\frac{Kk}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \rho^*,$$

les deux images s'approchent de la circonférence critique. Elles en sont étalées quand M se confond avec le centre O (voir aussi *fig. 7a*).

Si au lieu de considérer un seul point nous considérons le disque entier de l'étoile occultée, les apparences seront analogues. L'étoile donnera naissance à deux satellites ayant grossièrement les

CONSÉQUENCES PHOTOMÉTRIQUES DE LA DÉVIATION D'EINSTEIN. 83

formes des lentilles ou des croissants. Au fur et à mesure de l'approche de l'occultation centrale, les croissants s'approchent de la circonférence critique en même temps que leurs cornes se rapprochent l'une de l'autre. Les cornes se touchent au moment où l'étoile occultée touche le point O par son bord. Finalement, au moment de l'occultation centrale, l'étoile occultée est transformée en un anneau concentrique autour de l'étoile occultante. Le rayon moyen de l'anneau sera sensiblement égal à la distance critique (voir *fig. 7*).

Il est facile de calculer l'aire de cet anneau. On obtient

$$\pi(\rho_1^2 - \rho_2^2) = \frac{\pi \alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} r_1 \sqrt{r_1^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2) K k}.$$

En la comparant avec l'aire de l'étoile non occultée vue de la Terre  $\frac{\pi \alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} r_1^2$  on obtient, en vertu de la conservation des brillances, l'augmentation d'éclat pendant l'occultation centrale

$$(10') \quad \frac{E}{e} = \frac{\sqrt{r_1^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2) K k}}{r_1},$$

ce qui est la formule (10) généralisée.

Jusqu'à présent nous ne nous sommes pas souciés de la visibilité réelle des phénomènes décrits. Autrement dit nous avons assimilé l'étoile occultante à une masse ponctuelle et les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ne servaient qu'à définir les distances. En réalité l'étoile occultante peut dans certains cas cacher en partie ou en totalité les formes dues à l'effet Einstein. Pour s'en assurer on peut procéder par la méthode graphique. D'ailleurs un critère fort simple permet de nous fixer si, dans un cas donné, l'image de l'étoile occultée est entièrement visible derrière le corps occultant. On trouve facilement, d'après la formule (11),

$$r_1 < K k - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Pour un élément sur l'axe on trouve l'inégalité (7')

$$\alpha_1 + \alpha_2 < K k,$$

déjà trouvée dans le n° 4.

Comme en pratique on mesure toujours l'éclat global de deux

étoiles, l'importance des variations lumineuses dépend de l'intensité relative de ces deux astres. Si l'étoile occultante est faible par rapport à l'étoile occultée, l'effet peut devenir important si les conditions sont favorables. Dans le cas contraire, l'effet même très grand peut être compensé par l'intensité relative trop faible de l'étoile occultée. Des modifications spectrales se produiront parallèlement aux variations d'éclat, si les deux astres appartiennent aux différents types spectraux.

Les variations de la forme seraient plus difficiles à observer sauf dans certains cas exceptionnels où la méthode interférentielle pourrait donner quelques résultats.

L'étoile occultante elle-même et aussi chaque étoile en général paraît un peu plus grande à la suite de son propre champ de gravitation. La différence est insignifiante et peut être exprimée sous la forme

$$\frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} = \frac{\omega}{4}.$$

L'éclat de l'étoile sera aussi augmenté en vertu de la loi de conservation des brillances. On obtient pour un disque de brillance uniforme

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\omega}{2}.$$

Par exemple, pour l'étoile de Kuiper citée plus haut [4],

$$\frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} = 0,51 \text{ } \%, \quad \frac{\Delta E}{E} = 1,02 \text{ } \%.$$

Tandis que pour notre Soleil

$$\frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} = 0,00085 \text{ } \%, \quad \frac{\Delta E}{E} = 0,0017 \text{ } \%.$$

**8. Exemples numériques.** — Pour mieux illustrer les considérations théoriques précédentes, nous donnerons ici trois exemples numériques.

**A. Système double optique.** — Considérons les deux étoiles suivantes :

$$\alpha_1 = 0'',0002, \quad \alpha_2 = 0'',0018, \quad Kk = 2''.$$

C'est par exemple une étoile de la même grandeur que notre

CONSEQUENCES PHOTOMETRIQUES DE LA DEVIATION D'EINSTEIN. 85  
Soleil et de la masse 1,14 plus grande. La grandeur de l'étoile occultée reste encore indéterminée. Pour les distances nous aurons :

- Terre — étoile occultante = 2,6 parsecs;
- Terre — étoile occultée = 25,8 parsecs.

D'autre part, pour la distance critique, nous aurons :

$$\frac{R^*}{e} = 31,6, \quad \rho^* = 0'',0569.$$

Le tableau suivant a été calculé d'après les formules (7), (6), (2) et (4). La dernière colonne donne la distance réelle du point considéré telle qu'elle serait observable en l'absence de l'effet Einstein. On peut la calculer à l'aide de la formule suivante :

$$r' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} r.$$

La signification des colonnes est évidente. La troisième colonne  $\Delta m$  donne la modification de l'intensité exprimée en grandeurs stellaires. Les trois premières colonnes sont indépendantes des constantes numériques adoptées et peuvent servir pour d'autres exemples.

| $\frac{R}{R^*}$ | $s.$    | $\Delta m.$   | $\frac{R}{a}$ | $\rho.$ | $\omega.$ | $r.$   | $r'.$  |
|-----------------|---------|---------------|---------------|---------|-----------|--------|--------|
|                 |         | <sup>mg</sup> |               |         |           |        |        |
| 10              | 0,999   | — 0,00        | 316           | 0,570   | 0,006     | +0,626 | +0,564 |
| 5               | 0,998   | — 0,00        | 158           | 0,284   | 0,013     | 0,303  | 0,273  |
| 2               | 0,938   | — 0,06        | 63,2          | 0,114   | 0,032     | 0,094  | 0,086  |
| 1,5             | 0,803   | — 0,25        | 47,5          | 0,086   | 0,042     | 0,053  | 0,047  |
| 1,3             | 0,649   | — 0,47        | 41,1          | 0,074   | 0,049     | 0,033  | 0,031  |
| 1,1             | 0,313   | — 1,26        | 34,9          | 0,063   | 0,057     | 0,012  | 0,010  |
| 1,01            | 0,040   | — 3,50        | 31,9          | 0,057   | 0,062     | +0,001 | +0,001 |
| 1,00            | 0,000   | — $\infty$    | 31,6          | 0,057   | 0,063     | 0,000  | 0,000  |
| 0,99            | — 0,040 | — 3,50        | 31,3          | 0,057   | 0,064     | —0,001 | —0,001 |
| 0,9             | — 0,561 | — 0,90        | 28,5          | 0,051   | 0,070     | 0,013  | 0,012  |
| 0,84            | — 1,000 | 0,00          | 26,6          | 0,048   | 0,075     | 0,022  | 0,020  |
| 0,5             | — 15,00 | + 2,94        | 15,8          | 0,028   | 0,127     | 0,095  | 0,087  |
| 0,2             | — 624,0 | + 6,99        | 6,32          | 0,011   | 0,316     | 0,303  | 0,274  |
| 0,1             | —9999   | +10,00        | 3,16          | 0,006   | 0,636     | 0,630  | 0,566  |

Les résultats numériques de ce tableau sont représentés sur le graphique qui donne  $\Delta m$  en fonction de  $\frac{R}{R^*}$  (voir fig. 5). Un

autre graphique 6 donne la représentation de la formule (8).  
Finalement la figure 7 donne l'aspect de l'occultation mutuelle de

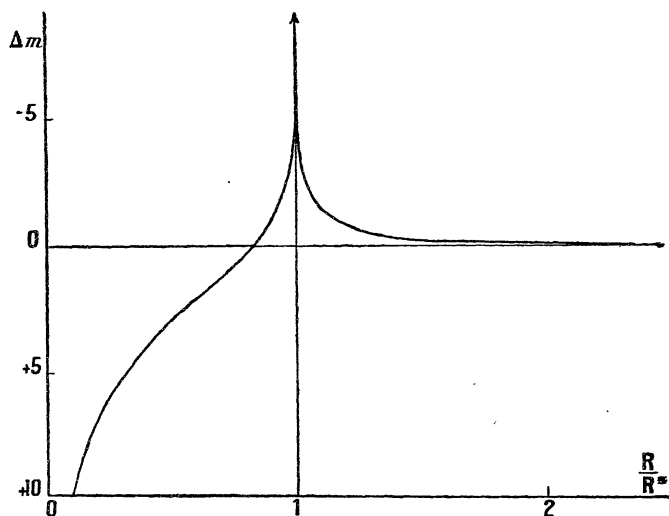


Fig. 5.

deux étoiles. L'étoile occultée pour des raisons d'ordre technique est une étoile géante de rayon 100 fois plus grand que l'étoile

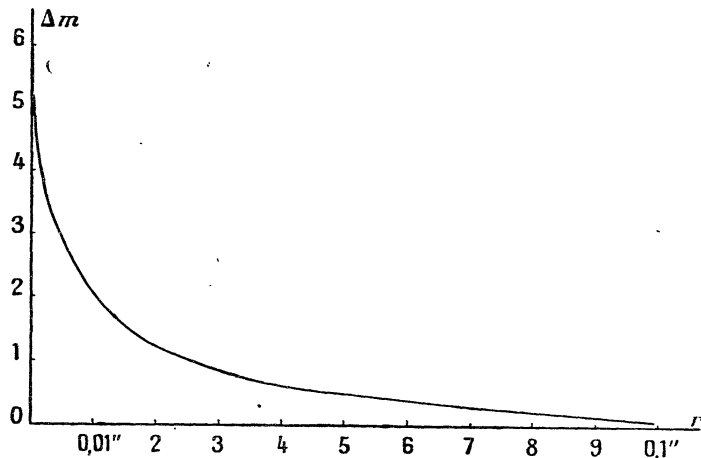


Fig. 6. .

occultante. D'ailleurs les apparences seraient peu différentes pour une étoile plus petite, car les dimensions des formes ne dépendent pratiquement que de l'étoile occultante. C'est seulement leurs

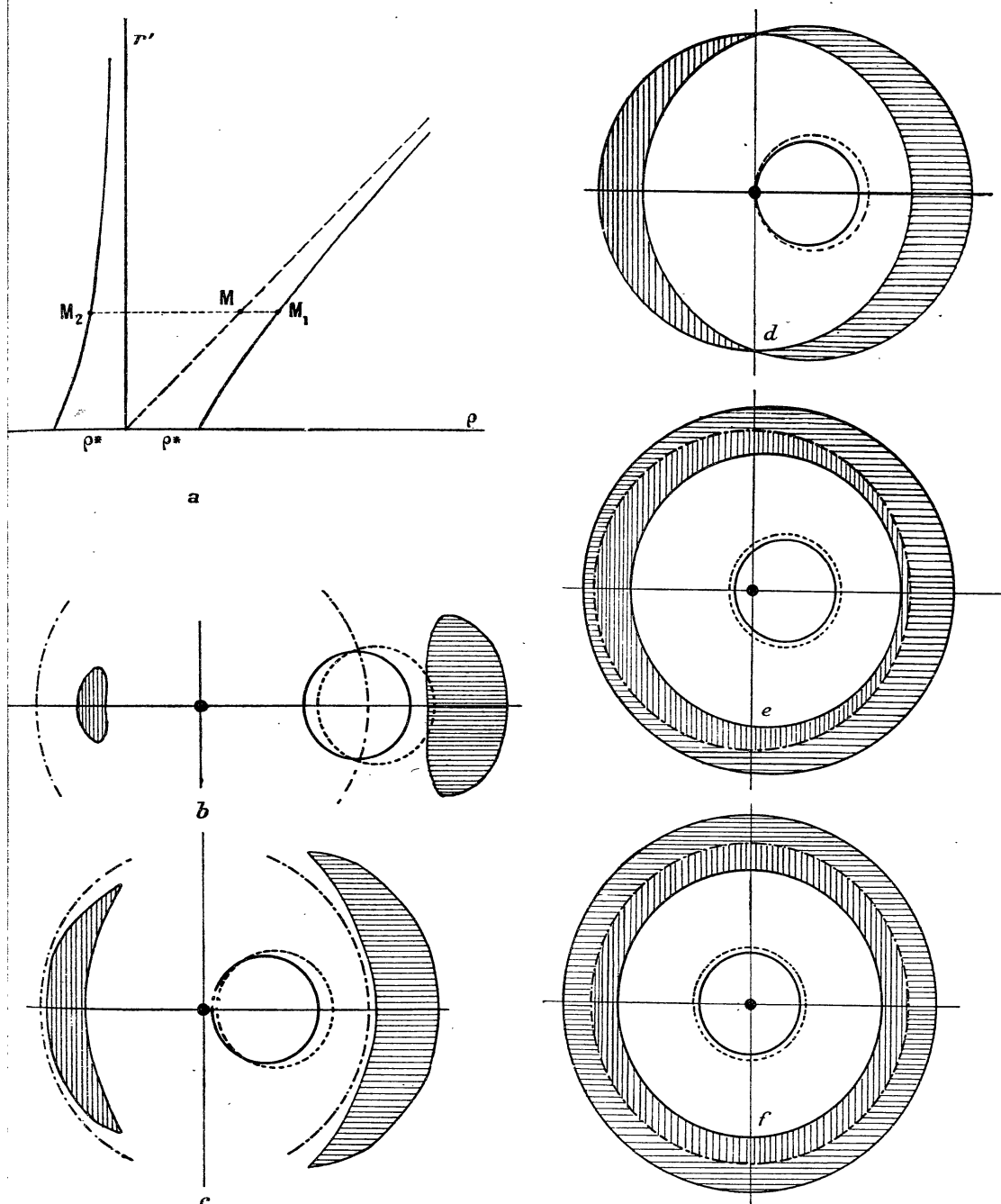


Fig. 7.

Occultation dans un système double optique (voir exemple A au n° 8). *a*, courbes donnant les distances apparentes  $\rho_1$  et  $\rho_2$  en fonction de la distance réelle  $r'$ . *b* — *f* Aspects successifs de l'occultation vus de la Terre. Petit disque noir-étoile occultante. Cercle en plein trait-étoile occultée vue de la Terre en absence du corps déviant, en pointillé-étoile occultée vue de l'étoile occultante. Formes hachurées-images de l'étoile occultée dues à la déviation d'Einstein. Grande circonférence en point-trait circonférence critique.

épaisseurs qui dépendent en premier lieu des dimensions de l'étoile occultée.

L'augmentation d'éclat pendant l'occultation centrale sera

$$\frac{E}{e} = 6,4, \quad \Delta m = -2^{\text{mg}}, 02.$$

B. *Système double physique.* — Considérons maintenant un couple analogue à celui de Sirius A-B. Adoptons par exemple les valeurs suivantes :

|               |                  |
|---------------|------------------|
| A.            | B.               |
| $m = 2 \odot$ | $m = 1 \odot$    |
| $a = 1 \odot$ | $a = 0,02 \odot$ |
| $K = 2$       | $K = 50$         |

Distance A-B, 19,6 u. a.

Révolution, 50 ans.

Distance =  $10^6$  u. a = 4,85 parsecs.

L'étoile principale sera occultée par le compagnon B :

$$\begin{aligned} r_1 &= 49'', 0, \\ \alpha_1 &= 1'', 0, \\ \alpha_2 &= 19'', 2 \cdot 10^{-6}, \\ Kk &= 87'', 5. \end{aligned}$$

La condition (7')

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1'', 0 < kK = 87'', 5,$$

ainsi que

$$49'' = r_1 < Kk - (\alpha_1 + \alpha_2) = 86'', 5,$$

sont ici largement satisfaites à cause de la forte densité de l'étoile occultante malgré la faible distance de l'étoile occultée.

Pour l'augmentation d'éclat pendant l'occultation centrale, on obtient d'après la formule (10') :

$$\frac{E}{e} = 1,05, \quad \Delta m = -0^{\text{mg}}, 05.$$

On voit que l'effet est très faible malgré les circonstances favorables. Ceci tient à la grandeur trop forte de l'étoile occultée. Si par exemple son rayon *ceteris paribus* était  $a = 0,1$ , on aurait  $\Delta m = -1^{\text{mg}}, 5$ , ce qui constitue déjà un gros effet bien mesurable.

Les systèmes doubles normaux ne présentent pas de conditions

CONSÉQUENCES PHOTOMÉTRIQUES DE LA DÉVIATION D'EINSTEIN. 89  
favorables à cause de la faible distance qui sépare ses composantes.

C. *Amas d'étoiles (globulaires en particulier)*. — Les conditions les plus favorables, notamment en ce qui concerne la probabilité du phénomène, se présentent dans les amas d'étoiles. C'est là que nous croyons trouver une indication nette de l'effet photométrique d'Einstein.

Les observations photographiques des amas globulaires donnent le nombre d'étoiles par unité de surface en fonction de la distance au centre. D'autre part, les mesures photométriques donnent la brillance en fonction de la même variable. Il est naturel, supposant que l'amas est composé d'étoiles identiques, de mettre les deux fonctions en relation directe. Ce procédé réussit dans les parties moyennes et périphériques de l'amas. Vers le centre, la fonction de brillance est supérieure à la fonction de nombre d'étoiles. La différence s'expliquait parfois par la prédominance réelle d'étoiles brillantes au centre de l'amas ou bien par les défauts de décomptes vers le centre où la densité est très grande. Maintenant une autre explication est possible. La prédominance d'étoiles brillantes vers le centre ne serait réelle qu'en projection étant due à l'effet photométrique d'Einstein.

La solution du problème spatiale est très difficile. Nous nous contenterons d'une solution plus simple. Considérons deux étoiles sur la ligne de visée séparées par la distance égale au diamètre de l'amas. D'autre part, la distance à la Terre est très grande par rapport au diamètre de l'amas  $D$ . On peut alors écrire :

$$\alpha_1 = \frac{a}{D}, \quad \alpha_2 \doteq 0$$

et la formule (10) donne

$$\frac{E}{e} = 2 \sqrt{\frac{\alpha_1 K k}{r_1^2}}.$$

Supposant que toutes les étoiles de l'amas sont identiques à notre Soleil on trouve, si  $D$  est exprimé en parsecs :

$$\frac{E}{e} = 38,8 \sqrt{D}$$

ou bien

$$\Delta m = -4,0 - 1,25 \log_{10} D.$$

Par exemple, pour M13 (l'amas d'Hercule), on a  $D = 30$  parsecs et  $\Delta m = -5^{\text{m}}85$ . L'augmentation d'éclat ainsi calculée ne donne que l'ordre de grandeur pour les raisons suivantes : 1° toutes les occultations ne sont pas centrales; 2° les occultations même centrales arrivent entre les étoiles moins distantes; 3° les occultations peuvent se combiner entre plusieurs étoiles sur la même ligne de visée.

Les phénomènes analogues peuvent se présenter dans les nébuleuses spirales et concourent à l'augmentation d'éclat de ces systèmes.

**9. Conclusions.** — La réalité des phénomènes dont nous avons donné un aperçu dépend de la validité de la déviation d'Einstein. Il serait alors très intéressant de chercher systématiquement dans tous les domaines de l'astronomie stellaire des cas favorables à la production de ces effets, non seulement pour la vérification supplémentaire de la théorie, mais aussi pour l'explication de certaines variations d'éclat.

#### Bibliographie.

1. O. CHWOLSON, *A. N.* Bd. 221, p. 329.
2. A. EDDINGTON, *Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorie*.
3. H. TURNER, *Publ. Astr. Soc. Pac.*, vol. 41, feb. 1929.
4. G. P. KUIPER, *Publ. Astr. Soc. Pac.*, vol. 47, dec. 1935.
5. F. LINK, *Bull. astr.*, t. VIII, fasc. II, 1933.
6. F. LINK, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 202, 16 mars 1936. p. 917.

---

#### ERRATA.

---

Mémoire BERTAUD, fascicule X du Tome IX du *Bulletin Astronomique*.

Page 490, fig. 5, colonne 8 :

*lire* :  $-45^{\circ}$  et  $-80^{\circ}$ , *au lieu de* :  $-20^{\circ}$  et  $-30^{\circ}$ .

Page 502, Tableau V, 19<sup>e</sup> ligne :

*lire* : 20 R, *au lieu de* : 10 R.

---