

# JOURNAL DES OBSERVATEURS

Volume XV

N° 7. — Juillet 1932.

## Nouvelle contribution à l'étude des clichés photographiques

par M. J. RENAUX

Ce travail n'est pas autre chose qu'une application du calcul barycentrique de MÖBIUS, employé à deux plans en correspondance, le plan  $P$  d'observation et celui  $C$  de comparaison. Je pense que les résultats obtenus peuvent rivaliser comme simplicité et élégance avec tous ceux que l'on trouve dans les traités de « *calcul géométrique* » pour l'addition des formes linéaires.

### Bibliographie

Je complète l'index bibliographique de M. J. Ph. LAGRULA dans le n° 4 du *Journal des Observateurs*, avril 1931, vol. XIV.

J. Ph. LAGRULA. — ( $f$ ) Astro-homographie ; première partie. *Journal des Observateurs*, vol. XIV, n° 4.

H. VAN GENT <sup>(1)</sup>. — On a method based on a property of central projection for reducing the rectangular co-ordinates measured on a arbitrary plate to those of any other plate. (*Bull. Astr. Inst. Netherlands*, 6, n° 216).

J. RENAUX. — ( $c$ ) Nouvelle contribution à l'étude de la réduction des clichés photographiques ; *C. R.*, t. 192, p. 1360.

F. GONNESSIAT. — ( $c$ ) Sur la réduction des clichés photographiques. *Journal des Observateurs*, vol. XIV, n° 7.

J. Ph. LAGRULA. — ( $g$ ) Sur les inconvénients de l'emploi de quatre étoiles dans le rattachement local de deux clichés à grand champ, même fortement décentré. *C. R.*, t. 193, p. 573.

SYLVAIN AREND. — Solution générale du problème du rattachement de deux clichés l'un à l'autre. *C. R.*, t. 194, p. 2292. <sup>(2)</sup>

(1) Personnellement, je félicite M. H. VAN GENT de son initiative et d'avoir cherché à sortir complètement de la méthode ordinaire de Schlesinger (trois étoiles). Malheureusement, son travail ne s'applique pas à plus de quatre repères et, si on tient compte des termes du deuxième ordre, il n'est pas possible au bout d'un certain temps de raccorder d'une façon satisfaisante quatre étoiles. Voir le *résidu de groupe* J. RENAUX, *Journal des Observateurs*, vol. XIII, n° 9.

(2) Mon mémoire allait partir à l'impression quand est parvenu à l'Observatoire d'Alger le numéro des *C. R.* Je rappelle que dans mon travail (*J. O.*, vol. XIII, n° 9) j'ai traité le problème au point de vue de la distribution des triangles qui est identique au fond avec le calcul barycentrique. Dans mon mémoire actuel on en trouvera une étude approfondie.

M. AREND parle dans sa note « d'une relation d'égalité qui ne sera qu'approximative: Ce sera au calculateur de décider si l'approximation est suffisante, car elle constitue un critère de la valeur du rattachement ».

En tenant compte des termes du second ordre, ce qui est toujours facile, j'ai donné, il y a deux ans, la *notion absolument nouvelle de résidu de groupe*. Dans le plan d'observation, on trouve pour quatre points une identité qui, dans le plan de comparaison, a comme correspondante une *forme linéaire. le résidu de groupe*. C'est la façon la plus simple et la plus synthétique d'introduire un critère de rattachement. Mais, dans le cas d'un nombre de repères plus grand que quatre, les résidus de groupe sont nombreux et d'un emploi pénible. J'ai donné par la *composition des substitutions linéaires*, des expressions équivalentes qui sont essentiellement pratiques. En ce qui concerne ces résidus de groupe on trouvera ici une étude de leurs propriétés.

D'autre part, la méthode de la distribution des triangles peut toujours donner, si on le veut (voir mon premier travail) les formules de Schlesinger qui sont la *condensation finale*. Il y a longtemps que je me suis complètement débarrassé de cette condensation qui *masque toutes les propriétés géométriques*. Le lecteur jugera de ce que j'ai fait dans ce sens ; mais on peut dire que mon étude est tout à fait d'actualité.

### Aperçus préliminaires <sup>(1)</sup>

Je considère mon mémoire (*J. O.*, vol. XIII, n° 9) comme une introduction au travail actuel. Aussi, j'y renvoie fréquemment le lecteur et je continue ici le numérotage des équations et des paragraphes qui s'y trouvent.

En 1929, un certain nombre d'articles ont paru sur la méthode de *Schlesinger* (trois étoiles). Pour un nombre plus considérable de repères et *sans l'emploi de la méthode des moindres carrés*, quelques tentatives numériques ont été faites, mais sans résultat. La question reste donc *d'actualité* et elle a besoin d'être traitée mathématiquement avec toutes les possibilités d'investigation, pour bien mettre en évidence *les liaisons géométriques* entre les plans d'observation et de comparaison. La méthode des moindres carrés, ordinairement employée à partir d'un certain nombre de repères, ne tient pas compte (et ne peut pas tenir compte) de ces propriétés. Nous avons cherché une *méthode type*, plus rapide et tout à fait objective. En 1930, nous n'avions pas de *critère* pour la combinaison linéaire des formes symétriques. Une étude des enceintes et de ces formes (qui ne peut prendre place ici, car elle alourdirait notre travail déjà chargé) nous a montré que l'expression I (35) (*J. O.*, vol XIII, n° 9) jouissait de la belle propriété suivante. *La somme des résidus de représentation pour toutes les repères, qu'elles appartiennent ou non à l'enceinte, est nulle et la solution est unique.* Plus rapide que la méthode des moindres carrés, nous avons jugé cette solution encore insuffisante.

En ce qui concerne l'enceinte, on peut prendre la distribution des points la plus compliquée, exemple la figure 1 pour onze repères, à condition que le *total*, c'est-à-dire le double de l'aire de la ligne polygonale fermée (nous définirons ultérieurement cette aire d'une façon précise) ne soit pas nulle.

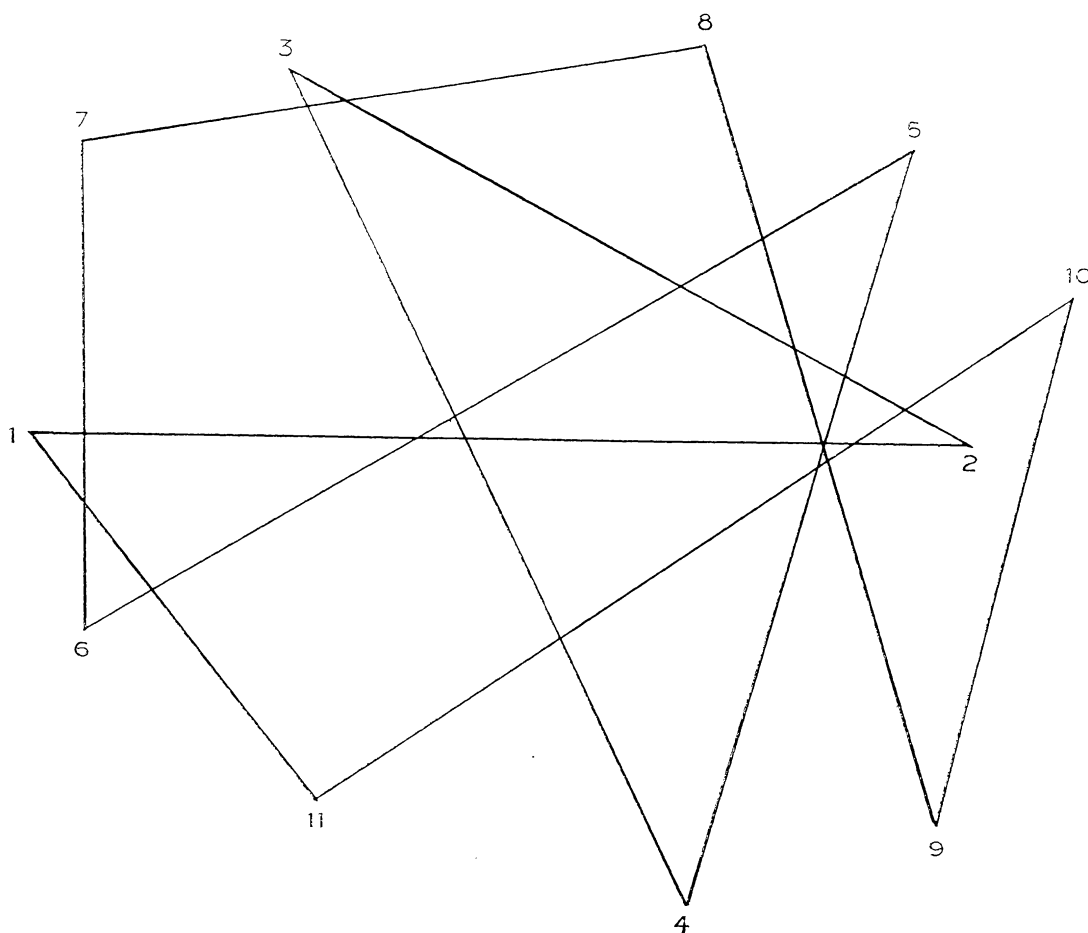


FIGURE 1

(1) Trois exemples numériques complètement traités se trouvent à la fin du chapitre.

Joignons maintenant les points de deux en deux, de trois en trois, de quatre en quatre, etc., nous aurons comme dans le cas des polygones réguliers, des lignes polygonales étoilées fermées, pour chacune desquelles il existe une solution unique, ainsi que celle envisagée plus haut. Une combinaison linéaire quelconque de ces solutions convient encore et une question importante se pose : *comment en déterminer les coefficients ?* Or, nos expressions analytiques comportent un certain nombre de formes linéaires. Nous cherchons à déterminer les coefficients de façon que ces formes se réduisent à deux (généralisation d'une belle propriété du quadrilatère). *Le problème est toujours possible ; fait remarquable, il ne dépend en aucune façon de la disposition des sommets de notre enceinte, mais seulement de leur nombre et la détermination des coefficients se rattache à une théorie nouvelle des polygones réguliers, qui nous est imposée par la nature même de la question.* Les coefficients étant obtenus, notre *solution type désirée* se réalise facilement. On trouvera à la fin du n° XIX, les valeurs numériques des coefficients et les expressions analytiques des formes linéaires à employer. Nous terminerons le premier chapitre de ce présent mémoire par des exemples numériques. Il est clair que c'est une étude spéciale des polygones réguliers qui nous permet de résoudre facilement notre question, à savoir la réduction des clichés photographiques. Mais nos recherches la débordent totalement. Aussi, le deuxième chapitre, qui paraîtra ultérieurement, sera consacré à une nouvelle synthèse des propriétés de ces figures. Que nous retrouvions certains résultats déjà connus, c'est certain, mais il y en a d'autres, dont quelques-uns se rattachent même à la théorie des nombres. Si on envisage le point de *départ* et celui d'*arrivée*, on est obligé de constater la fécondité remarquable de notre méthode de la distribution des triangles, d'une richesse insoupçonnée des adeptes de Schlesinger.

## XI. — Méthode de Schlesinger et formules de Schlesinger

Pour éviter toute confusion et de mauvaises interprétations, nous allons exposer aussi brièvement que possible ce qu'il faut entendre par *Méthode de Schlesinger* et par *formules de Schlesinger*.

Envisageons sur un cliché photographique, d'abord  $n$  points  $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ , puis un  $n + 1^{\text{ème}}$ ,  $x_p, y_p$ , qui va jouer un rôle particulier. Supposons que les  $n$  points aient respectivement leurs correspondants sur un cliché  $C$ , le point  $x_p, y_p$  pouvant avoir ou non son correspondant sur  $C$ . Tenons compte, s'il y a lieu, des termes du second ordre en  $x, y$  (dans le travail de Schlesinger sur les parallaxes stellaires, ils sont inutiles) comme c'est indiqué dans I, n° IX. Nous aurons sur  $C$  les points  $(x_1^c, y_1^c) \dots (x_n^c, y_n^c)$  et s'il y a lieu le point  $x_p^c, y_p^c$ . Les points correspondants sur  $P$  et  $C$  sont *théoriquement* reliés entre eux par les substitutions linéaires.

$$(53) \quad x_i^c = C_1 + A_1 x_i + B_1 y_i ; \quad y_i^c = C_2 + A_2 x_i + B_2 y_i ; \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$$

Traisons les équations écrites par la méthode des moindres carrés ( $i = 1, 2 \dots n$ ), nous avons en abscisses par exemple

$$(54) \quad \begin{cases} \sum x_i^c = n C_1 + A_1 \sum x_i + B_1 \sum y_i \\ \sum x_i^c x_i = C_1 \sum x_i + A_1 \sum x_i^2 + B_1 \sum x_i y_i \\ \sum x_i^c y_i = C_1 \sum y_i + A_1 \sum x_i y_i + B_1 \sum y_i^2 \end{cases}$$

Avec un système analogue pour les ordonnées<sup>(1)</sup>. Le système (54) permet de déterminer les coefficients  $A_1, B_1, C_1$ , qu'on substitue dans les relations (53). Pour le cas qui nous occupe, il est plus simple d'opérer ainsi. Désignons par  $(x_p^c), (y_p^c)$ , le correspondant de  $x_p, y_p$ , sur le plan  $C$ , qui, après détermination des coefficients, est donné en abscisses, par exemple par

$$(x_p^c) = C_1 + A_1 x_p + B_1 y_p$$

(1) La méthode d'exposition qui n'est pas nécessairement celle de Schlesinger nous permet la synthèse la plus rapide.

Éliminons les coefficients entre les équations (54) et la précédente. On a en abscisses

$$\begin{vmatrix} (x_p^c) & 1 & x_p & y_p \\ \sum x_i^c & n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^c x_i & \sum x_i & \sum (x_i)^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^c y_i & \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix} = 0$$

Une simplification naturelle et particulièrement importante s'obtient en prenant  $x_p, y_p$  comme origine de coordonnées dans P. On a en abscisses

$$(55) \quad (x_p)^c = N : D \quad ; \quad N = \begin{vmatrix} \sum x_i^c & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^c x_i & \sum (x_i)^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^c y_i & \sum x_i y_i & \sum (y_i)^2 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum (x_i)^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum (y_i)^2 \end{vmatrix}$$

On peut développer N par rapport aux éléments de la première colonne, puis grouper tous les termes correspondants à une même abscisse  $x_i^c$ . On a alors une forme homogène en  $x_i^c$ , —  $x_n^c$ . La somme de tous les coefficients s'obtient en faisant dans N, tous les  $x_i^c$  égaux à l'unité ; N prend alors la valeur D, de telle sorte que  $(x_p^c), (y_p^c)$  peuvent s'écrire sous la forme

$$(56) \quad D (x_p^c) = \sum \lambda_i x_i^c \quad ; \quad D (y_p^c) = \sum \lambda_i y_i^c \quad ; \quad D = \sum \lambda_i$$

Remarquons que lorsque l'on remplace dans le déterminant N, les  $x_i^c$  par les  $x_i$  correspondants, il devient nul. Donc, on a dans le plan P des formes analogues à (56), mais où les deux premiers membres sont nuls, ce qui tient au choix que nous avons fait,  $x_p = 0, y_p = 0$ .

Faisons dans le plan P un changement de coordonnées parallèlement à eux-mêmes et posons  $x_i = X_i - X_p, y_i = Y_i - Y_p$ , ( $X_p, Y_p$ ) étant les coordonnées du  $n + 1^{\text{ème}}$  point considéré, on obtient

$$(56 \text{ bis}) \quad D X_p = \sum \lambda_i X_i \quad ; \quad D Y_p = \sum \lambda_i Y_i$$

Les  $\lambda$ , qui ont la même signification dans (56) et (56 bis), ont été désignés par Schlesinger sous le nom de *dépendances* et elles sont déterminées *sans ambiguïté* par les calculs relatifs à la méthode des moindres carrés.

Si  $x_p, y_p$  a sur C un correspondant  $x_p^c, y_p^c$ , les différences  $x_p^c - (x_p^c), y_p^c - (y_p^c)$  peuvent servir à déterminer les parallaxes stellaires, quand des clichés tels que P et C sont pris à des intervalles de six mois environ. C'est le principe de la méthode. L'originalité consiste en ce que le calcul des  $\lambda$  est préparé pour un cliché P et qu'il peut servir à le raccorder à plusieurs autres C pris à environ six mois d'intervalle, soit antérieurement, soit postérieurement à P. Il faut remarquer que la valeur du travail de Schlesinger tient à la dimension et aux qualités de l'instrument employé, à celles des mesures et à tous les détails très soigneusement étudiés en vue des réductions. *Il aurait obtenu les mêmes résultats avec la méthode des moindres carrés utilisée comme dans les cas ordinaires.*

\*  
\* \*

Si l'image  $(x_p, y_p)$  d'une planète ou d'une comète n'a pas de correspondante sur un cliché C d'un catalogue photographique, ou sur le cliché idéal auquel appartiennent les  $x^c, y^c$ , calculés pour les différentes étoiles de repère, on prend alors celle définie par les expressions (56), puis, par les constantes du cliché C, s'il y a lieu, et des calculs bien connus on obtient les coordonnées curvilignes, ascension droite et déclinaison. Il est bien clair que les expressions (56), que dorénavant nous désignerons sous le nom de *formules de Schlesinger* et *non de méthode de Schlesinger*, n'offrent plus, si elles sont envisagées à priori, la détermination précise et les avantages

d'automatisme et de mécanisme que procure l'emploi de la méthode des moindres carrés. Comme cette dernière est très longue, certains astronomes ont cherché, pour  $n > 3$ , à faire des hypothèses à priori relatives aux  $\lambda$  des expressions (56), qui possèdent  $n - 3$  paramètres arbitraires. L'échec a été constant. La question, très complexe, a été probablement abordée par Schlesinger, l'idée de généralisation se trouvant dans tous les esprits. Je n'en veux pour preuve que le fait qu'il a gardé pendant de nombreuses années après la publication de son travail sur les parallaxes stellaires, la solution pour  $n = 3$ , qui est unique et évidente. En résumé, dans le cas qui nous occupe, à savoir que  $x_p, y_p$ , n'a pas de correspondant sur  $C$ , on n'a pas pu, abstraction faite de la méthode des moindres carrés, sortir du cas de  $n = 3$ . Dans ce dernier, les différences d'auteur à auteur consistent seulement dans la façon dont on a formulé poids et dépendances et dont on a procédé au calcul. Il est certain qu'actuellement ce qu'il y a de plus rapide et de plus parfait est le procédé de M. LAGRULA. Mais il n'est pas susceptible de généralisation, ( $n > 3$ ). Nous verrons dans la suite que l'étude des enceintes nous permet, pour le cas où elle est triangulaire, d'obtenir une solution aussi rapide que celle de M. Lagrula, mais qui a l'avantage de pouvoir faire intervenir immédiatement, si cela est nécessaire, un nombre quelconque de nouvelles repères, rattachées à cette enceinte triangulaire.

Précisons encore le cas de  $n = 3$ . Si, dans  $P$ , on prend  $x_p, y_p$  comme origine de coordonnées, on a en abscisses d'une part  $C_1 = (x_p^c)$  et, d'autre part, les conditions (53) se réduisant à trois, l'élimination de  $A_1, B_1$ , sans faire intervenir la méthode des moindres carrés, est immédiate sous la forme d'un déterminant du troisième ordre, qui, développé, donne avec nos notations

$$(123) (x_p^c) = (23) x_1^c + (31) x_2^c + (12) x_3^c$$

et pareillement après changement de coordonnées dans  $P$

$$(123) X_p = (23) X_1 + (31) X_2 + (12) X_3$$

Ce sont les expressions employées par COMRIE, mais connues depuis très longtemps par tous ceux qui ont pratiqué le *calcul barycentrique de Möbius*.

Je conclus; l'idée bien tentante, malheureusement inféconde, d'éliminer les substitutions linéaires, considérées comme de simples intermédiaires et sans nécessité dans le cas d'un seul astre dont on cherche la position, n'a pu donner que des produits de condensation, expressions analytiques *parfaites au point de vue formel*, mais de puissance *d'investigation nulle*. Une comparaison fera bien comprendre ma pensée. On s'est donné une magnifique voiture automobile, mais privée de moteur. Ne pas s'étonner si elle ne marche pas.

## XII. — Des rapports de la méthode de distribution des triangles avec celle du calcul barycentrique de Möbius

Soient trois points non alignés formant un système de référence et auxquels on applique respectivement des poids  $m_1, m_2, m_3$ . Les expressions.

$$(57) \quad M_1 x_p = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 \quad ; \quad M_1 y_p = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$$

$$M_1 = m_1 + m_2 + m_3$$

définissent, d'après la *théorie des formes linéaires*, les coordonnées d'un *point multiple*, c'est-à-dire d'un barycentre affecté d'un poids  $M_1$ . Les quantités  $m_1, m_2, m_3$ , sont désignées sous le nom de coordonnées barycentriques.

Une propriété élémentaire, classique et bien connue, nous apprend que tout système de substitutions linéaires de déterminant non nul, appliquées aux points  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ , assure la permanence des formes (57) et que l'on a pour les points correspondants

$$(57 \text{ bis}) \quad M_1 x_p^c = m_1 x_1^c + m_2 x_2^c + m_3 x_3^c \quad ; \quad M_1 y_p^c = m_1 y_1^c + m_2 y_2^c + m_3 y_3^c$$

Cela posé, considérons non plus un seul triangle de référence, mais  $q$  systèmes de référence différents, (au plus deux points communs à certains triangles). On aura  $q$  barycentres,  $(x_1, y_1) \dots (x_q, y_q)$  affectés respectivement de poids  $M_1, M_2, \dots, M_q$ , qui conduisent, par le principe de composition appliqué dans le calcul barycentrique, à un barycentre unique, affecté d'une masse  $M$ .

$$M x_p = M_1 x_1 + \dots + M_q x_q \quad ; \quad M y_p = M_1 y_1 + \dots + M_q y_q$$

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_q$$

Si on met en évidence les sommets  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , des systèmes de références, on a

$$(58) \quad \lambda x_p = \sum \lambda_i x_i \quad ; \quad \lambda y_p = \sum \lambda_i y_i \quad \lambda = \sum \lambda_i = M_1 + M_2 + \dots + M_q$$

Appliquons les substitutions linéaires aux points  $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ , on obtient les  $\lambda$  ayant même signification de part et d'autre

$$(58 \text{ bis}) \quad \lambda x_p^c = \sum \lambda_i x_i^c \quad ; \quad \lambda y_p^c = \sum \lambda_i y_i$$

Nous voyons bien que  $\lambda = \sum \lambda_i$  est une condition suffisante de la permanence opératoire, puisqu'elle a lieu pour chacun des triangles de référence employés. Dans mon mémoire **I**, j'avais laissé au lecteur le soin de démontrer que la condition est nécessaire, résultat tout à fait simple. Mon travail étant très chargé, je réserverai encore la démonstration (1).

Inversement, si le point  $x_p, y_p$ , est choisi à priori, les relations (57) linéaires en  $m_1, m_2, m_3$ , définissent les poids comme des quantités proportionnelles aux aires (23), (31), (12). Dans le cas d'un seul triangle, ce coefficient peut être fait égal à un. Ce sont des propriétés connues depuis 105 années. (Calcul Barycentrique, MÖBIUS, 1927).

\*  
\* \*

Un cas extrêmement intéressant pour nous est celui où nous avons plusieurs triangles et où le point choisi,  $x_p, y_p$  reste le même pour tous les  $q$  systèmes de référence dans le plan  $P$ , car les  $q$  barycentres susdits sont les mêmes, mais affectés de masses différentes. Dans chaque plan, nous conservons le calcul barycentrique de MÖBIUS, mais avec une différence manifeste et profonde. Dans  $P$ , un barycentre unique, dans  $C$  un barycentre variable avec le choix des coefficients car il ne faut pas oublier que pour établir nos formules nous avons *postulé l'existence* d'un système de substitutions linéaires et que dans la *pratique cela n'a pas lieu*.

L'équivalence entre le calcul barycentrique et le travail de notre premier mémoire est manifeste. Nous nous y sommes placé à un certain point de vue synthétique et nous avons montré qu'à des quantités identiquement nulles dans  $P$ , correspondaient dans  $C$  des formes linéaires (2) avec lesquelles nous avons résolu nos différentes questions posées.

Le lecteur n'aura qu'à se reporter à notre mémoire, en particulier aux relations (6) et (7), aux expressions (8) et (9) pour le calcul des  $\lambda$  et, dans le plan  $C$ , à celles (20), (21) et (22). Il remarquera que le principe de

(1) Dans mon mémoire **I**, j'ai particulièrement insisté sur la nécessité de considérer les  $\lambda$ , comme effectués, ou comme donnés à priori, sans faire intervenir leur *structure*. Dans la note de M. GONNESSIAT (J. O., juillet 1931, page 97) je constate qu'il a appliqué les transformations ponctuelles aux *masses* et non aux *points*, aussi ses conclusions me paraissent-elles inexactes.

(2) Remarquons que les résidus de groupes, qui seraient identiquement nuls s'il existait réellement un système de substitutions linéaires pour le passage d'un plan à l'autre, correspondent à des identités dans  $P$  que l'on trouve dans **I**, sous les expressions (13 bis), (23), (29) et qui englobent l'identité classique (5). Les identités et les résidus de groupes correspondants sont nécessaires pour une étude approfondie.

composition qui y est introduit n'est pas autre chose que celui qui régit le calcul barycentrique et que toutes les erreurs, qui n'interviennent pas dans  $P$  et qui s'accumulent dans  $C$  en résidus de groupes, ne sont pas autre chose, sous une forme approfondie, que les propriétés des barycentres ci-dessus nommés.

Le résidu de groupe est une *notion nouvelle*. J'ai eu le soin de m'assurer qu'elle n'avait pas été introduite déjà dans « *le calcul géométrique* » où l'on fait une étude spéciale des formes linéaires. C'est que la géométrie pure, science idéale, n'admet aucune erreur possible sur les positions relatives des points (un seul barycentre dans  $C$ ). Nous avons donc dans ce plan un mode tout particulier de calcul barycentrique et nous devons nous estimer heureux de n'avoir affaire ici qu'à des théorèmes d'addition de formes linéaires.

Pour arriver à de bonnes solutions de la question, nous avons jugé nécessaire d'opérer ainsi : 1° l'existence d'un seul système de substitutions linéaires n'ayant pas lieu, rétablir le moteur, contrairement au mode opératoire de Schlesinger et de ses adeptes, c'est-à-dire faire une étude des substitutions et de leur composition ; 2° le calcul barycentrique ordinaire ayant la propriété remarquable de donner par la composition des formes linéaires des solutions extrêmement plus rapides et plus élégantes que par les méthodes ordinaires, rechercher les relations géométriques qui peuvent relier les deux plans  $P$  et  $C$  et cela par l'étude des formes bilinéaires.

### XIII. — Composition des substitutions linéaires. — Résidus de représentation

Cette importante question a déjà été étudiée dans mon mémoire **I**, relations (29), (30) et (31 bis). C'est volontairement que je n'ai pas écrit alors les quatre mots « *composition des substitutions linéaires*<sup>(1)</sup> ». Nous conservons les notions si souvent employées dans **I**. Soient trois points non alignés,  $i, j, k$ , faisant partie du groupe de nos points donnés sur  $P$  ;  $l$  un quatrième point appartenant ou non au groupe. A notre identité, **I** (29), à savoir

$$(29) \quad (jkl)x_i - (kli)x_j + (lij)x_k - (ijk)x_l = 0,$$

nous faisons correspondre par la permanence des formes opératoires, la solution en abscisses, **I**, (30).

$$(30) \quad (jkl)x_i^c - (kli)x_j^c + (lij)x_k^c - (ijk)x_l^c = 0$$

Ce qui est absolument permis, car nous n'avons qu'un seul triangle de référence  $ijk$  et que les quatre points de  $C$  correspondent respectivement à ceux de  $P$  par des expressions de la forme (57) ou (57 bis), ou par celles équivalentes données dans **I**.

Remarquant que les aires  $(jkl)$ ,  $(kli)$ ,  $(lij)$  (voir leur expressions analytiques dans **I**) sont, une fois explicitées, linéaires par rapport à  $x_l, y_l$ , on voit que (30) représente la substitution linéaire donnant  $x_l^c$  en fonction de  $x_l, y_l$  et relative au triangle  $ijk$ . Résultat analogue pour  $y_l^c$ . Ces substitutions sont donc exprimées sous une forme condensée bien simple.

Particularisons la valeur de  $l$  : 1°  $l = 0$ ,  $x_l = y_l = 0$ , c'est-à-dire que l'on a dans  $P$  la planète ou comète, ou astre quelconque que nous voulons observer. Avec nos notations antérieures le point correspondant dans  $C$  est  $x_p^c, y_p^c$  et l'on a en abscisses, la relation que nous connaissons bien,  $(ijk)x_p^c = (jk)x_i^c + (ki)x_j^c + (ij)x_k^c$ .

Si, au contraire, on prend un sommet  $l = i, j, k$ , on obtient respectivement les solutions  $x_i^c, x_j^c, x_k^c$ . La correspondance est donc parfaitement établie.

Cela posé, passons à un nombre quelconque de triangles. Sans spécifier les abscisses et ordonnées, désignons par  $\zeta_i$  le résidu  $R_{ix}$  ou  $R_{iy}$  qui est en étude et par  $(\zeta_i)$  la quantité  $x_i^c + l_p - x_l$  ou  $y_i^c + m_p - y_l$ . Nous allons voir plus bas la raison de cette parenthèse. C'est ici l'occasion, pour éviter toute confusion dans l'esprit du lecteur, de faire un léger rappel. Nous avons désigné *par résidus simples*, ou plus brièvement *par résidus*, les quantités  $R_{ix}, R_{iy}$ , qui sont numériquement peu considérables et sur lesquels il est facile de travailler avec la

(1) J'étais alors en plein travail de recherches et j'avais de bonnes raisons pour ne pas attirer l'attention à ce sujet.

table de *Crelle*, et nous sommes arrivés à ce but par l'introduction appropriée d'une translation dont les composantes sont  $l_p$  et  $m_p$ . Nous avons également les *résidus de groupe* (se rapporter à **I**) et nous allons rencontrer les *résidus de représentation*.

Multiplions, comme c'est indiqué dans **I**, tous les premiers membres des relations (30 bis) respectivement par  $C(ijk)$ , composons et nous avons pour la substitution linéaire résultante

$$(59) \quad (\zeta_l) \Sigma C(ijk)(ijk) = \Sigma C(ijk) [(jkl)\zeta_i - (kli)\zeta_j + (lij)\zeta_k]$$

Explicitons au second membre, la parenthèse sous le signe  $\Sigma$ . Décomposons  $(jkl)$ ,  $(kli)$ ,  $(lij)$  au moyen des relations **I**(4), on obtient pour la parenthèse

$$(jkl)\zeta_i + (kli)\zeta_j + (lij)\zeta_k - [(lk) + (jl)]\zeta_i - [(li) + (kl)]\zeta_j - [(lj) + (il)]\zeta_k$$

Désignons par  $S(ijk)$ , la solution  $x_p^c + l_p$  ou  $y_p^c + m_p$  ( $x_l = y_l = 0$ ), relative, dans le triangle unique  $ijk$ , à la planète ou à l'astre à observer<sup>(1)</sup>. La somme des trois premiers termes dans l'expression analytique est justement  $(ijk)S(ijk)$ . Désignons de même par  $S$  la solution relative à l'origine ( $x_l = y_l = 0$ ) dans la distribution de tous les triangles envisagés et qui est donnée par les formules **I**(22), avec  $\lambda = \Sigma C(ijk)(ijk)$ . En vertu du principe de composition (calcul barycentrique) nous avons

$$(59 \text{ bis}) \quad \lambda(\zeta_l) = \Sigma C(ijk)(ijk)S(ijk) - \Sigma C(ijk) \{ [(lk) + (jl)]\zeta_i + [(li) + (kl)]\zeta_j + [(lj) + (il)]\zeta_k \} \\ = \lambda S - \Sigma C(ijk) \{ [(lk) + (jl)]\zeta_i + [(li) + (kl)]\zeta_j + [(lj) + (il)]\zeta_k \}$$

Ces relations vont jouer un rôle extrêmement important dans l'étude de certaines formes symétriques avec un choix convenable des coefficients  $C$ . Nous expliciterons plus loin, en temps utile, les coordonnées courantes  $x_l, y_l$  dans (59 bis).

Le lecteur sera peut-être étonné à l'aspect de ses expressions analytiques dans lesquelles il y a un enchevêtrement extraordinaire de quantités, ce qui laisse supposer inextricable la mise en nombres. Patience, le tout s'harmonisera simplement, grâce à une analyse mathématique étudiée et appropriée.

\* \* \*

Une notion importante est celle de *résidu de représentation*, pour une étoile de repère déterminée, c'est à-dire la différence entre une des coordonnées de cette étoile et la coordonnée correspondante calculée au moyen des substitutions linéaires, soit par la forme (59), soit par la forme (59 bis). Si  $l$  est alors l'indice d'une repère  $x_l^c, y_l^c$  sur  $C$ , les relations (59) ou (59 bis) ne donneront pas  $x_l^c + l_p - x_l$ , ou  $y_l^c + m_p - y_l$ , mais des quantités voisines  $(x_l^c) + l_p - x_l$ , ou  $(y_l^c) + m_p - y_l$ , de sorte que le résidu de représentation  $\zeta_l - (\zeta_l)$  sera  $x_l^c - (x_l^c)$  ou  $y_p^c - (y_p^c)$  suivant les  $\zeta$  choisis<sup>(2)</sup>. Nous réservons pour plus tard l'utilisation de la formule (59 bis), quand nous aurons développé certains résultats géométriques intéressants et nous verrons qu'elle se prête admirablement bien *dans la pratique* à l'étude des résidus de représentation. Envisageons alors l'expression (59), nous avons

$$[\zeta_l - (\zeta_l)] \Sigma C(ijk)(ijk) = - \Sigma C(ijk) [(jkl)\zeta_i - (kli)\zeta_j + (lij)\zeta_k - (ijk)\zeta_l]$$

et d'après la définition des résidus de groupe

$$(60) \quad \lambda [\zeta_l - (\zeta_l)] = - \Sigma C(ijk) G(ijkl)$$

(1) Dans un cliché standard de catalogue, la planète, ou astre à observer, est remplacée simplement par l'origine de coordonnées dans le plan  $P$ .

(2) Nous avons déjà acquis pour définir les résidus de groupe, **I**, (25) et (26) une idée de la notion de résidu de représentation.

*Formule extrêmement remarquable*, qui montre, étant donné la signification analytique de  $\lambda$ , que les résidus de groupe sont également assujettis aux lois de la composition qui fixe en conséquence les résidus de représentation. Dans la pratique, ces résidus ne sont pas tous nuls et c'est pourquoi nous avons mis un  $\zeta$  entre parenthèses pour ne pas le confondre avec le  $\zeta$  correspondant qui est une donnée de l'étoile de repère. Dans le cas d'un triangle unique, les résidus de représentation sont tous nuls et la représentation est parfaite ; c'est ce qui résulte d'une étude ci-dessus pour le triangle.

Nous avons montré dans **I** que les résidus de groupe  $G(i j k l)$  restent *intrinsèques pour toutes les translations*. Il en est de même pour tous les résidus de représentation, qui ne dépendent en aucune façon du choix de l'origine de coordonnées. *Le raccordement des deux clichés P et C ne dépend donc que du choix des étoiles de repère et de celui des coefficients  $C(i j k)$  et en aucune façon de la position d'un astre qu'on relie à ces étoiles.*

Avant de passer à quelques applications, indiquons les propriétés suivantes des résidus de groupe que le lecteur démontrera facilement en utilisant les expressions analytiques.

1°  $G(i j k l)$  est nul lorsque deux indices sont égaux ;

2° Le résidu de groupe change ou non de signe que le nombre des permutations effectuées sur les indices est impair ou pair. Résultat analogue à celui que l'on a dans les déterminants.

*Application (a). Sur la méthode des moindres carrés.*

Sans spécifier abscisses et ordonnées, désignons par  $C, A, B$ , les valeurs des coefficients d'une substitution linéaire, *qui résultent de la résolution du système normal*. Avec nos notations, on a

$$(61) \quad (\zeta_l) = C + A x_l + B y_l \quad ; \quad \zeta_l - (\zeta_l) = \zeta_l - C - A x_l - B y_l$$

Dans la seconde relation (61), faisons successivement  $l = 1, 2, \dots, n$  et ajoutons.

Puis multiplions  $\zeta_l - (\zeta_l)$  par  $x_l$ , faisons successivement  $l = 1, 2, \dots, n$  et ajoutons.

Enfin, multiplions  $\zeta_l - (\zeta_l)$  par  $y_l$ , donnons successivement à  $l$  les valeurs  $1, 2, \dots, n$  et ajoutons.

Nous obtenons

$$(62) \quad \begin{cases} \sum_{l=1}^{l=n} [\zeta_l - (\zeta_l)] = \sum \zeta_l - n C - A \sum x_l - B \sum y_l \\ \sum [\zeta_l - (\zeta_l)] x_l = \sum \zeta_l x_l - C \sum x_l - A \sum x_l^2 - B \sum x_l y_l \\ \sum [\zeta_l - (\zeta_l)] y_l = \sum \zeta_l y_l - C \sum y_l - A \sum x_l y_l - B \sum y_l^2 \end{cases}$$

D'après le système normal, les seconds membres de nos relations (62) sont nuls et l'on a

$$(63) \quad \sum_{l=1}^n [\zeta_l - (\zeta_l)] = 0 \quad ; \quad \sum_{l=1}^n [\zeta_l - (\zeta_l)] x_l = 0 \quad ; \quad \sum_{l=1}^n [\zeta_l - (\zeta_l)] y_l = 0$$

Nous voyons d'abord avec la première de ces trois relations que la somme des résidus de représentation est nulle. Mais il y a un autre résultat important. Remarquons que, d'après la théorie des équations linéaires, la solution du système normal est unique. En conséquence si, par un procédé quelconque sans passer par la résolution de ce système normal, on trouve des coefficients  $C, A, B$ , d'une substitution linéaire, tels que les relations (63) soient satisfaites, on aura la solution cherchée. Les coefficients dans la relation (59) satisfont aux conditions susdites, si l'on fait  $C(i j k) = (i j k)$  et si l'on envisage tous les triangles au nombre de  $N = n(n-1)(n-2):6$ , que l'on peut former avec les  $n$  points de repère. Mais nous n'avons nullement besoin d'explicitier ces coefficients et nous utiliserons seulement la relation (60). Par conséquent, nous devons démontrer que

$$(64) \quad \sum_{l=1}^n \sum_{ijk} (i j k) G(i j k l) = 0 \quad ; \quad \sum_{l=1}^n \sum_{ijk} (i j k) x_l G(i j k l) = 0 \quad ; \quad \sum_{l=1}^n \sum_{ijk} (i j k) y_l G(i j k l) = 0$$

(1) Dans le calcul géométrique, une forme linéaire dont la somme des masses n'est pas nulle, représente un point multiplié c'est-à-dire un barycentre affecté de la somme des masses. Quand la somme des masses est nulle, on a un vecteur. (HAMILTON, *Calcul des quaternions*). Les résidus de groupe étant des formes linéaires de masse nulle sont donc des vecteurs.

Les triangles où  $l$  n'entre pas comme sommet sont au nombre de  $N_1 = (n-1)(n-2)(n-3) : 6 = N - N_2$ ,  $N_2$  désignant le nombre de triangles qui possèdent  $l$  comme sommet et qui est égal à  $(n-1)(n-2) : 2$ ; (combinaisons de  $n-1$  objets deux à deux). En mettant encore en évidence un sommet  $i$ ,  $N_2$  se décompose en  $n-2$  triangles de sommets  $i, l$  et en  $(n-2)(n-3) : 2$  autres. Alors les résidus de groupe où entre  $l$  s'obtiennent ainsi. En se raccordant à chacun des triangles de l'ensemble  $N_1$ , le point  $l$  donne  $N_1$  résidus de groupe. Le point  $i$  en raccordement avec les  $N_2$  triangles, donne d'abord  $n-2$  résidus de groupe nuls, car ils ont deux sommets communs, et en  $(n-2)(n-3) : 2$  autres. Comme nous disposons de  $n-1$  points tels que  $i$ , nous avons un nombre de nouveaux résidus de groupe contenant  $l$ , égal à  $(n-1)(n-2)(n-3) : 2 = 3 N_1$ , résidus qui n'ont pas deux points communs. Alors, soient quatre points déterminés  $ijkl$ ; ils donneront par permutations quatre résidus de groupe s'obtenant ainsi :  $l$  est en raccord avec le triangle  $ijk$ ;  $i$  avec le triangle  $jkl$ ;  $j$  avec le triangle  $kli$ ;  $k$  avec le triangle  $lij$ , comme cela ressort des premiers membres de (64). La part contributive à ces quatre triangles dans la première de nos relations (64) est

$$(ijk) G(ijkl) + (jkl) G(jkli) + (kli) G(klij) + (lij) G(lijk) \\ = [(ijk) - (jkl) + (kli) - (lij)] G(ijkl)$$

La parenthèse est nulle d'après notre étude sur le quadrilatère, **I**, (14). Donc, par groupements de quatre, les résidus de groupe contenant  $l$  disparaissent. Nous sommes ramenés au cas de  $(n-1)$  points. En opérant de proche en proche, on arrive à un quadrilatère pour lequel la propriété est évidente. Pour les deux dernières relations (64) et par un travail analogue, le coefficient de  $G(ijkl)$  en obscisses est  $(ijk)x_l - (jkl)x_i + (kli)x_j - (lij)x_k$ , qui est identiquement nul d'après notre identité **I** (13 bis), que nous retrouvons constamment. Même propriété en ordonnées, et la démonstration s'achève ensuite comme précédemment.

**Théorème I.** — *Dans le raccordement photographique de  $P$  et  $C$ , la méthode des moindres carrés, donne des résidus de représentation dont la somme est nulle, et elle est équivalente à la distribution des  $n(n-1)(n-2) : 6$  triangles, avec les coefficients,  $C(ijk) = (ijk)$ .*

Tout au début de mes recherches sur les distributions de triangles, je me suis attaqué à l'expression (55), en décomposant le numérateur  $N$  et le dénominateur  $D$ , de façon à mettre en évidence la distribution des  $n(n-1)(n-2) : 6$  triangles avec  $C(ijk) = (ijk)$ . Le procédé, quoique très compliqué, permet d'affirmer l'existence du théorème, démontré plus haut d'une façon simple. Je l'utiliserai pour un travail ultérieur sur la question de triangles dépendants et indépendants

**Application (b).** — Considérons un quadrilatère convexe 12341, orienté positivement. Nous avons quatre triangles 123, 234, 341, 412 auxquels nous faisons correspondre des coefficients  $C(ijk)$  égaux à l'unité. La valeur de  $\lambda$  est  $(123) + (234) + (341) + (412) = 2T$ , d'après **I** (14 bis);  $T$  est le total du quadrilatère. D'après (60) les résidus de représentation sont

$$(65) \quad \frac{G(1234)}{2T} = \zeta_1 - (\zeta_1) = -[\zeta_2 - (\zeta_2)] = \zeta_3 - (\zeta_3) = -[\zeta_4 - (\zeta_4)]$$

*La somme des résidus de représentation est nulle.*

Si on prend la moyenne des valeurs absolues des résidus, on obtient  $\frac{[G(1234)]}{2T}$ , qui peut être considérée comme une valeur de la précision et qui concorde absolument avec celle donnée dans **I**, en faisant intervenir sous la forme (33), la composition de (31) et (32).

**Application (c).** — Considérons encore l'enceinte de l'exemple précédent et introduisons une cinquième étoile. Prenons dans **I** la distribution qui a conduit à la solution (35). *Appliquons cette distribution, en faisant successivement  $q = 1, 2, 3, 4, 5$ .* On obtient d'abord les triangles de l'exemple précédent, mais comptés deux fois

et ensuite les triangles 125, 235, 345, 415, dont la somme des doubles des aires donne simplement  $T$ , tandis que pour le double des aires des huit triangles qui précèdent on a  $4T$ . En conservant nos notations de **I** (40), on obtient

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_5T[\zeta_1 - (\zeta_1)] = 2G_5 - G_2 - G_4 \quad ; \quad {}_5T[\zeta_2 - (\zeta_2)] = -2G_5 + G_1 + G_3 \\ {}_5T[\zeta_3 - (\zeta_3)] = +2G_5 - G_2 - G_4 \quad ; \quad {}_5T[\zeta_4 - (\zeta_4)] = -2G_5 + G_1 + G_3 \\ {}_5T[\zeta_5 - (\zeta_5)] = -2G_1 + 2G_2 - 2G_3 + 2G_4 \end{array} \right.$$

*La somme des résidus de représentation est nulle.*

**Application (d).** -- Considérons maintenant l'exemple **I**, n° VIII et intitulé :  $n = 5$ , *l'enceinte correspondant à un quadrilatère convexe*. Nous avons bien utilisé la distribution **I** (35), relative au point 5, mais nous n'avons pas opéré ainsi pour les sommets du quadrilatère, et avons employé les quatre triangles 123, 234, 341, 412, chacun employé une seule fois, tandis que dans l'exemple (c), ils étaient respectivement employés deux fois. Voici le résultat pour l'exemple (d)

$$\begin{aligned} {}_3T[\zeta_1 - (\zeta_1)] &= G_5 - G_2 - G_4 \quad ; \quad {}_3T[\zeta_2 - (\zeta_2)] = -G_5 + G_1 + G_3 \\ {}_3T[\zeta_3 - (\zeta_3)] &= G_5 - G_2 - G_4 \quad ; \quad {}_3T[\zeta_4 - (\zeta_4)] = -G_5 + G_1 + G_3 \\ {}_3T[\zeta_5 - (\zeta_5)] &= -G_1 + G_2 - G_3 + G_4 \end{aligned}$$

*La somme des résidus de représentation n'est pas nulle.* Il ne faut pas s'étonner de cette différence de résultats. Effectivement, dans **I**, remarque (c), j'ai dit qu'il était possible, lorsque l'on compose des formes symétriques, d'employer des coefficients arbitraires  $D$ , ainsi que nous l'avons fait avec les  $C(ijk)$  dans la distribution des triangles. Je savais parfaitement à cette époque où devaient tendre mes efforts, mais je n'avais *aucun critère* pour le choix des coefficients  $D$ . Nous apprendrons, dans la suite, comment il faut opérer avec les formes **I** (35) pour obtenir des résidus de représentation dont la somme est nulle. Nous serons conduit à modifier l'expression **I** (51) et, lorsque l'enceinte est triangulaire, celle **I** (38).

\* \* \*

Nous allons terminer ce numéro par quelques remarques. Le nombre de triangles employés implicitement par la méthode des moindres carrés, peut être considérable et je constate, pour un cliché photographique de la zone de Paris, dont certaines étoiles m'ont été nécessaires pour une réduction, le nombre 23 ce qui fixe à 1771 celui des triangles. Dans une zone riche, il n'est pas anormal de prendre une trentaine d'étoiles, et pour ce nombre on a 4060 triangles. Quel temps faudrait-il employer s'il était nécessaire de les classer? La méthode des moindres carrés est donc essentiellement automatique et économique et l'on ne peut qu'admirer la perfection de sa technique. De plus, elle permet, surtout pour un cliché standard de catalogue, de déterminer au moyen du système résultant de la composition automatique des substitutions linéaires, de déterminer, disons nous, la position d'un astre quelconque, sans se limiter, comme font certains auteurs, à une zone étroite dans le voisinage du centre de gravité des étoiles, ce qui n'est qu'un procédé de *fortune* parce que l'on ignore tout de la composition des substitutions.

Elle a un défaut, celui d'être un peu pénible. Remarquons que beaucoup de triangles, que la méthode utilise implicitement, n'offrent aucune utilité, quand les aires  $(ijk)$  sont trop faibles. D'autre part, les grands triangles, par la présence de forts coefficients, prennent une prédominance trop considérable, surtout qu'ils correspondent en général aux images moins bonnes d'étoiles. Alors les désidérata pour une autre méthode type sont les suivants. *Elle doit faire intervenir pour  $n$  étoiles de repère, une distribution de triangles en nombre beaucoup moins considérable que par la méthode des moindres carrés, posséder un automatisme, à la vérité plus conscient et réfléchi, mais aussi plus rapide d'exécution. Elle ne doit pas se limiter à une zone étroite dans le voisinage du centre de gravité des étoiles de repère et enfin, comme conséquence d'une bonne étude théorique, ne pas faire intervenir le classement des triangles.* On verra dans la suite comment elle se réalise.

#### XIV. -- Quelques réflexions sur la puissance d'investigation de certaines expressions analytiques

La méthode des moindres carrés, d'une perfection technique si complète, ne possède aucune puissance d'investigation. En effet, elle est la conséquence naturelle d'idées et de conceptions dans un domaine scientifique où il entre une grande part de *subjectivisme* et qui n'a et ne peut avoir aucun rapport avec les liaisons géométriques, *essentiellement objectives*, qui existent entre les points correspondants de nos plans. Bien industrialisée et accomplissant mécaniquement une besogne pour laquelle elle est admirablement créée, elle s'élimine d'elle-même pour les recherches que nous avons entreprises. Il en est de même des formules de Schlesinger qui masquent des propriétés géométriques bien déterminées et à mettre en évidence et qu'une intrusion à priori de valeurs numériques ne peut faire découvrir. On m'a objecté qu'en elles *tout était bien renfermé* ; évidemment, mais il faut en faire sortir le contenu. J'ai indiqué qu'il était impossible de donner à priori les expressions des différents poids qui se trouvent dans mon mémoire **I**.

Une étude attentive avec mise en nombres, montre que les calculs en sont trop longs et il en est de même pour d'autres expressions. Il est alors bon de faire appel aux *équivalences analytiques*. Prenons un exemple précis. L'expression (60) est *belle* pour tous ceux qui ont le sens esthétique ; l'équivalente (59 bis) est vilaine. Or, la première qui a une grande puissance d'investigation dont j'ai pu tirer un bon parti, est mauvaise pour la pratique et la mise en nombres. Le résidu de groupe est une forme linéaire contenant quatre  $\zeta$  différents, respectivement multipliés par des aires  $(ijk)$  qu'il faut décomposer ensuite en trois parties et calculer. Le résidu effectué, il faut le multiplier par  $C(ijk)$  (on voit déjà l'importance des coefficients égaux à un) et faire la somme des résultats obtenus avec tous les résidus de groupe que comporte la formule (60) et qui sont nombreux dès que le nombre de repères dépasse quatre. Au contraire, la formule (59 bis), qui possède une assez bonne puissance d'investigation, mais considérablement moindre que celle de (60), se prête admirablement au calcul numérique, ainsi que nous le verrons.

Lorsque l'on en est aux recherches analytiques proprement dites, c'est à l'expression la plus puissante en investigations qu'il faut s'adresser, sans s'occuper momentanément de la pratique, en mettant en évidence une ou plusieurs propriétés nouvelles qui servent pour une synthèse appropriée ou qui se rattachent à d'autres éléments d'investigation, et ainsi de proche en proche par synthèses successives. Les formules de Schlesinger ne peuvent me convenir ; je prends une équivalence supérieure, d'où méthode de la distribution des triangles, composition des substitutions linéaires, résidus de représentation. La propriété nouvelle cherchée est celle-ci. *Quelle est la forme symétrique qui, pour une enceinte polygonale fermée, donne, comme pour le cas du quadrilatère, une représentation dont la somme des résidus est nulle ?*

Dans le cas du pentagone, il y a deux formes symétriques simples qui jouissent de la propriété ci dessus énoncée. C'est-ce qui m'a un peu retardé comme synthèse, car je ne pensais pas tout d'abord dépasser  $n = 5$ . Mais quand  $n$  est plus grand il n'en est pas ainsi. *On trouve que la seule combinaison de formes simples possible est précisément la distribution donnée par **I** (35)*. De plus, on arrive à ce résultat inattendu, mais qui, à la réflexion, est naturel ; *La solution cherchée est une combinaison linéaire des solutions que donne la distribution **I** (35), appliquée non seulement à notre enceinte, mais encore à ses lignes polygonales étoilées.*

Comme dans les polygones réguliers, j'appelle *lignes polygonales étoilées* celles qui sont obtenues en joignant les sommets de notre enceinte, de deux en deux, puis de trois en trois, et ainsi de suite. L'expression analytique utilisée est (60).

La condition nécessaire ci-dessus énoncée exige une démonstration analytique qui, placée ici, alourdirait notre travail déjà chargé. Nous la réservons pour un mémoire ultérieur. Nous allons établir la condition suffisante et nous utiliserons la forme (59 bis).

(A suivre)

(Observatoire d'Alger)

# Observations d'Étoiles de comparaison d'Eros au Grand Cercle Méridien Gautier de l'Observatoire d'Alger (19 cm)

par MM. SCHMITT, VESSELOVSKY et NICOLINI

*Programme.* — On a observé 65 étoiles de comparaison d'Eros du 1<sup>er</sup> ordre de la liste complémentaire (3<sup>e</sup> partie) publiée dans *A N* 5756. Pour rattacher ces étoiles aux étoiles de la 1<sup>re</sup> et de la 2<sup>e</sup> partie (*A N* 244 n° 5275 et 226 n° 5403) on a observé 34 étoiles de la 2<sup>e</sup> liste.

*Observations.* — Elles ont été faites au Grand Cercle Méridien Gautier (micromètre impersonnel) du mois de Janvier au mois de Mai 1931. Il y a eu 29 soirées d'observation. En moyenne on a observé une douzaine de fondamentales 6 au début, 6 à la fin de chaque soirée, ces fondamentales encadrant une quinzaine d'étoiles du programme. Les observateurs étaient MM. Schmitt au micromètre, Nicolini au cercle Ouest et Vesselovsky au cercle Est. Chaque observation comportait 20 pointés en ascension droite faits symétriquement par rapport au méridien et enregistrés par le chronographe imprimant Gautier, 10 pointés en déclinaison au voisinage du méridien, et la lecture de 6 microscopes à chaque cercle. Les fondamentales ont été observées avec réseaux pour réduire leur grandeur à 8,5 . Les constantes ont été déterminées uniquement par des observations du Nadir au début et à la fin de chaque soirée.

*Réductions.* — Les réductions en ascension droite ont été faites par M. Nicolini. On a employé, comme d'habitude, la formule de Bessel, le  $C_p$  fourni par les fondamentales étant appliqué aux temps de passage des étoiles d'Eros pour en déduire leurs ascensions droites.

Les réductions en déclinaison ont été faites par M. Vesselovsky on a employé le procédé de la collimation équatoriale. Soit  $\pm l$  (+ en P D, — en P I) la lecture à la vis du micromètre,  $\delta$  la déclinaison de l'étoile,  $L_o$  la moyenne des lectures des deux cercles corrigées des erreurs de division des cercles et du tour de vis des microscopes.  $R$  la réfraction (affectée du signe + au sud du zénith, du signe — au nord). Posons  $L = L_o \pm l + R$  et formons  $L + \delta$ , c'est une quantité sensiblement constante dont les variations dépendent surtout de la flexion, des erreurs de division des cercles et de la réfraction mal déterminée.

Portons en abscisses  $L$  et en ordonnées  $L + \delta$  et traçons, au mieux, une courbe à travers les points correspondant à ces coordonnées. Ces valeurs de  $L$  et de  $L + \delta$  sont données par les fondamentales.

Pour déterminer la déclinaison d'une étoile d'Eros on calcule d'abord la valeur de  $L$  correspondant à cette étoile. Il faut remarquer que cette valeur de  $L$  ne peut être calculée qu'en se servant d'une valeur de  $R$  correspondant à une déclinaison approchée de l'étoile donnée par les *A N*: mais les différences constatées pour  $R$  ne sont pas, dans notre cas, supérieures à 0'' 03. On prend ensuite sur la courbe la valeur de  $L + \delta$  et on fait la différence  $(L + \delta) - L = \delta$ .

Les courbes affectaient sensiblement la même forme en P I et en P D. Il serait intéressant de les étudier au point de vue de la flexion.

Pour la réduction à 1930,0 on avait d'abord calculé pour chaque étoile les constantes de Bessel. Quelques réductions ont été faites par ce procédé, mais plus tard, lorsque ces tables ont été publiées, on a fait usage des tables données par le *Nautical Almanac Office* dans les *A N*.

Cette réduction a été faite par M. Schmitt ainsi que la détermination des constantes. La constante  $n$  a été déterminée uniquement par le procédé graphique.

Le R I a discuté les positions données par l'Observatoire d'Alger, il les a réduites à un système indépendant des étoiles de repère d'Eros. La précision moyenne d'une position est pour Alger :

| $\Delta \alpha$ | $n$   | $\Delta \delta$ | $n$   |
|-----------------|-------|-----------------|-------|
| $\pm 0^s,028$   | 1 — 3 | $\pm 0'',34$    | 1 — 2 |
| $\pm 0^s,022$   | 4 — 6 | $\pm 0'',26$    | 3 — 6 |