1929MmSAI...4..425S

TEORIA GENERALE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE DELL'ELLISSOIDE DI ROTAZIONE

Memoria del Prof. CARLO SOMIGLIANA

SOMMARIO. — In questa Memoria sono esposti i fondamenti della teoria del campo gravitazionale determinato da un geoide che abbia la forma di un ellissoide di rotazione. Essa è fondata sulle ricerche del Prof. Pizzetti in questo argomento, le completa e le coordina coi risultati a cui l'autore è arrivato in recenti studi.

La teoria viene così ridotta a forma semplice ed adatta per la sua applicazione alle quistioni pratiche della gravimetria sperimentale. In particolare viene discussa la quistione della definizione della cosidetta « gravità normale » e vengono proposte formole che la risolvono teoricamente, senza notevoli deviazioni da quelle attualmente in uso.

Questa memoria ha per oggetto un'esposizione completa della teoria del campo gravitazionale appartenente ad un ellissoide di rotazione, supposto ruotante uniformemente intorno al suo asse minore ed ammettendo che la sua superficie sia una superficie equipotenziale. Nella soluzione del problema seguirò i principi che sono stati stabiliti dal prof. Paolo Pizzetti, cercando cioè la soluzione in termini finiti, ossia mediante funzioni che sono analiticamente definite in modo completo. Questi procedimenti offrono, rispetto alle soluzioni per serie, più generalmente usate, il vantaggio di mettere in evidenza le proprietà analitiche delle soluzioni ottenute, che restano invece in certo modo nascoste, quando si usano per rappresentarle soltanto sviluppi per serie. Il passaggio dalle soluzioni finite agli sviluppi in serie, più comodi pei calcoli numerici, si fa poi con facilità coi soliti metodi.

La nostra esposizione non ha quindi per scopo di rappresentare il campo gravitazionale terrestre, quale esso è nella sua realtà fisica, ma di rappresentare un campo ideale, che gode perciò la proprietà di essere meccanicamente e geometricamente perfettamente definito.

Ci sembra che questo sia il primo passo che conviene fare per arrivare poi alla rappresentazione del campo gravitazionale reale. Costruire cioè un modello completo ed esatto, col quale in seguito i dati d'osservazione possono essere confrontati. E poichè effettivamente il campo gravitazionale della terra

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

differisce assai poco dal campo gravitazionale di un ellissoide di rotazione, è chiaro che appunto nella conoscenza di tali eventuali deviazioni consiste il modo migliore, e forse l'unico praticamente utile, per formarci un'idea chiara di ciò che è nel fatto il campo terrestre.

La teoria del campo gravitazionale ellissoidico ha avuto uno sviluppo assai lento. Risale al 1738 la Memoria classica nella quale Clairaut, in base ad ipotesi che poi apparvero superflue, stabiliva la sua famosa relazione, che fino ai giorni nostri fu considerata come il legame fondamentale fra i valori della gravità e le costanti dell'ellissoide terrestre. Più di un secolo dopo, nel 1849, Stokes dimostrava l'indipendenza del campo esterno della gravità dalla legge di distribuzione della massa nell'interno dell'ellissoide e la possibilità di una determinazione completa del campo esterno, quando fossero note la massa totale e le lunghezze degli assi.

Nel 1894 il prof. Paolo Pizzetti portò un contributo essenziale alla teoria, ottenendo la soluzione completa del problema della determinazione del campo gravitazionale esterno ad un ellissoide di rotazione, od a tre assi differenti, mediante formole finite. Nel caso dell'ellissoide di rotazione le trascendenti colle quali la soluzione può essere ottenuta sono elementari, cioè funzioni circolari inverse. Nel caso dell'ellissoide a tre assi sono integrali ellittici.

Il Pizzetti potè poi dedurre dalla sua soluzione una relazione rigorosamente vera fra le costanti ellissoidiche ed i valori della gravità al polo ed all'equatore, la quale, ridotta a forma approssimata, coincide colla formola di Clairaut. Veniva così ad apparire la vera origine analitica di questa celebre formola, la quale sostanzialmente non è altro che il risultato dell'eliminazione della massa del geoide fra le due espressioni che danno la gravità al polo ed all'equatore. Le ricerche del Pizzetti sono riprodotte e completate nella sua opera: *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti* (Pisa 1913). Ma la morte prematura gli impedì di sviluppare le conseguenze ulteriori della sua teoria.

Queste conseguenze sono assai notevoli. Esse portano a stabilire molte formole di grande semplicità e che hanno interesse sia dal punto di vista teorico, che dal punto di vista pratico. Da esse risultano infatti molte relazioni nuove fra i valori della gravità e le costanti geometriche del geoide, e mettono così in luce nuove possibilità di determinazione di queste costanti mediante le misure di gravità, o dei valori generali della gravità mediante alcuni di essi conosciuti.

Alla ricerca di queste proprietà io ho dedicato in questi ultimi anni varie Note, i cui risultati sono riprodotti e completati nel presente lavoro. Ed affinchè il lettore non sia obbligato a ricorrere ad altre fonti, risalgo dapprima fino al teorema che il Poincaré (a cui si deve il suo enunciato più generale) denominò *teorema di Stokes*, e che è il fondamento di tutte queste teorie.

Debbo infine avvertire che, sebbene oggetto principale della presente ricerca sia il campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione, io stabilisco anche

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

altre proprietà valide per casi più generali, o per un geoide di forma qualunque, e viene così aperta la via per ricerche d'indole più larga, ed in particolare per il caso dell'ellissoide a tre assi, a cui sono effettivamente estendibili molti dei risultati ai quali sono arrivato.

CLAIRAUT A., *An Inquiry concerning the Figure of such Planets as revolve about an Axis, supposing the Density continually to vary, from the Centre towards the Surface.* « Philosophical Transaction », London, 1738.

CLAIRAUT A., *Théorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique.* Paris, 1743.

STOKES, *On attraction and on Clairaut's Theorem Cambridge and Dublin Math. Jour.* Vol. IV, 1849. (Math. a. Phys. Pesp., Vol. II).

STOKES, *On the variation of Gravity at the Surface of the Earth.* Trans. of the Cambridge Phil. Soc., Vol. VIII.

PIZZETTI P., *Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide, supposto ellissoidico.* Atti della R. Acc. dei Lincei, T. III, 1894.

MORERA G., *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti « Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico ».* Atti della R. Acc. dei Lincei, T. III, 1894.

MINEO C., *Funzione potenziale di un pianeta del quale sia assegnata una superficie di equilibrio esterna.* (Rivista Archimede, Palermo 1923).

LAURA E., *Sopra il problema di Stokes.* Mem. Soc. Astr. Ital., Vol. III, 1925.

SOLER E., *Sopra alcune recenti considerazioni « Sul teorema di Stokes ».* Mem. della Soc. Astr. Ital., Vol. III, 1925.

MINEO C., *Sulla gravità superficiale d'un pianeta supposto ellissoidico a tre assi* (Boll. dell'Unione Mat. Ital., Aprile 1928).

C. SOMIGLIANA:

1. *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità.* (Rend. Acc. Lincei, 1° sem., 1927).
2. *Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità.* (Rend. Acc. Lincei, 1° sem., 1927).
3. *Sopra una formula di Pizzetti e la determinazione della densità media terrestre.* (Bulletin géodésique, N. 11, 1926).
4. *Sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità.* (Atti Acc. delle Scienze di Torino, 1927).
5. *Sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità.* (Rend. Seminario mat. e fisico dell'Università di Milano, 1926-27).
6. *Sulla estensione del teorema di Clairaut.* (Atti Ist. Veneto, 1926-27).
7. *Sulla definizione della gravità normale.* (Rend. Acc. Lincei, 1° sem., 1928).
8. *Sulla gravità normale e la formola di Helmert.* (Rend. Acc. Lincei, 1: sem., 1928).
9. *Sulla generalizzazione del teorema di Clairaut.* (Rend. Ist. Lomb., 1928).
10. *Sulla misura della Terra e la gravimetria.* (Acc. Scienze di Torino, nov. 1928).
11. *Quelques nouveaux principes théoriques en gravimetrie* (Bulletin géodésique, N. 18, 1928).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

CAPITOLO I.

§ 1. - Il teorema di Stokes e la forma generale della funzione potenziale gravitazionale esterna.

Se consideriamo il geoide costituito da una massa newtoniana attraente, e la sua superficie come una superficie di livello, la sua funzione potenziale V all'esterno di questa superficie deve essere regolare ed armonica, e deve annullarsi all'infinito in modo che indicando con M la massa totale del geoide e con ρ un raggio vettore, uscente da un punto a distanza finita, si abbia:

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho V = M.$$

Supponiamo nota M e prendiamo per asse di rotazione del geoide l'asse delle z di un sistema cartesiano x, y, z invariabilmente connesso col geoide. Indichiamo con:

γ la costante dell'attrazione

ω la velocità angolare di rotazione.

Sulla superficie geoidica, perchè essa risulti equipotenziale, deve essere:

$$\gamma V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{costante}. \tag{1}$$

Queste condizioni sono sufficienti ad individuare univocamente la funzione potenziale V.

La dimostrazione di questo teorema, come fu data dal Poincaré nel cap. V delle *Figures d'equilibre d'une masse fluide*, è assai semplice ed è basata sulla proprietà che dei due integrali:

$$\int_{S_\infty} \Delta_1 V \, d S_\infty \qquad \int_\sigma V \frac{\partial V}{\partial \rho} d\sigma$$

estesi rispettivamente a tutto lo spazio illimitato S_∞ esterno al geoide e ad una sfera σ di raggio ρ crescente indefinitamente, il primo si conserva finito ed il secondo si annulla. Ne risulta l'uguaglianza:

$$\int \Delta_1 V \, d S_\infty = -\int_s V \frac{\partial V}{\partial n_e} d s \tag{2}$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

ove s è la superficie del geoide, n_e la normale esterna. Ricordando poi la relazione di Poisson:

$$\Delta_2 V_i = -4\pi k$$

valida nello spazio S_i interno del geoide, e dove k indica la densità, ed inoltre le relazioni:

$$\int_{S_i} \Delta_2 V_i \, d S_i = - \int_s \frac{\partial V}{\partial n_i} d s = - \int \frac{\partial V}{\partial n_e} d s = -4\pi M$$

si conclude subito che se V e V' sono due funzioni soddisfacenti entrambe alle condizioni sopra enunciate nello spazio esterno, si ha:

$$\int_s \frac{\partial}{\partial n_e} (V - V') \, d s = o$$

e quindi dalla relazione [2] risulta:

$$\int \Delta_1 (V - V') \, d S_\infty = o$$

da cui segue subito per un ragionamento ben noto, $V - V' = o$ in tutto lo spazio esterno, cioè si ha l'identità completa fra le due funzioni V e V'.

È perciò possibile, quando sia nota la massa M, e sia conosciuta la superficie s del geoide, di conoscere anche V, e quindi il valore del vettore gravitazionale in tutto lo spazio esterno e sulla superficie geoidica.

Il problema della effettiva determinazione della funzione V fu dal Pizzetti denominato *problema di Stokes*, in omaggio a chi ne aveva per primo dimostrato la possbilità. Noi pure adotteremo questa denominazione.

La funzione V può essere posta sotto una forma assai utile in molte considerazioni, e che fu sostanzialmente indicata dal Pizzetti, come recentemente ha messo in luce il prof. Soler.

Indichiamo con U_1, U_2 due funzioni armoniche all'esterno del geoide e che all'infinito sono regolari e si comportano come ordinarie funzioni potenziali. Indicando con m_1, m_2 due costanti finite, si avrà allora:

[3] $$\lim_{\rho \to \infty} \rho \, U_1 = m_1 \qquad \lim_{\rho \to \infty} \rho \, U_2 = m_2.$$

Aggiungiamo inoltre la condizione che sulla superficie s si abbia rispettivamente:

$$U_1 = 1 \qquad U_2 = x^2 + y^2.$$

Per proprietà note relative al problema di Dirichlet, le funzioni U_1, U_2 saranno univocamente determinate, e così pure le costanti m_1, m_2, per le quali si ha:

[4] $$m_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\partial U_1}{\partial n_e} d s \qquad m_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_s \left(\frac{\partial U_2}{\partial n_e} + \frac{\partial U'_2}{\partial n_i} \right) d s$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

ove U'_2 rappresenta la funzione armonica nell'interno di s, che si attacca con continuità ai valori superficiali di U_2. Ciò posto, sia:

$$\gamma V = \alpha U_1 + \beta U_2 \tag{5}$$

ove α, β sono due costanti. Perchè sia soddisfatta la condizione [1] dovrà essere:

$$\beta = -\frac{\omega^2}{2}.$$

Inoltre moltiplicando la [5] per ρ e passando al limite per $\rho = \infty$, troviamo:

$$\gamma M = \alpha m_1 + \beta m_2$$

da cui ricaviamo:

$$\alpha = \frac{1}{m_1}\left(\gamma M + \frac{\omega^2}{2} m_2\right).$$

Perciò la funzione potenziale W del campo gravitazionale esterno può porsi sotto la forma generale:

$$W = \left(\gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2}\frac{m_2}{m_1}\right) U_1 - \frac{\omega^2}{2} U_2 + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{6}$$

Notiamo anche che questa forma è sempre possibile, perchè m_1 non può essere mai nulla. Difatti essendo gli estremi della funzione U_1 rappresentati dai valori 1 sulla superficie s e O all'infinito, per un noto teorema di Gauss, la U_1 sarà sempre decrescente lungo la normale esterna, e perciò $\frac{\partial U_1}{\partial n_e}$ sempre negativa su tutta la superficie, e quindi m_1 positiva.

Questa costante m_1 ha poi anche un significato elettrostatico ben noto. Essa rappresenta la *capacità* di un conduttore che abbia la forma del geoide, cioè la *carica* (in unità elettrostatiche) di un tale conduttore quando il suo livello potenziale è unitario.

È assai facile vedere che la espressione [6] soddisfa effettivamente a tutte le proprietà caratteristiche della funzione W. In particolare risulta subito da essa che il valore della *costante* nella equazione [1] è:

$$W_s = \gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2}\frac{m_2}{m_1}. \tag{7}$$

Questa espressione rappresenta quindi la costante che determina la superficie equipotenziale coincidente col geoide.

Noi potremo così servirci della espressione [6] come di una rappresentazione analitica generale della funzione potenziale gravitazionale relativa ad un geoide di forma qualunque. Inoltre possiamo dire che la risoluzione del problema di trovare la funzione W, si riduce alla costruzione delle due funzioni U_1 ed U_2, cioè alla risoluzione di due speciali problemi di Dirichlet.

Noi seguiremo appunto questa via nei problemi che dovremo risolvere.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

§ 2. - Distribuzioni interne possibili di massa, proprietà della funzione potenziale gravitazionale.

Dal teorema di Stokes non risulta determinata la distribuzione interna della massa del geoide, mediante gli elementi che determinano invece il campo esterno. Non ne segue però che tale distribuzione sia completamente arbitraria. Per circoscrivere, per così dire, i limiti di tale arbitrarietà, osserviamo che applicando il teorema di reciprocità di Green alle due funzioni V, $\Delta_2 V$, supposte entrambe regolari in uno spazio finito S di contorno s, si ha:

$$\int [V \Delta_2 \Delta_2 V - (\Delta_2 V)^2] n S + \int \left(V \frac{\partial \Delta_2 V}{\partial n} - \Delta_2 V \frac{\partial V}{\partial n} \right) d s = o$$

ove n denota la normale interna. Da questa relazione segue subito che se sul contorno sono nulle V e $\frac{\partial V}{\partial n}$ e di più $\Delta_2 \Delta_2 V = o$ in tutto lo spazio, si deve avere:

$$\int (\Delta_2 V)^2 d S = o.$$

Da questa relazione segue che deve essere $\Delta_2 V = o$ in tutto lo spazio e quindi anche $V = o$.

Per un ragionamento ben noto si può allora concludere che una funzione regolare che soddisfa in uno spazio finito alla equazione:

$$\Delta_2 \Delta_2 V = \varphi (x, y, z)$$

ove φ è una funzione nota, e di cui sono parimenti dati in superficie i valori, che essa ivi deve assumere, e quelli della sua derivata normale, *è univocamente determinata.*

Ora se V rappresenta la funzione potenziale del geoide, essa deve restare continua, insieme alla sua derivata normale attraversando la superficie che lo limita. Nelle condizioni del teorema di Stokes, risultano quindi conosciuti sulla superficie s i valori di V e $\frac{\partial V}{\partial n}$. Inoltre nei punti interni pel teorema di Poisson si ha:

$$\Delta_2 V = -4 \pi k$$

ove k è la densità, e perciò:

$$\Delta_2 \Delta_2 V = -4 \pi \Delta_2 k.$$

Se l'espressione del secondo membro viene determinata in un modo qualunque, anche la V e quindi la k risulteranno, per quanto si è visto, completamente determinate.

Possiamo quindi concludere: *L'arbitrarietà circa la distribuzione interna*

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

della massa che si ha quando del geoide si conosce la forma e la massa totale, è rappresentata dai valori del Δ_2 della densità, pei quali non esiste alcuna condizione.

Tutte le distribuzioni possibili si possono quindi avere assegnando arbitrariamente i valori di $\Delta_2\, k$. Il problema della determinazione della corrispondente funzione V all'interno, si riduce così alla integrazione della doppia equazione di Laplace per assegnati valori al contorno della funzione e della sua derivata normale.

In altro modo si può anche dire che tutti i valori possibili per V, e quindi anche per k, si possono avere continuando nell'interno la funzione V conosciuta all'esterno, in modo che attraverso la superficie non esistano discontinuità nè per la funzione nè per la sua derivata normale.

Della soluzione del problema secondo il primo procedimento si è occupato il prof. Lauricella. Seguendo invece il secondo, ne ha indicato una semplice ed elegante soluzione il prof. Laura (v. la Bibliografia a pag. 5).

Si può anche dimostrare che nelle condizioni del teorema di Stokes risultano determinati il centro di massa del geoide, e le direzioni degli assi principali d'inerzia. I momenti principali di inerzia risultano pure determinati all'infuori di una costante additiva comune (Pizzetti, *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*, § 15, pag. 37).

Riprendiamo ora l'espressione [6] da cui risulta per la funzione potenziale esterna della massa attraente:

$$\gamma V = \left(\gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2} \frac{m_2}{m_1}\right) U_1 - \frac{\omega^2}{2} U_2$$

Indichiamo con U la funzione potenziale del geoide, quando si supponga uniforme e unitaria la densità, cioè poniamo

$$U = \int_S \frac{d\,S}{r}$$

essendo r la distanza del punto potenziato da un generico punto interno. La densità media sarà data dal rapporto $M : S$. Sia ora F una funzione da determinarsi e poniamo:

$$\gamma V = \gamma \frac{M}{S} U + \gamma F = \left(\gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2} \frac{m_2}{m_1}\right) U_1 - \frac{\omega^2}{2} U_2. \tag{8}$$

È facile vedere quali debbono essere le proprietà caratteristiche della funzione F, ammesso che la relazione precedente sussista in tutto lo spazio esterno. Si vede subito che nello spazio esterno questa funzione deve essere armonica e regolare ed annullarsi all'infinito. Inoltre si verifica facilmente che:

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho\, F = o.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Ne segue che la funzione F può essere considerata nello spazio esterno come la funzione potenziale di una massa globalmente nulla.

Volendo specificare ulteriormente una possibile distribuzione di questa massa, indichiamo con U' la funzione armonica nell'interno di S, che si attacca con continuità alla U nei punti della superficie s. In modo analogo abbiamo considerato le funzioni U'_1 e U'_2 che si attaccano, dall'interno di S, ai valori superficiali di U_1 e U_2 e sono armoniche. Esse possono essere considerate come funzioni potenziali corrispondenti a distribuzioni superficiali di massa, di densità:

$$h_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U_1}{\partial n_e} \qquad h_2 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U_2}{\partial n_e} + \frac{\partial U_2'}{\partial n_i}\right)$$

a cui corrispondono le masse m_1, m_2 definite dalle [4]. In modo analogo le funzioni U, U' costituiscono insieme la funzione potenziale di una massa superficiale di densità

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n_e} + \frac{\partial U}{\partial n_i}\right).$$

Definiamo ora nell'interno di S una funzione F' mediante la relazione:

[8′] $$\gamma\frac{M}{S}U' + \gamma F' = \left(\gamma\frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2}\frac{m_2}{m_1}\right)U_1' - \frac{\omega^2}{2}U_2'.$$

Questa funzione F' sarà armonica in S e si unirà con continuità alla F sulla superficie. Essa rappresenta quindi, considerata insieme alla F, la funzione potenziale di uno strato superficiale di massa, la cui densità H, data da:

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial n_e} + \frac{\partial F'}{\partial n_i}\right)$$

sarà determinata dalla relazione, che risulta dalle precedenti [8] [8′],

[9] $$\gamma\frac{M}{S}h + \gamma H = \left(\gamma\frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2}\frac{m_2}{m_1}\right)h_1 - \frac{\omega^2}{2}h_2$$

poichè in essa h, h_1, h_2 sono conosciute.

Dalla formola [8] risulta così che la funzione potenziale *esterna* del geoide può considerarsi come la somma della funzione potenziale della massa totale, supposta uniformemente distribuita all'interno, e della funzione potenziale di una massa superficiale, complessivamente nulla, la cui densità H è determinata dalla relazione [9].

Questa funzione potenziale può considerarsi come una funzione *compensatrice*, che aggiunta alla funzione potenziale del geoide omogeneo e della forza centrifuga, riduce la superficie del geoide ad essere una superficie di livello.

Il campo gravitazionale esterno di un geoide di forma qualunque può dunque sempre considerarsi anche generato:

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

1° *dall'attrazione della massa totale geoidica, supposta uniformemente distribuita nell'interno;*

2° *dalla forza centrifuga;*

3° *dall'azione newtoniana di una massa superficiale compensatrice, globalmente nulla.*

Ne segue che la densità di questo strato superficiale dovrà essere in parte positiva e in parte negativa. Per immaginare realizzato un tale stato di cose, senza introdurre masse negative, che non avrebbero significato nel caso attuale, possiamo pensare una distribuzione inizialmente uniforme, e poi in un sottile strato superficiale, di spessore arbitrario, attuato un aumento od una diminuzione di massa in conformità alla grandezza ed al segno della densità H.

Si ha così una rappresentazione abbastanza semplice ed intuitiva dell'azione esercitata all'esterno dal geoide, e che è valida qualunque sia la sua forma.

§ 3. - Generalizzazione del teorema di Clairaut.

La relazione che porta il nome di teorema di Clairaut, e che fu fatta conoscere dal celebre matematico nel 1738, è sostanzialmente una relazione lineare fra i valori della gravità al polo ed all'equatore e le costanti che definiscono geometricamente l'ellissoide di rotazione. Essa è verificata solo approssimativamente e suole scriversi nella forma:

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} + s = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} \tag{10}$$

g_p, g_e essendo i valori della gravità al polo ed all'equatore, a il semiasse maggiore, s lo schiacciamento $a - c \colon a$, ω la velocità di rotazione $= \frac{2\pi}{N}$, essendo N il numero dei secondi di giorno solare medio contenuti nel giorno sidereo.

Il Pizzetti ha trovato la relazione rigorosa, da cui ha origine la [10], quando si tenga conto solo dei primi termini di alcuni sviluppi per serie. Ma per quanto riguarda le applicazioni egli non si è allontanato dall'opinione generalmente accettata, che la relazione di Clairaut rappresentasse la base fondamentale esclusiva delle relazioni fra le costanti dell'ellissoide ed i valori della gravità. Su tale concetto può dirsi fondata la celebrità acquistata da questa formola ed il suo bisecolare dominio nella gravimetria.

Ma non è difficile dimostrare che di relazioni analoghe a quella di Clairaut ne esistono infinite, e non solo sull'ellissoide di rotazione, ma sull'ellissoide a tre assi ed anche sopra un geoide di forma qualunque. Per relazioni analoghe a quella di Clairaut intendiamo relazioni che ne conservino il carattere analitico fondamentale, quello cioè di relazioni lineari fra due valori della gravità, nelle quali i coefficienti dipendano esclusivamente dai parametri geometrici che caratterizzano la superficie geoidica, e dalla velocità ω di rotazione.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Ad un risultato di così notevole generalità si arriva assai facilmente considerando la forma generale della funzione potenziale gravitazionale che abbiamo trovato nel § 1, cioè la forma [6] della W.

Indicando infatti con n la normale esterna al geoide si ha come valore della gravità, o intensità del vettore gravitazionale g, la espressione:

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}$$

ossia:

$$g = -\left(\gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2}\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{\partial U_1}{\partial n} + \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial U_2}{\partial n} - \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial n} \tag{11}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. La espressione della gravità risulta così in ogni caso lineare rispetto alla massa M del geoide, poichè dalla definizione delle funzioni U_1, U_2 appare che esse sono indipendenti dalla massa, o dalla densità del geoide, ma dipendono esclusivamente dalla sua forma geometrica, ossia dai parametri che questa forma definiscono.

Se ora consideriamo due valori della gravità g_1, g_2, corrispondenti a due punti diversi P_1, P_2 della superficie geoidica, posto per brevità:

$$K = U_2 - r^2$$

questi valori si possono rappresentare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\left(\gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2}\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_1 + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_1 \\ g_2 &= -\left(\gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2}\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_2 + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_2 \end{aligned} \tag{12}$$

dove gli indici 1, 2 stanno ad indicare che le quantità entro le parentesi devono essere calcolate rispettivamente nei punti P_1, P_2.

Se ora eliminiamo M fra le due relazioni precedenti, otteniamo una relazione lineare fra g_1, g_2 nella quale i coefficienti, per un'osservazione già fatta, sono indipendenti dalla massa del geoide. Questa relazione è la seguente:

$$g_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_2 - g_2\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_1 = \frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_2\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_1\right\}. \tag{13}$$

Questa relazione a cui soddisfanno due valori della gravità, corrispondenti a due punti qualunque della superficie geoidica, può considerarsi come la estensione del teorema di Clairaut, e potremmo anche dire la massima possibile, finchè restiamo sui punti della superficie.

Essa infatti ha i caratteri che abbiamo indicato come fondamentali della relazione stessa, e vedremo poi che applicando il procedimento che ad essa conduce, nel caso dell'ellissoide di rotazione, si arriva precisamente al teorema di Clairaut.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Ma si può anche notare che relazioni analoghe alla [13] si potrebbero stabilire, con un procedimento simile, fra due valori della gravità corrispondenti a due punti qualunque del campo gravitazionale, anche esterno al geoide, ed anche fra due componenti della gravità secondo direzioni arbitrariamente fissate. Difatti le espressioni di queste grandezze hanno sempre il carattere lineare rispetto alla massa M, ed è quindi sempre possibile l'eliminazione di M fra due qualunque di esse, conservando la linearità fra i valori della gravità. Ma di queste relazioni più generali non importa per ora occuparci.

Notiamo invece che se alle due espressioni [12] associamo quella della gravità in un terzo punto P_3 che supponiamo sulla superficie, come i primi due, avremo per la gravità g_3 in esso:

$$g_3 = -\left(\gamma \frac{M}{m_1} + \frac{\omega^2}{2} \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_3 + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_3$$

ed allora fra questa relazione e le due [12] potremo eliminare M ed ω^2, ed otterremo una relazione lineare fra i tre valori g_1, g_2, g_3 della gravità in tre punti qualunque della superficie P_1, P_2, P_3 i cui coefficienti sono indipendenti da M e da ω^2. Questa relazione è la seguente:

$$[14] \qquad \begin{vmatrix} g_1 & \left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_1 & \left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_1 \\ g_2 & \left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_2 & \left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_2 \\ g_3 & \left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_3 & \left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_3 \end{vmatrix} = o$$

ed abbiamo il teorema:

Fra tre valori della gravità in tre punti qualsiansi della superficie esiste sempre una relazione lineare omogenea, i cui coefficienti non dipendono che dai parametri che definiscono geometricamente la superficie del geoide e dalle coordinate dei punti considerati.

Stabilita così l'origine analitica del teorema di Clairaut, vediamo da una parte che la sua dimostrazione è sostanzialmente assai semplice, e d'altra parte che il suo campo di validità può essere estremamente esteso.

Si presenta così la possibilità di trovare infinite nuove relazioni fra valori della gravità e parametri geometrici della superficie geoidica. Inoltre si apre la via alla soluzione di un problema che finora, per quanto ci è noto, non è stato mai preso in considerazione, quello della espressione dei parametri geometrici della superficie del geoide in funzione di un certo numero di valori della gravità.

È questo un problema puramente analitico, che enunciamo, ma non si può escludere che possa avere anche un'importanza pratica, in quanto possa portare, quando l'esattezza delle misure di gravità lo consenta, ad una effettiva

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

determinazione delle costanti geometriche del geoide in base esclusivamente a misure di gravità.

Finora, in base al teorema di Clairaut, è prevalsa un'opinione del tutto contraria, poichè si è sempre affermato, come effettivamente risultava dalla formola stessa, che solo lo schiacciamento, cioè il rapporto degli assi, non la loro grandezza assoluta, poteva dedursi dalle misure di gravità.

Vedremo in seguito a quali risultati interessanti si possa giungere, in base a queste considerazioni, nei casi speciali che studieremo, il geoide sferico ed il geoide ellissoidico di rotazione.

§ 4. - Il geoide sferico.

Noi possiamo sempre, per quanto si è visto, pensare come superficie geoidica una superficie chiusa qualunque; difatti esisteranno in ogni caso, ed in numero infinito, le distribuzioni di massa per cui quella superficie risulta di livello. Naturalmente ammettendo la possibilità meccanica del suo equilibrio interno, mantenuta, se occorre, da convenienti reazioni del materiale costitutivo.

Il caso di un geoide sferico presenta un particolare interesse per la semplicità della soluzione analitica del problema in questo caso, sebbene, dal punto di vista quantitativo, il campo del geoide sferico, per ragioni che vedremo, non possa considerarsi come rappresentazione approssimata del campo gravitazionale terrestre.

La determinazione delle funzioni U_1, U_2 nel caso di un geoide sferico di raggio R e di massa M si ottiene assai facilmente. Prendendo per asse polare l'asse di rotazione, ed indicando con θ la colatitudine, sulla superficie della sfera si vede avere:

$$U_1 = 1 \qquad\qquad U_2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Introducendo la funzione sferica di 2° ordine:

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

si vede subito che basta porre:

$$U_1 = \frac{R}{\rho} \qquad\qquad U_2 = -\frac{2}{3}\frac{R^5}{\rho^3}P_2(\cos\theta) + \frac{2}{3}\frac{R^3}{\rho}$$

essendo ρ il raggio vettore dal centro. L'armonicità di queste funzioni è evidente e si ha inoltre moltiplicando per ρ e passando al limite per $\rho \to \infty$:

$$m_1 = R \qquad\qquad m_2 = \frac{2}{3}R^3.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Si trova così sostituendo nella formola (6):

$$W = \left(\gamma \frac{M}{R} + \frac{\omega^2}{3} R^2\right) \frac{R}{\rho} + \frac{\omega^2}{2} \left\{ \frac{2}{3} \frac{R^5}{\rho^3} P_2 (\cos \theta) - \frac{2}{3} \frac{R^3}{\rho} \right\} + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

ossia:

[15] $$W = \gamma \frac{M}{\rho} + \frac{1}{3} \omega^2 \frac{R^5}{\rho^3} P_2 (\cos \theta) + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Questa forma della funzione potenziale ci dà immediatamente l'espressione della funzione che abbiamo chiamato *compensatrice*. Difatti le funzioni:

$$W_1 = \gamma \frac{M}{\rho} \qquad W_2 = \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

sono rispettivamente le funzioni potenziali della sfera omogenea di massa M e della forza centrifuga, per cui per la funzione potenziale compensatrice abbiamo subito:

$$W_3 = \frac{\omega^2}{3} \frac{R^5}{\rho^3} P_2 (\cos \theta).$$

La funzione armonica regolare nell'interno della sfera, che si attacca con continuità alla W_3 sulla superficie sarà:

$$W_2' = \frac{\omega^2}{3} \rho^2 P_2 (\cos \theta)$$

per cui la densità H dello strato di compenso è:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \rho} - \frac{\partial W_2'}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \frac{\omega^2}{4\pi} \frac{5}{3} R P_2 (\cos \theta);$$

si ha quindi rispettivamente al polo ed all'equatore:

$$H_p = \frac{5\,\omega^2}{12\,\pi} R \qquad H_e = -\frac{5\,\omega^2}{12\,\pi} \frac{R}{2}.$$

Lo strato di compenso è quindi costituito da due calotte di densità positiva intorno ai poli, che giungano fino ad una colatitudine determinata dalla relazione:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735$$

alla quale la densità si annulla. Fra queste due calotte si ha una zona di densità negativa, che risulta compresa fra i paralleli di latitudine $\pm 35^\circ.56'$.

L'espressione della gravità superficiale è data dalla componente secondo il raggio, cambiata di segno:

$$g_\rho = -\frac{\partial W}{\partial \rho} \qquad \text{per } \rho = R$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI..4..425S

e quindi poichè:

$$g_\rho = \gamma \frac{M}{\rho^2} + \omega^2 \frac{R^5}{\rho^4} (\cos\,\theta) - \omega^2 \rho \,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

si ha:

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} + \omega\, R\, P_2\; (\cos\,\theta) - \omega^2 R \,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

che si può scrivere anche:

$$[16] \qquad g = \left(\gamma \frac{M}{R^2} + \omega^2 R\right) \cos^2\,\theta + \left(\gamma \frac{M}{R^2} - \frac{3}{2}\,\omega^2 R\right) \mathrm{sen}^2\,\theta$$

da cui per i valori della gravità al polo ed all'equatore si ha:

$$[17] \qquad g_p = \gamma \frac{M}{R^2} + \omega^2 R \qquad\qquad g_e = \gamma \frac{M}{R^2} - \frac{3}{2}\,\omega^2 R$$

e possiamo quindi scrivere anche:

$$g = g_p \cos^2\,\theta + g_e \,\mathrm{sen}^2\,\theta.$$

Dalle [17] ricaviamo subito la relazione corrispondente al teorema di Clairaut:

$$[18] \qquad g_p - g_e = \frac{5}{2}\,\omega^2 R$$

che è precisamente la relazione a cui si riduce quella di Clairaut [10] per $s = o$ ed è in questo caso perfettamente rigorosa.

Per avere il teorema di Clairaut nella nostra forma generalizzata osserviamo che la [16] si può scrivere:

$$g = \gamma \frac{M}{R_2} - \frac{3}{2}\,\omega^2 R + \frac{5}{2}\,\omega^2 R \cos^2\,\theta$$

perciò eliminando M fra due valori g_1, g_2 della gravità corrispondenti ai valori θ_1, θ_2 della colatitudine si ottiene:

$$[19] \qquad g_1 - g_2 = \frac{5}{2}\,\omega^2 R\,(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2)$$

e considerando un terzo valore g_3 della gravità alla colatitudine θ_3, si trova:

$$[20] \qquad g_1\,(\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_3) + g_2\,(\cos^2\theta_3 - \cos^2\theta_1) + g_3\,(\cos^2\,\theta_1 - \cos^2\theta_2) = o$$

che è la relazione lineare omogenea [14] che esiste fra tre valori qualunque della gravità, quale si presenta nel caso della sfera. Così la relazione [19] corrisponde alla (13).

Ora osserviamo che dalle [17] indicando con k la densità media del geoide sferico si ha:

$$\frac{2\,g_e + g_p}{R} = 4\,\pi\,\gamma\,k - 2\,\omega^2$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

e quindi eliminando R:

[21] $$4\pi\gamma k = \frac{5}{2}\omega^2 \frac{2g_e + g_p}{g_p - g_e} + 2\omega^2.$$

Queste formole [18] [21] determinano quindi il raggio R e la densità media del geoide, quando siano noti i valori della gravità al polo ed all'equatore.

Ed è facile vedere che tale determinazione si può avere anche direttamente con due valori qualsiasi della gravità.

Si ha così un esempio assai semplice della possibilità analitica di determinare con sole misure di gravità le due costanti che in questo caso caratterizzano il campo gravitazionale. Si potrebbe poi anche pensare che prendendo per la differenza $g_p - g_e$ il valore che attualmente si accetta per questa differenza, cioè in base alla formola di Helmert (1901):

$$g_p - g_e = 5{,}185$$

fosse possibile avere un valore approssimato del raggio medio terrestre, mediante la [19]. Ma ciò non è. Se si calcola R con quella formola prendendo il valore precedente per la differenza $g_p - g_e$, e per ω la velocità di rotazione della terra, si trova:

$$R = 3902{,}645\ Km.$$

con un errore quindi superiore al 30 %.

Ma è possibile spiegare questo fatto singolare facendo un calcolo inverso del precedente, cercando cioè il valore della differenza $g_p - g_e$ sopra un geoide sferico che abbia un raggio uguale alla semi-somma dei due semiassi dell'ellissoide terrestre. Si trova così:

$$g_p - g_e = 8{,}460$$

cioè un valore molto più grande del precedente, e si vede quindi che l'ipotesi sferica porta, dal punto di vista della gravità, ad una deviazione d'ordine di grandezza assai maggiore a quella che corrisponde al passaggio dall'ellissoide alla sfera. L'errore precedente nel calcolo di R è in certo modo una prova dell'erroneità dell'ipotesi sferica.

Anche il valore assai grande della differenza $g_p - g_e$ sulla sfera si può spiegare osservando che perchè si possa mantenere la forma sferica conviene pensare a quell'aumento di densità ai poli e diminuzione all'equatore, che abbiamo trovato nello strato di compensazione. E ciò naturalmente porta ad aumentare g_p e diminuire g_e, e quindi a far crescere $g_p - g_e$.

Aggiungiamo un'ultima osservazione per quanto riguarda la forma delle superficie equipotenziali. Nel piano equatoriale esiste una circonferenza lungo la quale attrazione e forza centrifuga si fanno equilibrio. È facile determinarne il raggio osservando che nel piano equatoriale si ha per g:

$$g = \gamma \frac{M}{\rho^2} - \frac{\omega^2}{2}\frac{R^5}{\rho^4} - \omega^2\rho.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Il raggio di questa circonferenza d'equilibrio è quindi determinato dalla equazione:

$$\omega^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^5 - \frac{4}{3}\pi\gamma k \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2} = o.$$

Lungo questa circonferenza s'intersecano le due falde della superficie equipotenziale che separa lo spazio nel quale queste superficie sono chiuse da quello in cui sono aperte. All'infinito, prevalendo la forza centrifuga, le superficie equipotenziali tendono a diventare cilindri circolari, aventi per asse l'asse di rotazione.

§ 5. - Le funzioni armoniche ellissoidali.

Il Pizzetti nella risoluzione del problema di Stokes per l'ellissoide a due ed a tre assi si è servito di alcune funzioni armoniche regolari nel campo esterno ad un ellissoide a tre assi, le quali in questo caso sono rappresentabili mediante integrali ellittici, mentre nel caso dell'ellissoide di rivoluzione si possono esprimere mediante funzioni circolari inverse e funzioni razionali.

Richiameremo sommariamente alcune proprietà fondamentali di queste funzioni, necessarie per le applicazioni che dovremo fare.

Chiameremo, col Morera, *armonica ellissoidale* V_n la funzione rappresentata all'esterno dell'ellissoide i cui assi sono a, b, c dall'integrale seguente:

[22] $$V_n = \int_u^\infty H^n(s) \frac{ds}{\sqrt{R(s)}}$$

dove:

$$H(s) = \text{I} - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}$$

ed u indica la radice positiva dell'equazione di 3° grado in s:

$$H(s) = o$$

mentre:

$$R(s) = (a^2+s)(b^2+s)(c^2+s).$$

Nell'interno dell'ellissoide i valori di V_n si suppongono definiti dallo stesso integrale, nel quale il limite inferiore u è sostituito dallo zero.

Quando $n = o$ la funzione V_n si riduce alla funzione potenziale di un ellissoide conduttrice isolata, in cui il livello potenziale sia una costante. Mentre per $n = \text{I}$ la V_1 all'infuori di un fattore $\pi a b c$, che conviene aggiungere, rappresenta la funzione potenziale dell'ellissoide omogenea di densità unitaria.

Le proprietà di queste due funzioni sono quindi ben note. L'armonicità di V_n per $n > \text{I}$ nello spazio esterno si dimostra facilmente in base ad una for-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

mula che mediante derivazioni si dimostra assai facilmente, ed è la seguente:

$$\Delta_2 V_n = 4n \int_u^\infty \frac{d}{ds}\left[\frac{H^{n-1}_{(s)}}{\sqrt{R(s)}}\right] ds$$

da cui:

$$\Delta_2 V_n = 4n \left[\frac{H^{n-1}_{(s)}}{\sqrt{R(s)}}\right]_u^\infty = 0$$

Questo teorema del resto è un caso particolare di un altro più generale relativo al caso in cui la funzione H^n è sostituita da una funzione arbitraria $f(H)$.

Per punti a distanza grandissima V_n ha per espressione assintotica:

$$V_n \equiv \int_\rho^\infty \left(1 - \frac{\rho^2}{s}\right)^n \frac{ds}{\sqrt{s^3}}$$

da cui si ricava:

[23] $$\lim_{\rho\to\infty} \rho\, V_n = \frac{n!\, 2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

Per $n = 0, 1, 2$ si ha:

[24] $$\lim \rho\, V_0 = 2 \qquad \lim \rho\, V_1 = \frac{4}{3}$$
$$\lim \rho\, V_2 = \frac{16}{15}.$$

Per i punti interni all'ellissoide un calcolo analogo al precedente dà:

[25] $$\Delta_2 V_n = 4n \left[\frac{H^{n-1}_{(s)}}{\sqrt{R(s)}}\right]_0^\infty = -\frac{4n}{abc}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1}$$

formola valida anche per $n = 1$.

Noi introdurremo le seguenti notazioni:

[26] $$A_1(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+u)\sqrt{R(s)}} \qquad A_2(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+u)\sqrt{R(s)}} \qquad A_3(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{(c^2+u)\sqrt{R(s)}}$$

e inoltre:

$$V_0 = \int_u^\infty \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} = A_0(u)$$

avremo così:

[27] $$V_1 = A_0(u) - x^2 A_1(u) - y^2 A_2(u) - z^2 A_3(u).$$

Consideriamo ora il caso in cui l'ellissoide è di rotazione supponendo $a = b$. È facile vedere che in tal caso gli integrali precedenti possono essere espressi mediante funzioni circolari inverse.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Ponendo infatti:

$$i = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}} \qquad E = \frac{i\,c}{\sqrt{u + c^2}}$$

si trova con facili quadrature (v. PIZZETTI, *Principi, ecc.*, p. 49).

[28]
$$\begin{aligned} A_0(u) &= \frac{2}{i\,c} \text{ arco tg } E \\ A_1(u) &= \frac{2}{i^3 c^3}\left(\text{arco tg } E - \frac{E}{1 + E^2}\right) \\ A_3(u) &= \frac{2}{i^3 c^3}(E - \text{arco tg } E). \end{aligned}$$

Per esprimere i valori di queste espressioni per $u = 0$, cioè sulla superficie dell'ellissoide, introduciamo la funzione:

[29]
$$\psi(i) = \frac{1}{i^3}(i - \text{arco tg } i)$$

che come è facile verificare è regolare nell'intorno del valore $i = 0$. Si ha infatti:

[30]
$$\psi(i) = \frac{1}{3} - \frac{i^2}{5} + \frac{i^4}{7} - \ldots \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3}\, i^{2n}.$$

Ponendo per semplicità:

$$A_0 = A_0(0) \qquad A_1 = A_1(0) \qquad A_2 = A_2(0)$$

si trova assai facilmente, poichè per $u = 0$ si ha $E = i$,

[31]
$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{c}(1 - i^2 \psi(i)) \\ A_1 = A_2 &= \frac{2}{c^3}\left(\frac{1}{1 + i^2} - \psi(i)\right) \\ A_3 &= \frac{2}{c^3}\psi(i)\,. \end{aligned}$$

Stabilite queste formule, possiamo ora risolvere il problema del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione.

§ 6. - Il problema di Stokes per l'ellissoide di rotazione.

La risoluzione del problema di Stokes si ottiene facilmente costruendo dapprima, secondo il metodo generale stabilito da principio, le corrispondenti funzioni U_1, U_2.

La U_1 si ha immediatamente osservando che la funzione:

$$V_0(u) = \int_u^{\infty} \frac{d\,s}{\sqrt{R(s)}}$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

è costante sulla superficie dell'ellissoide $u = o$. Quindi possiamo porre:

[32] $$U_1 = \frac{V_0(u)}{V_0(o)} = \frac{\text{arco tg}\, E}{\text{arco tg}\, i}.$$

Abbiamo poi:

[33] $$\lim_{\rho \to \infty} \rho\, V_0 = 2 \qquad \lim_{\rho \to \infty} \rho\, U_1 = \frac{2}{A_0} = m_1.$$

Per costruire U_2 poniamo:

$$U_2 = \alpha\, V_0 + \beta\, V_1.$$

In superficie si ha, posto $r^2 = x^2 + y^2$:

$$V_0 = A_0 \qquad V_1 = A_0 - r^2 A_1 - z^2 A_3$$

e tenendo conto dell'equazione della superficie:

$$V_1 = A_0 - c^2 A_3 - r^2 \left(A_1 - \frac{c^2}{a^2} A_3\right).$$

Perchè in superficie sia $U_2 = r^2$, dobbiamo porre:

$$\beta \left(A_1 - \frac{c^2}{a^2} A_3\right) = -1 \qquad (\alpha + \beta)\, A_0 - c^2 \beta\, A_3 = o$$

da cui:

[34] $$\alpha = \frac{a^2}{A_0} \frac{A_0 - c^2 A_3}{a^2 A_1 - c^2 A_3} \qquad \beta = -\frac{a^2}{a^2 A_1 - c^2 A_3}.$$

Avremo poi:

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho\, U_2 = m_2 = 2\,\alpha + \frac{4}{3}\beta.$$

Quindi sostituendo nella formola generale (6):

$$W = [\gamma\, M + \omega^2 (\alpha + \frac{2}{3}\beta)] \frac{V_0}{2} - \frac{\omega^2}{2} (\alpha\, V_0 + \beta\, V_1) + \frac{\omega^2}{2} r^2$$

ossia:

[35] $$W = \left(\frac{1}{2} \gamma M + \frac{\omega^2}{3} \beta\right) V_0 - \frac{\omega^2}{2}\, \beta\, V_1 + \frac{\omega^2}{2} r^2$$

ove β ha il valore (34). In questa formola possiamo anche in base alle precedenti espressioni trovate (28) porre:

$$V_0 = \frac{2}{i\, c} \text{arco tg}\, E$$

[36] $$V_1 = \frac{2}{i\, c} \text{arco tg}\, E - \frac{2\, r^2}{i^3 c^3} \left(\text{arco tg}\, E - \frac{E}{1 + E^2}\right) - \frac{2\, z^2}{i^3 c^3} (E - \text{arco tg}\, E).$$

La costante β può essere espressa abbastanza semplicemente mediante la funzione $\psi\,(i)$. Si ha infatti dalle relazioni (31):

$$c\,(a^2 A_1 - c^2 A_3) = 1 - (i^2 + 3)\, \psi\,(i)$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1939MmSAI..4..425S

quindi:

[37] $$\beta = c^3 \frac{1 + i^2}{(i^2 + 3)\,\psi(i) - 1}.$$

Nell'espressione [35] è opportuno per semplicità introdurre le costanti:

[38] $$A = \frac{1}{2}\gamma M + \frac{\omega^2}{3}\beta \qquad B = -\frac{\omega^2}{2}\beta$$

cioè introducendo la densità media k:

[39] $$A = \gamma \frac{2}{3}\pi a^2 c k + \frac{\omega^2}{3} \frac{c^3 (i^2 + 1)}{(i^2 + 3)\,\psi(i) - 1}$$
$$B = -\frac{\omega^2}{2} c^3 \frac{i^2 + 1}{(i^2 + 3)\,\psi(i) - 1}$$

e si ha allora:

[40] $$W = A\, V_0 + B\, V_1 + \frac{\omega^2}{2} r^2.$$

È questa l'espressione che possiamo ritenere definitiva per la funzione potenziale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione. Essa mette chiaramente in evidenza come le costanti, che vi compaiono, dipendano dalle costanti dell'ellissoide.

La costante i è stata introdotta dal Pizzetti; noi la chiameremo l'*eccentricità aggiunta*, per la sua relazione assai semplice coll'eccentricità e ordinariamente considerata:

$$(1 - e^2)(1 + i^2) = 1$$

da cui:

$$e^2 = \frac{i^2}{1 + i^2} \qquad i^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}.$$

§ 7. - Le componenti della gravità.

Se indichiamo con g_r, g_z le componenti della gravità in un punto qualunque dello spazio, avremo:

[41] $$g_r = -\frac{\partial W}{\partial r} \qquad g_z = -\frac{\partial W}{\partial z}$$

ove W è la funzione definita da [40]. Ora derivando si ha:

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{R(u)}}\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \frac{\partial V_1}{\partial r} = -2r\int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{R(s)}}$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{1}{\sqrt{R(u)}}\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = -2z\int_u^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\sqrt{R(s)}}$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

e le derivate della u sono date da:

$$h_u^2 \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2r}{a^2+u} \qquad h_u^2 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{c^2+u}$$

quando si ponga:

$$h_u^2 = \frac{r^2}{(a^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}.$$

Ne segue che le componenti g_r, g_z potranno essere rappresentate nella forma:

[42] $$g_r = r\,G_1(u, h_u) \qquad g_z = z\,G_2(u, h_u)$$

dove:

[43] $$G_1(u, h_u) = \frac{A}{h_u^2 \sqrt{R(u)}} \frac{2}{a^2+u} + 2B\int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}} - \omega^2$$
$$G_2(u, h_u) = \frac{A}{h_u^2 \sqrt{R(u)}} \frac{2}{c^2+u} + 2B\int_u^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{R(s)}}.$$

Sono queste le formole generali. Per avere i valori della gravità sulla superficie dell'ellissoide dovremo porre $u = 0$. Ma conviene richiamare prima alcune formole di geometria analitica.

I punti dell'ellisse meridiana possono essere rappresentati dalle espressioni parametriche:

$$r = a^2 h_0 \cos\varphi \qquad z = c^2 h_0 \operatorname{sen}\varphi$$

ove φ indica l'angolo della normale esterna coll'asse delle r; e si ha mediante la colatitudine θ:

[44] $$\frac{1}{c^2 h_0^2} = \frac{1}{1-e^2\cos^2\theta} = \frac{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}{1-e^2} = 1 + i^2\cos^2\varphi.$$

Perciò dalle [42] abbiamo:

$$g_r = G_1(0. h_0)\, a^2 h_0 \cos\varphi = g\cos\varphi$$
$$g_z = G_2(0, h_0)\, c^2 h_0 \operatorname{sen}\varphi = g\operatorname{sen}\varphi$$

dove g è il modulo del vettore della gravità:

$$g = \sqrt{g_r^2 + g_z^2}.$$

Da queste espressioni deduciamo due valori equivalenti per la gravità g:

$$g = a^2 h_0 G_1(0, h_0) = c^2 h_0 G_2(0, h_0).$$

L'identità fra queste due espressioni è facilmente verificabile. In forma esplicita abbiamo:

[45] $$g = \frac{2A}{a^2 c h_0} + 2B a^2 h_0 A_1 - \omega^2 a^2 h_0$$
$$g = \frac{2A}{a^2 c h_0} + 2B c^2 h_0 A_3.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

L'identità fra queste due espressioni porta alla relazione:

$$2\,B\,A_1\,a^2 - \omega^2\,a^2 = 2\,B\,c^2\,A_3$$

pure facilmente verificabile. La seconda delle espressioni [45] è la più semplice e quella che noi adotteremo. Salvo la forma, essa coincide con la formola della gravità data da Pizzetti nel § 22 dei « *Principi* ». Ricordando le espressioni [39] delle costanti A, B possiamo porre:

$$[46] \qquad \begin{aligned} \frac{2\,A}{a^2\,c} &= \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,k + \frac{2}{3}\,\frac{\omega^2}{(i^2+3)\,\psi(i) - 1} = A^* \\ 2\,B\,A_3 &= -2\,\omega^2\,\frac{(i^2+1)\,\psi(i)}{(i^2+3)\,\psi(i) - 1} = B^* \end{aligned}$$

ed allora tenendo presente le [44] avremo

$$[47] \qquad \frac{1}{c}\,g = A^*\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi} + \frac{B^*}{\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi}}.$$

Questi coefficienti A^*, B^*, come appare da [46] contengono soltanto la costante geometrica i, cioè sono indipendenti dal valore assoluto degli assi.

Questa formola per la gravità può considerarsi come fondamentale per tutta la teoria, e per la sua grande semplicità si presta mirabilmente anche per il calcolo dei valori numerici della gravità lungo un meridiano.

Si può anche osservare che mediante questa formola la gravità potrebbe essere espressa in funzione della gran normale N o del raggio di curvatura ρ dell'ellisse meridiana, poichè si ha:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\,\varphi}} \qquad\qquad \rho = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\,\text{sen}^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

mentre per le relazioni [44] possiamo scrivere anche:

$$[48] \qquad \frac{1}{c}\,g = \frac{A^*}{\sqrt{1 - e^2}}\sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\,\varphi} + \frac{B^*\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\,\varphi}}$$

e quindi:

$$g = A^*\,\frac{a^2}{N} + B^*\,(1 - e^2)\,N.$$

È certamente cosa assai notevole che dalle espressioni assai complesse che si presentano, come si è visto, nella teoria generale, si possa poi giungere, senza mai abbandonare il rigore analitico, a forme così semplici per la gravità, ed è merito grande del Pizzetti di averne indicata la via.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

CAPITOLO II.

§ 1. - Relazioni fra i valori della gravità e le costanti dell'ellissoide.

Nella formola [47] solo la costante A^* dipende dalla densità media k, come appare dalla [46]; l'altra costante B^* dipende soltanto dall'eccentricità aggiunta e dalla velocità di rotazione. Perciò se fra due relazioni della forma [47] espresse coi valori della gravità g_1, g_2 corrispondenti a due latitudini qualsiansi φ_1, φ_2 eliminiamo la costante A^*, otterremo una relazione indipendente dalla densità media. Relazioni di questa specie, che si possono avere in numero infinito, sono del tipo di quella classica di Clairaut.

Per semplicità di scrittura giova introdurre la notazione:

$$z_i = \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_i} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

quando si abbiano a considerare valori g_1, g_2, ... corrispondenti alle latitudini φ_1, φ_2.... Dalla [47] avremo per una coppia di valori g_1, g_2.

$$\frac{1}{c}\, g = A^* z_1 + \frac{B^*}{z_1} \qquad \frac{1}{c}\, g_2 = A^* z_2 + \frac{B^*}{z_2}$$

ed eliminando A^*:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{g_1}{z_1} - \frac{g_2}{z_2}\right) = B^*\left(\frac{1}{z_1^2} - \frac{1}{z_2^2}\right) \qquad [49]$$

ossia:

$$\frac{g_1}{\sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_1}} - \frac{g_2}{\sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_2}} = c\, i^2 B^* \frac{\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_1}{(1 + i^2 \cos^2 \varphi_1)\,(1 + i^2 \cos^2 \varphi_2)}. \qquad [50]$$

Se in questa relazione supponiamo $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = \pi/2$ e chiamiamo g_p, g_e rispettivamente i valori della gravità al polo ed all'equatore troviamo:

$$\frac{g_p}{c} - \frac{g_e}{a} = B^* \frac{i^2}{i^2 + 1}$$

o anche introducendo per B^* il suo valore [46]:

$$\frac{g_p}{c} - \frac{g_e}{a} = 2\,\omega^2 \frac{i^2 \psi(i)}{1 - (i^2 + 3)\,\psi(i)}. \qquad [51]$$

Questa relazione, sotto forma un po' diversa, è quella che fu trovata da Pizzetti, come espressione rigorosa del teorema di Clairaut (*Principi*, § 21). Da essa tenendo conto del piccolo valore dell'eccentricità i, si può subito dedurre la relazione classica di Clairaut:

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI..4..425S

[52] $$\frac{g_p - g_e}{g_e} + s = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e}.$$

Analogamente espressioni approssimate più generali si possono dedurre dalla [50] e le daremo più innanzi. Possiamo però notare subito che la relazione [50], contenendo come caso particolare la [51] e la [52] può essere considerata come una generalizzazione del teorema di Clairaut, e potrà inoltre essere utilizzata, al pari di questa, per determinare lo schiacciamento o l'eccentricità *mediante due valori qualsiansi della gravità,* invece dei valori particolari all'equatore ed al polo.

Ma conviene anzitutto studiare la forma della funzione che compare nel secondo membro della [51]. Dallo sviluppo in serie della funzione $\psi(i)$, cioè:

$$\psi(i) = \frac{1}{i^3}(i - \text{arco tg}\, i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} i^{2n}$$

ricaviamo facilmente:

$$(i^2 + 3)\,\psi(i) = 1 - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n+2}}{(2n+3)(2n+5)}$$

quindi:

$$\frac{1}{i^2}(1 - (i^2+3)\,\psi(i)) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n}}{(2n+3)(2n+5)}.$$

Perciò se poniamo:

[53] $$C(i) = \frac{1}{4}\,\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} i^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n}}{(2n+3)(2n+5)}}$$

la relazione di Clairaut sotto forma rigorosa si può scrivere:

[54] $$\frac{g_p}{c} - \frac{g_e}{a} = 2\,\omega^2 C(i).$$

Noi chiameremo questa funzione $C(i)$ *la funzione di Clairaut.* È facile vedere che tale funzione è regolare per il valore $i = 0$. Si ha infatti:

$$C(0) = \frac{5}{4}$$

mentre i termini successivi dello sviluppo contengono solo potenze positive di i^2. Se trascurando tutti i termini successivi, conserviamo solo questo primo termine nel secondo membro della (51), esso assume il valore $^5/_2\ \omega^2$ che è quello che compare nella forma classica.

La costante B^* si esprime facilmente mediante la funzione $C(i)$. Si ha infatti dalle formule precedenti:

[55] $$B^* = \frac{i^2+1}{i^2}\, 2\,\omega^2 C(i)$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

quindi essa non si conserva finita per $i = o$. Per la costante A^* abbiamo invece [46]:

$$A^* = \frac{4}{3} \pi \gamma k - \frac{\frac{2}{3} \omega^2}{4 \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n+2}}{(2n+3)(2n+5)}}.$$

Quindi anche A^* non si conserva finita per $i = o$. Si ha però:

$$lim\, i^2 B^* = \frac{5}{2} \omega^2 \qquad lim\, i^2 A^* = -\frac{5}{2} \omega^2$$

quindi:

$$lim\, i^2 (A^* + B^*) = o.$$

Volendo esprimere anche A^* mediante la funzione di Clairaut, basta osservare che dalle [46] si ha:

[57] $$3 A^* + \frac{i^2 + 3}{i^2 + 1} B^* = 4 \pi \gamma k - 2 \omega^2.$$

Questa relazione permette di esprimere A^* mediante B^* e si trova così:

[58] $$A^* = \frac{4}{3} \pi \gamma k - \frac{2}{3} \omega^2 \left(1 + \frac{i^2 + 3}{i^2} C(i) \right).$$

Le costanti A^*, B^* hanno relazioni assai semplici coi valori della gravità al polo ed all'equatore.

Si ha infatti dalla formola generale (47).

[59] $$\frac{g_e}{c} = A^* \sqrt{1 + i^2} + \frac{B^*}{\sqrt{1 + i^2}} \qquad \frac{g_p}{c} = A^* + B^*$$

per cui A^* e B^* possono essere espresse linearmente mediante g_e, g_p.

Tenendo conto della relazione [57] si trova anche:

$$\frac{2 g_e}{a} + \frac{g_p}{c} = 4 \pi \gamma k - 2 \omega^2$$

relazione assai notevole, che è un caso speciale di un'altra trovata da Pizzetti nel caso dell'ellissoide a tre assi:

$$\frac{g_a}{a} + \frac{g_b}{b} + \frac{g_c}{c} = 4 \pi \gamma k - 2 \omega^2$$

(*Principi*, § 28). Queste formule possono servire a determinare la densità media del geoide, quando si voglia tener conto della sua forma ellissoidica e della forza centrifuga. Naturalmente queste formole si riducono a quella più comunemente usata considerando la terra come sferica e non ruotante, quando si faccia $g_e = g_p$, $a = b = c$, $\omega^2 = 0$.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Tenendo conto dell'espressione [55] della costante B^*, la relazione generale [50] di Clairaut si può scrivere:

[60] $$\frac{g_1}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_1}} - \frac{g_2}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_2}} = 2\,\omega^2\,(i^2+1)\,C(i)\,\frac{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}{(1+i^2\cos^2\varphi_1)\,(1+i^2\cos^2\varphi_2)}.$$

Sviluppando in serie secondo le potenze di i^2 e tenendo conto dei primi termini, possiamo dedurre dalla precedente una relazione analoga a quella classica di Clairaut, nella quale compaiano due valori qualunque della gravità. Si ha infatti:

$$\frac{1}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_1}} = 1 - \frac{i^2}{2}\cos^2\varphi_1 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,i^4\cos^4\varphi_1 - \ldots$$

$$\frac{1}{1+i^2\cos^2\varphi_1} = 1 - i^2\cos^2\varphi_1 + i^4\cos^4\varphi_1 - \ldots$$

per cui sostituendo nella [60] troviamo:

$$g_1 - g_2 + (g_1\cos^2\varphi_1 - g_2\cos^2\varphi_2)\,\frac{i^2}{2} + \ldots =$$

$$= 2\,\omega^2 c\,(i^2+1)\,C(i)\left\{1 - (\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2)\,i^2 + \ldots\right\}(\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_1)$$

Ma si ha:

$$(i^2+1)\,C(i) = C_0 + (C_0+C_1)\,i^2 + \ldots$$

ed il secondo membro dell'equazione precedente diviene:

$$= 2\,\omega^2 c\left\{C_0 + (C_0\,\mathrm{sen}^2\varphi_1 + C_1\,\mathrm{sen}^2\varphi_2)\,i^2 + \ldots\right\}(\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1).$$

Osservando poi che:

$$i^2 = \left(\frac{1}{1-s} - 1\right)\left(\frac{1}{1+s} + 1\right) = s\,(s+2) + \ldots$$

possiamo porre:

$$i^2 = 2\,s$$

e l'ultima relazione, tenendo conto solo della prima potenza dello schiacciamento s, si può scrivere, poichè $2\,C_0 = \frac{5}{2}$:

[61] $$\frac{g_1-g_2}{g_2\cos^2\varphi_2 - g_1\cos^2\varphi_1} + s = \frac{5}{2}\,\omega^2 c\,\frac{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}{g_2\cos^2\varphi_2 - g_1\cos^2\varphi_1}.$$

Ora si ha:

$$\omega^2 c = \omega^2 a\,(1-s)$$

e trascurando il termine $\omega^2 s$ possiamo nella precedente relazione sostituire $\omega^2 a$ ad $\omega^2 c$, ed abbiamo una relazione analoga e più generale di quella di Clairaut:

[62] $$\frac{g_1-g_2}{g_2\cos^2\varphi_2 - g_1\cos^2\varphi_1} + s = \frac{5}{2}\,\omega^2 a\,\frac{\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1}{g_2\cos^2\varphi_2 - g_1\cos^2\varphi_1}$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

alla quale effettivamente si riduce per:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_2 = o \qquad g_1 = g_p \qquad g_2 = g_e.$$

Questa formola dà la possibilità di calcolare s direttamente con una coppia qualunque di valori della gravità. Da essa possiamo anche ricavare espressioni approssimate per la gravità ad una qualsiasi latitudine. Poniamo infatti:

$$\varphi_2 = o \qquad g_2 = g_e \qquad \varphi_1 = \varphi \qquad g_1 = g$$

e sarà:

$$\frac{g - g_e}{g_e - g \cos^2 \varphi} + s = \frac{5}{2} \omega^2 a \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{g_e - g \cos^2 \varphi}$$

da cui col solito procedimento:

[63] $$g\,(\mathrm{I} - s \cos^2 \varphi) = g_e \left\{ \mathrm{I} + \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} \operatorname{sen}^2 \varphi - s \right\}.$$

Formole di questo tipo non sono state finora considerate. Per arrivare ad una formola nota conviene procedere ad ulteriori approssimazioni. Si ha:

$$\frac{\mathrm{I} - s}{\mathrm{I} - s \cos^2 \varphi} = (\mathrm{I} - s)\,(\mathrm{I} + s \cos^2 \varphi) = \mathrm{I} - s \operatorname{sen}^2 \varphi$$

e sostituendo nella precedente:

$$g = g_e \left\{ \mathrm{I} + \left(\frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} - s \right) \operatorname{sen}^2 \varphi \right\}$$

che è la formola ben nota di Clairaut.

§ 2. - Relazioni lineari fra tre valori qualsiansi della gravità.

Se consideriamo tre valori g_1, g_2, g_3 della gravità corrispondenti alle latitudini φ_1, φ_2, φ_3 dalla formola fondamentale (47) ricaviamo:

$$\frac{\mathrm{I}}{c} g_1 = A^* z_1 + \frac{B^*}{z_1} \qquad \frac{\mathrm{I}}{c} g_2 = A^* z_2 + \frac{B^*}{z_2} \qquad \frac{\mathrm{I}}{c} g_3 = A^* z_3 + \frac{B^*}{z_3}$$

ed eliminando A^*, B^* fra queste tre relazioni, si ha:

[64] $$\begin{vmatrix} g_1 & z_1 & \frac{\mathrm{I}}{z_1} \\ g_2 & z_2 & \frac{\mathrm{I}}{z_2} \\ g_3 & z_3 & \frac{\mathrm{I}}{z_3} \end{vmatrix} = o$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

che è una relazione lineare omogenea, sempre verificata da tre valori qualsiansi della gravità. Possiamo anche scrivere:

$$z_1 g_1 (z_2^2 - z_3^2) + z_2 g_2 (z_3^2 - z_1^2) + z_3 g_3 (z_1^2 - z_2^2) = 0$$

o anche:

[65] $$g_1 (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_1} + g_2 (\cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_1) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_2} + g_3 (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_3} = 0.$$

Questa relazione permette di trovare immediatamente il valore della gravità in un punto qualunque, mediante i valori della gravità in due altri punti. Ed in essa delle costanti geometriche dell'ellissoide non compare che l'eccentricità aggiunta; essa è quindi indipendente dai valori assoluti degli assi.

Se ne possono anche dedurre formole e conseguenze notevoli. Poniamo nella [65]:

$$\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = \varphi \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \qquad \cos^2 \varphi_1 = 1$$
$$g_1 = g_e \qquad g_2 = g \qquad g_3 = g_p \qquad \cos^2 \varphi_3 = 0$$

e avremo:

[65'] $$g_e \cos^2 \varphi \sqrt{1 + i^2} + g_p \operatorname{sen}^2 \varphi = g \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi}$$

che si può scrivere:

[66] $$g = \frac{g_p + (g_e \sqrt{1 + i^2} - g_p) \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi}}$$

formola che dà la gravità ad una latitudine qualunque, mediante i valori della gravità al polo ed all'equatore, e può considerarsi come la generalizzazione di quella ben nota di Clairaut (valida rigorosamente solo sulla sfera, $i = 0$):

$$g = g_e + (g_p - g_e) \cos^2 \varphi.$$

La formola (66) può anche scriversi più simmetricamente:

[67] $$g = \frac{a\, g_e \cos^2 \varphi + c\, g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

formola che è suscettibile di essere estesa all'ellissoide a tre assi, come ha dimostrato recentemente il prof. Mineo [1], che ha trovato partendo dalla formola data dal Pizzetti in questo caso:

[68] $$g = \frac{(a\, g_a \cos^2 \omega + b\, g_b \operatorname{sen}^2 \omega) \cos^2 \varphi + c\, g_c \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \omega + b^2 \operatorname{sen}^2 \omega) \cos^2 \varphi + c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

ove ω rappresenta la longitudine.

---

[1] C. Mineo, *Sulla gravità superficiale d'un pianeta supposto ellissoidico a tre assi* (Boll. dell'Unione Mat. It., aprile 1928).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Se nella formola (66) si pone:

$$g_p + (g_e \sqrt{1+i^2} - g_p) \cos^2\varphi = A\,(1 + i^2\cos^2\varphi) + B$$

si trova:

$$A\,i^2 = g_e \sqrt{1+i^2} - g_p$$

[69] $$B\,i^2 = (i^2+1)\,g_p - g_e\sqrt{1+i^2} \qquad A + B = g_p$$

e sostituendo in (66):

[70] $$g = A\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi} + \frac{B}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}}.$$

Le costanti A, B hanno, in base a questa formola una relazione assai semplice colle A^*, B^*, cioè:

[71] $$A = c\,A^* \qquad B = c\,B^*$$

e le formole (69) danno le espressioni di queste costanti mediante i valori della gravità al polo ed all'equatore.

Altre formole interessanti si possono ricavare dalla relazione [65] ponendo successivamente:

$$\varphi_3 = 0 \qquad g_3 = g_e \qquad\qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \qquad g_3 = g_p$$

Si trovano così le due formole:

[72]
$$g_e = \frac{g_2 \operatorname{sen}^2\varphi_1 \sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_2} - g_1\operatorname{sen}^2\varphi_2\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_1}}{\sqrt{1+i^2}\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}$$
$$g_p = \frac{g_1\cos^2\varphi_2\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_1} - g_2\cos^2\varphi_1\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_2}}{\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Queste formole danno il valore della gravità al polo ed all'equatore mediante una *coppia qualsiasi* di valori della gravità.

Siccome noi conosciamo ora un numero assai grande di valori della gravità, le formole precedenti ci permettono un numero praticamente illimitato di determinazioni di g_e, g_p. E reciprocamente quando i valori calcolati per g_e, g_p mediante una coppia g_1, g_2 risultassero notevolmente discordanti da quelli comunemente accettati, dovremo considerare come anomali i valori g_1, g_2 dai quali siamo partiti, od almeno uno di essi.

Interessanti risultati ha trovato, seguendo questo ordine di idee, la sig.a dott.sa Cecilia Dainotti, nella Nota « Determinazione della gravità al polo od all'equatore mediante coppie di valori osservati a varie latitudini ». (R. Acc. delle Scienze di Torino, *Atti*, giugno 1928).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

§ 3. - Determinazione dell'eccentricità mediante tre valori della gravità, unicità della soluzione.

Se nella relazione [65], che lega tre valori qualsiansi della gravità alla superficie dell'ellissoide, consideriamo come noti i tre valori g_1, g_2, g_3 e le rispettive latitudini φ_1, φ_2, φ_3, la relazione stessa viene a contenere una sola quantità incognita, l'eccentricità i, e può quindi considerarsi come un'equazione che determina questa costante. Ci proponiamo di studiare tale equazione da questo punto di vista della possibilità di determinare l'eccentricità mediante tre valori della gravità e delle corrispondenti latitudini, e quindi senza alcuna preventiva conoscenza della grandezza degli assi.

Possiamo sempre supporre le latitudini comprese nel primo quadrante, e supporre che sia:

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3.$$

Poniamo anche:

$$a_1 = \cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3 \qquad a_2 = \cos^2\varphi_3 - \cos^2\varphi_1 \qquad a_3 = \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2$$

e avremo:

$$[73] \qquad a_1 > o \qquad a_2 < o \qquad a_3 > o$$

e la relazione [65] si può scrivere:

$$a_1 g_1 z_1 + a_2 g_2 z_2 + a_3 g_3 z_3 = o$$

che quadrando due volte diviene:

$$(a_1^2 g_1^2 z_1^2 + a_3^2 g_3^2 z_3^2 - a_2^2 g_2^2 z_2^2)^2 = 4\, a_1^2 a_3^2 g_1^2 g_3^2 z_1^2 z_3^2,$$

e non compare più in essa alcun radicale. Essa è della forma:

$$L i^4 + M i^2 + N = o$$

cioè un'equazione quadratica in i^2. Il problema proposto si riduce così alla risoluzione di una equazione di 2° grado. Osserviamo che si ha:

$$z_2^2 - z_3^3 = i^2 a_1 \qquad z_3^2 - z_1^2 = i^2 a_2 \qquad z_1^2 - z_2^2 = i^2 a_3$$

e quindi:

$$a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2 = o.$$

Possiamo perciò ridurre il sistema di equazioni da studiarsi alla terna seguente:

$$a_1 g_1 z_1 + a_2 g_2 z_2 + a_3 g_3 z_3 = o$$
$$a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2 = o$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = o.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Geometricamente questo problema equivale alla ricerca dei punti d'intersezione di una conica con una retta, quando si considerino z_1, z_2, z_3, come le coordinate omogenee di un punto del piano.

Abbiamo anche:

$$z_1 > z_2 > z_3$$

e noi porremo:

$$\frac{z_1}{z_3} = x \qquad \frac{z_2}{z_3} = y \qquad \text{quindi } x > 1, \quad y > 1$$

e le equazioni da risolvere divengono:

[74]
$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 = 0$$
$$a_1 g_1 x + a_2 g_2 y + a_3 g_3 = 0$$

colla condizione:

[75]
$$a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Eliminando y, troviamo l'equazione in x:

[76]
$$a_1 (a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2) x^2 + 2 a_1 a_3 g_1 g_3 x + a_3 (a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2) = 0$$

il cui discriminante è:

$$\Delta = a_1^2 a_3^2 g_1^2 g_3^2 - a_1 a_3 (a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2)(a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2)$$

ossia:

$$\Delta = -a_1 a_2 a_3 (a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2).$$

La positività del discriminante dipende quindi [73] dalla positività del trinomio:

$$\Delta_1 = a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2.$$

Ora noi dobbiamo supporre che g_1, g_2, g_3 siano tre valori effettivamente rappresentanti la gravità sopra un'ellissoide di rotazione di eccentricità i. Perciò dobbiamo anche ammettere che esistano due costanti A, B tali che:

$$g_h = A z_h + \frac{B}{z_h} \qquad h = 1, 2, 3$$

in conformità alla formola fondamentale della gravità. Ora noi possiamo scrivere per la [75]:

$$\Delta_1 = a_3 (g_3^2 - g_2^2) - a_1 (g_2^2 - g_1^2)$$

mentre per quello che si è detto:

$$g_3^2 - g_2^2 = -i^2 a_1 A^2 + B^2 i^2 \frac{a_1}{z_3^2 z_2^2}$$
$$g_2^2 - g_1^2 = -i^2 a_3 A^2 + B^2 i^2 \frac{a_3}{z_1^2 z_2^2}$$

da cui:

$$(g_3^2 - g_2^2) a_3 - (g_2^2 - g_1^2) a_1 = i^2 B^2 \frac{a_1 a_3}{z_2^2} \left(\frac{1}{z_3^2} - \frac{1}{z_1^2} \right)$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

ed il secondo membro è certamente positivo, poichè:

$$z_1^2 > z_2^2 > z_3^2 \qquad a_1 > 0 \qquad a_3 > 0 .$$

L'equazione [76] ha quindi le due radici reali (¹).

Chiamando x_1, x_2 queste radici si ha:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2\, a_1 a_3 g_1 g_3}{a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2} \qquad\qquad x_1 x_2 = \frac{a_3 (a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2)}{a_1 (a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2)} .$$

Ora per la relazione [75] si ha:

$$a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 = a_1 (g_1^2 - g_2^2) - a_3 g_2^2$$

quindi essendo:

$$g_1 < g_2 \qquad a_1 > 0 \qquad a_3 > 0$$

sarà:

$$a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 < 0$$

e perciò:

$$x_1 + x_2 > 0 .$$

Le due radici non possono dunque essere entrambe negative. Si ha poi anche per la [75]:

$$x_1 x_2 = \frac{a_1 a_3 g_2^2 - a_3^2 (g_3^2 - g_2^2)}{a_1 a_3 g_2^2 + a_1^2 (g_2^2 - g_1^2)} < 1 .$$

Ne segue che se le due radici sono entrambe positive ***una sota*** può essere maggiore dell'unità. Perciò in ogni caso ***una sola radice*** soddisfa alle condizioni del problema.

Se x_1 è questa radice osserviamo che si ha:

$$z_3^2 \cos^2 \varphi_1 - z_1^2 \cos^2 \varphi_3 = \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_3 = - a_2$$

(¹) Il prof. Boggio mi ha indicato anche un'altra elegante espressione per il determinante Δ che ne dimostra parimenti la positività. Si ha infatti:

$$\Delta_1 = \sum_{h=1}^{3} a_h g_h^2 = B^2 \sum_{h=1}^{3} a_h \left(A^2 z_h^2 + \frac{B^2}{z_h^2} + 2\, A\, B \right)$$

cioè:

$$\sum_{h=1}^{3} a_h g_h^2 = B^2 \sum_{h=1}^{3} \frac{a_h}{z_h^2}$$

Inoltre:

$$\sum_{h=1}^{3} \frac{a_h}{z_h^2} = \frac{1}{i^2} \left(\frac{z_2^2 - z_3^2}{z_1^2} + \frac{z_3^2 - z_2^2}{z_2^2} + \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_3^2} \right) =$$

$$= - \frac{1}{i^2} \frac{(z_2^2 - z_3^2)(z_3^2 - z_2^2)(z_1^2 - z_2^2)}{z_1^1 z_2^2 z_3^2} = - i^4 \frac{a_1 a_2 a_3}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}$$

e quindi:

$$\Delta = \left(\frac{i^2 a_1 a_2 a_3 B}{z_1 z_2 z_3} \right)^2 .$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

e quindi:

$$i^2 = \frac{z_3^2 - z_1^2}{a_2} = \frac{z_3^2 - z_1^2}{z_1^2 \cos^2 \varphi_3 - z_3^2 \cos^2 \varphi_1}$$

ossia:

[77] $$i^2 = \frac{x_1^2 - 1}{\cos_1 \varphi_1 - x_1^2 \cos^2 \varphi_1}.$$

Questa relazione determina i^2 in funzione di x_1.

Possiamo dunque concludere:

Tre valori qualsiansi della gravità, a latitudini conosciute, determinano in modo unico *il valore dell'eccentricità dell'ellissoide, al quale esse appartengono.*

Si può anche osservare che la condizione:

[78] $$a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2 > o$$

necessaria perchè siano reali le radici dell'equazione (76) non può essere conseguenza delle sole diseguaglianze $g_1 < g_2 < g_3$ [1], come è facile vedere. Però se essa è soddisfatta, allora le radici della equazioni sono reali e soddisfano a tutte le condizioni che abbiamo trovato. Possiamo quindi asserire:

Dati tre valori qualunque per g_1, g_2, g_3, *condizione necessaria perchè esista un ellissoide, ed uno solo, al quale esse appartengono è che sia soddisfatta la relazione* [78].

Effettivamente una volta conosciuto il valore della eccentricità aggiunta i, la relazione (55) permette di determinare la costante B^*, e quindi il valore assoluto del semiasse c può essere dedotto da una qualsiasi delle tre relazioni della forma [50] che si possono formare coi tre valori g_1, g_2, g_3.

Quando sia noto c, da una qualsiasi delle formole che danno le g potremo ricavare A^*, e quindi anche la densità media dalla formola:

$$4\pi\gamma k = 3A^* + \frac{i^2+3}{i^2+1} B^* + 2\omega^2.$$

Queste ultime determinazioni si fanno linearmente. Possiamo quindi concludere che il problema della determinazione dell'ellissoide e della sua massa mediante tre valori della gravità è completamente risoluto ed ha una soluzione unica.

È interessante considerare qualche caso speciale nel quale le formole generali si presentano in forma assai più semplice. Così nel caso già considerato

---

(1) Difatti posto:

$$g_2^2 = g_1^2 + \varepsilon \qquad g_3^2 = g_2^2 + \delta$$

si ha:

$$a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2 = a_2 \varepsilon + a_3 (\varepsilon + \delta)$$

cioè:

$$\Delta_1 = a_3 \delta - a_1 \varepsilon$$

e quindi per δ abbastanza piccolo $\Delta < o$.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

in cui due delle gravità conosciute sono rispettivamente quelle all'equatore ed al polo. Si ha allora, come si è visto al § 1:

$$g_e \cos^2 \varphi \sqrt{1 + i^2} + g_p \operatorname{sen}^2 \varphi = g \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi}$$

e introducendo la variabile:

$$j = \frac{a}{c} = \sqrt{1 + i^2}$$

che non è altro che il rapporto $z_1 : z_3$ del caso generale, dalla relazione precedente si ricava:

$$(j\, g_e \cos^2 \varphi + g_p \operatorname{sen}^2 \varphi)^2 = g^2 (j^2 \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

ossia:

[79] $$(g^2 - g_e^2 \cos^2 \varphi)\, j^2 - 2\, j\, g_e\, g_p \operatorname{sen}^2 \varphi - (g^2 - g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \operatorname{tang}^2 \varphi = o$$

il cui discriminante è:

[80] $$\Delta = (g_e^2 \cos^2 \varphi + g_p \operatorname{sen}^2 \varphi - g^2)\, g^2 \operatorname{tang}^2 \varphi$$

ed è facile dimostrarne direttamente la positività, poichè in base alla formola [67] se si considerano i vettori G ed A di componenti:

$$G = (g_e \cos \varphi, g_p \operatorname{sen} \varphi) \qquad A = (a \cos \varphi, c \operatorname{sen} \varphi)$$

la formola stessa si può scrivere:

$$g = G \cos (G\, A)$$

e quindi si ha $| g | < | G |$, ossia:

$$g^2 < g^2_e \cos^2 \varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Essendo $g > g_e$ la differenza $g^2 - g^2_e \cos^2 \varphi$ è sempre positiva, quindi la radice superiore all'unità, che dobbiamo assumere per il valore di i, sarà:

[81] $$j = \frac{a}{c} = \frac{g_e\, g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{g^2 - g^2_e \cos^2 \varphi} + \frac{g \operatorname{tang} \varphi}{g^2 - g_e^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{g_e^2 \cos^2 \varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - g^2}\,.$$

Tenendo conto dell'identità:

$$(g_e\, g_p \operatorname{sen}^2 \varphi + \sqrt{\Delta})\, (g_e\, g_p \cos^2 \varphi - \sqrt{\Delta}) = (g^2 - g_e \cos^2 \varphi)\, (g^2 - g_p \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

ove per Δ s'intende l'espressione (80), si ha anche:

[81'] $$\frac{c}{a} = \frac{g_e\, g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{g^2 - g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{g \operatorname{cotang} \varphi}{g^2 - g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \sqrt{g_e^2 \cos^2 \varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - g^2}\,.$$

Quando per g si assume il valore g_q della gravità a 45° si ha:

[82] $$\frac{a}{c} = \frac{g_e\, g_p}{2 g_q^2 - g_e^2} + \frac{g_q}{2\, g_q^2 - g_e^2} \sqrt{\frac{1}{2} (g_e^2 + g_p^2) - g_q^2}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{g_e\, g_p}{2\, g_q^2 - g_p^2} - \frac{g_q}{2\, g_q^2 - g_p^2} \sqrt{\frac{1}{2} (g_e^2 + g_p^2) - g_q^2}\,.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Nella nota: *Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità* (Acc. dei Lincei, 1° Sem. 1927) io ho calcolato il valore dello schiacciamento terrestre mediante le formole precedenti, e prendendo per g_e, g_q, g_p i valori dell'*Ann. du Bureau des Long*, 1926, ho trovato:

$$s = \frac{1}{256{,}9}$$

cioè un valore un po' maggiore di quello ordinariamente accettato $s = 1 : 297$. Questo risultato è stato discusso dal prof. E. Bianchi [1] e dal prof. G. Cassinis [2], i quali hanno messo in evidenza come piccoli errori di g possono portare ad errori notevoli nel valore di s, calcolato nel modo indicato, ossia, secondo una frase del Bianchi, hanno dimostrato la grande *sensibilità* delle formole rispetto alle variazioni dei valori di g.

Per chiarire meglio la quistione giova fare un calcolo inverso, cioè ammettere per lo schiacciamento il valore ordinariamente accettato, e così per due dei valori della gravità, e calcolare poi il terzo mediante la relazione [65'] supposto $\varphi = 45°$.

Si ha allora:

$$g_p + j\,g_e = g_q \sqrt{2\,(1 + j^2)}. \tag{83}$$

Ammesso il valore $s = 1 : 297$, si ha $j = 1 + s = 1{,}00337$ mentre dalla formola di Helmert (1901) risulta:

$$g_e = 978{,}030 \qquad g_q = 980{,}616 \qquad g_p = 983{,}215.$$

Prendendo per g_e, g_q, j questi valori e calcolando g_p mediante la formola precedente si trova:

$$g_p' = 983{,}2106.$$

Cioè confrontando col valore di Helmert:

$$g_p - g_p' = 0{,}004.$$

Basterebbe quindi una correzione di questo ordine di grandezza nel valore di g_p perchè la formola per lo schiacciamento desse un valore esatto, secondo le determinazioni attuali. Correzioni di grandezza analoga si troverebbero per gli altri due valori, con un procedimento simile. Perciò quello che possiamo concludere è che i quattro valori assunti per s, g_e, g_q, g_p non soddisfano esattamente alla relazione [83], quando si tenga conto della terza cifra decimale.

La correzione che converrebbe portare al valore di g_p d'altra parte non è superiore all'incertezza che si ha circa il valore della gravità al polo; e d'altra parte la formola di Helmert non presuppone una forma rigorosamente ellissoidica

(1) E. Bianchi, Osservazioni sulla comunicazione di C. Somigliana (Rendiconti del Seminario Mat. e Fis. di Milano, Vol. I, 1927).

(2) G. Cassinis Sulla determinazione dello schiacciamento terrestre mediante valori della gravità (Atti della R. Acc. di Torino, Vol. LXII, 1927).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

per il geoide. Il risultato precedente ci dà quindi un criterio, per conoscere di quanto essa se ne scosti; basterebbe cioè prendere per valore della gravità al polo:

$$g_p' = 983{,}211$$

perchè il valore dello schiacciamento risultasse quello di Hayford (1909).

§ 4. - Sviluppo in serie dell'espressione della gravità superficiale.

Le formule [47], [48], [70] colle quali abbiamo espresso la gravità alla superficie dell'ellissoide, e che sostanzialmente coincidono con quella data dal Pizzetti, si prestano mirabilmente per ottenerne degli sviluppi in serie per la gravità in funzione della latitudine. Tali sviluppi infatti senza alcuna complicazione possono essere spinti a qualsiasi numero di termini.

La formola [70] dà:

$$g = A\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi} + \frac{B}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}} \tag{84}$$

ove A, B sono date dalle formole [46] [71].

Possiamo anche osservare che essendo:

$$1 + i^2\cos^2\varphi = \frac{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}{1 - e^2}$$

si ha anche:

$$g = C\sqrt{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi} + \frac{D}{\sqrt{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} \tag{85}$$

ove:

$$C = \frac{A}{\sqrt{1-e^2}} \qquad D = B\sqrt{1-e^2}$$

ed anche:

$$e^2 C = g_e - g_p\sqrt{1-c^2} \qquad e^2 D = g_p\sqrt{1-e^2} - (1-e^2)\,g_e \tag{86}$$

che danno le costanti C, D in funzione dei valori della gravità all'equatore ed al polo.

Ora si hanno i ben noti sviluppi:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots 2n}x^n$$

$$\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}x^n$$

dai quali ponendo successivamente:

$$x = i^2\cos^2\varphi \qquad x = -e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

e sostituendo nelle formole [84] [85] possiamo avere due corrispondenti forme di sviluppo di g in funzione della latitudine.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Nel primo lo sviluppo ha la forma:

[87] $$g = \alpha_0 + i^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi + i^4 \alpha_2 \cos^4 \varphi + \ldots$$

e si trova immediatamente pei coefficienti:

$$\alpha_0 = A + B \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\alpha_n = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} (A - (2n-1)\, B)$$

Nel secondo caso [85] si ha uno sviluppo della forma:

[88] $$g = \beta_0 + e^2 \beta_1 \operatorname{sen}^2 \varphi + e^4 \beta_2 \operatorname{sen}^4 \varphi + \ldots$$

e si trova:

$$\beta_0 = C + D \qquad \beta_1 = -\frac{1}{2}(C - D)$$

$$B_n = -\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2_n} (C - (2n-1)\, D).$$

Questi coefficienti α_n, β_n si possono poi facilmente esprimere anche coi valori della gravità al polo ed all'equatore, e si trova:

$$\alpha_0 = g_p \qquad i^2 \alpha_1 = \left(1 + \frac{i^2}{2}\right) g_p - g_e \sqrt{1 + i^2}$$

$$i^2 \alpha_n = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \quad 2n} \left\{2\, n\, g_e \sqrt{1 + i^2} - ((2n-1)\, i^2 + 2\, n)\, g_p\right\}.$$

E analogamente:

$$\beta_0 = g_e \qquad e^2 \beta_1 = g_p \sqrt{1 - e^2} - \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) g_e$$

$$e^2 \beta_n = -\frac{1 \cdot 3 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \ldots 2\, n} \left\{g_e\, (2\, n - (2n-1)\, e^2) - 2\, n\, g_p \sqrt{1 - e^2}\right\}.$$

Dagli sviluppi precedenti si hanno anche le seguenti espressioni per g_e, g_p:

$$g_e = \alpha_0 + i^2 \alpha_1 + i^4 \alpha_2 + \ldots$$

$$g_p = \beta_0 + e^2 \beta_1 + e^4 \beta_2 + \ldots$$

Si possono così avere immediatamente i coefficienti dei termini di qualsiasi ordine, e si potranno anche ottenere con facilità dei limiti superiori per gli errori che si commettono arrestando gli sviluppi ad un certo termine. Della ricerca di questi limiti superiori si è occupato il prof. E. Laura, servendosi però di forme di sviluppo in serie assai meno semplice delle nostre (1).

(1) E. Laura, *Sul calcolo dei limiti superiori dei resti nelle formole che danno la gravità alla superficie di un pianeta.* Memorie della Soc. Astr. Ital. N. S. vol. II, 1923.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

La serie [88] arrestata al terzo termine, ed introducendo $\operatorname{sen}^2 2\varphi$ invece di $\operatorname{sen}^2 \varphi$, diviene:

$$g = \beta_0 + (\beta_1 + e^2 \beta_2)\, e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1}{4}\, e^4 \beta_2 \operatorname{sen}^2 2\varphi$$

cioè prende la forma della classica formola di Helmert. In essa però i coefficienti sono teoricamente definiti in base alle relazioni precedenti.

Nella mia nota: *Sulla gravità normale e la formola di Helmert* (Acc. dei Lincei, 1º Sem. 1928) ho calcolato i coefficienti dello sviluppo precedente, prendendo i valori di g_e, g_p della formola di Helmert (Postdam, 1901):

$$g_e = 978{,}030 \qquad g_p = 983{,}215$$

ed ammettendo per e^2 il valore calcolato in base al valore 1 : 297 per lo schiacciamento:

$$e^2 = 0{,}006722.$$

Le differenze fra i coefficienti così calcolati e quelli della formola di Helmert sono risultate assai piccole, avendo trovato:

$$g = 978{,}030\,(1 + 0{,}005301 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0{,}0000058 \operatorname{sen}^2 2\varphi)$$

mentre come è noto, la formola di Helmert è:

$$g = 978{,}030\,(1 + 0{,}005302 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0{,}000007 \operatorname{sen}^2 \varphi).$$

Questa piccola differenza nei coefficienti concorda del resto col risultato a cui già siamo arrivati circa l'incompatibilità dei valori della gravità e dello schiacciamento che servono di base della formola di Helmert colla teoria rigorosa della gravità alla superficie di un geoide rigorosamente ellissoidico.

Qualora fosse accettata questa piccola modificazione, che del resto è sensibile soltanto nel secondo coefficiente, la formola normale della gravità verrebbe ad accordarsi colla teoria del campo gravitazionale ellissoidico di rotazione.

§ 5. - Sviluppo in serie della funzione $C(i)$.

Abbiamo chiamato *funzione di Clairaut* la funzione definita dalla espressione:

$$C(i) = \frac{1}{4}\,\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{2n}}{2n+3}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)\, i^{2n}}{(2n+3)(2n+5)}}.$$

Per il calcolo delle espressioni considerate precedentemente ed anche per avere un'espressione completa del 2º membro della formola classica di Clairaut, è necessario conoscere i valori numerici dei coefficienti dello sviluppo in

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

serie della funzione $C(i)$. Questi valori si ottengono mediante le formole che danno i coefficienti dello sviluppo in serie del rapporto di due serie convergenti.

Posto:

$$\frac{a_0 + a_1 i^2 + a_2 i^4 + \ldots}{b_0 + b_1 i^2 + b_2 i^4 + \ldots} = c_0 + c_1 i^2 + c_2 i^4 + \ldots$$

si ha:

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, \; c_1 = \frac{1}{b_0^2}(a_1 b_0 - a_0 b_1), \ldots$$

e più generalmente sotto forma di determinante:

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots & a_2 \\ \ldots & & & & \ldots & \ldots \\ b_n & & & & b_1 & a_n \end{vmatrix}.$$

In base a questa formula, se poniamo:

$$C(i) = C_0 + C_1 i^2 + C_2 i^2 + \ldots$$

troviamo:

$$C_n = \frac{1}{4} 3^{n+1} 5^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{3 \cdot 5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5 \cdot 7} & \frac{1}{3 \cdot 5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ \ldots & & & & \ldots \\ \frac{(-1)^n (n+1)}{(2n+3)(2n+5)} & \ldots & & -\frac{2}{57} & \frac{(-1)^n}{2n+3} \end{vmatrix}.$$

Si trovano così i seguenti valori:

$$C_0 = \frac{5}{4} \qquad C_1 = \frac{5}{4} \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 7} \qquad C_2 = -\frac{5}{4} \cdot \frac{2^2}{7^2} \frac{4}{5}$$

$$C_3 = \frac{5}{4} \frac{2^3}{7^3} \frac{239}{3 \cdot 5 \cdot 11} \qquad C_4 = -\frac{5}{4} \frac{2^4}{7^4} \frac{5113}{11 \cdot 13} \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Generalmente non occorre oltrepassare la potenza i^2, e quindi si può porre

$$C(i) = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 7} i^2 - \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 7} i^4 + \ldots\right)$$

per cui la formola classica di Clairaut diviene:

$$\frac{g_p}{c} - \frac{g_e}{a} = \frac{5}{2} \omega^2 \left(1 + \frac{9}{35} i^2 - \frac{16}{245} i^4 + \ldots\right).$$

Le costanti A, B della formola generale per la gravità possono parimenti essere calcolate mediante l'espressione della funzione $C(i)$. Si ha infatti (55), (58) (71):

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

$$A = \frac{4}{3} \pi \gamma k c - \frac{2}{3} c \left\{ 1 + \frac{i^2 + 3}{i^2} C(i) \right\}$$
$$B = 2 \omega^2 c \frac{i^2 + 1}{i^2} C(i)$$

ed espressioni analoghe si possono scriv per le costanti C, D.

Sostituendo queste espressioni di A, nella formola dello sviluppo in serie (87):

$$g = \alpha_0 + i^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi + \alpha_2 \cos^4 \varphi + \ldots$$

dove:

$$\alpha_0 = A + B \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} (A -) \qquad \alpha_2 = - \frac{1}{2 \cdot 4} (A - 3B)$$

si trova:

$$\alpha_0 = \frac{4}{3} \pi \gamma k c - \frac{2}{3} c + \frac{4}{3} \omega^2 C(i)$$
$$i^2 \alpha_2 = \left(\frac{2}{3} \pi \gamma k - \frac{1}{3} \omega^2 \right) i^2 - \frac{2}{3} \omega^2 c (2 i^2 + 3) c C(i).$$

Queste espressioni sono finite per i , e la formola precedente riproduce in questo caso la formola per la gravipel geoide sferico ($c = R$):

$$\frac{1}{R} g = \frac{4}{3} \pi \gamma k + - \frac{5}{2} \omega^2 \cos^2 \varphi.$$

Si ha poi:

$$i^4 \alpha_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \omega^2 c (5 i^2 + 6) i^2 C - \frac{i^4}{2 \cdot 3} \pi \gamma k c + \frac{\omega^2}{3 \cdot 4} i^4 c.$$

Arrestando queste espressioni ai tini che contengono la potenza i^2, si hanno le espressioni approssimate senti che legano i primi coefficienti dello sviluppo α_0, α_1, α_2 allo schiacciamo s:

$$\alpha_0 = \frac{4}{3} \pi \gamma k c + \omega^2 c + \omega^2 c s$$
$$i^2 \alpha_1 = - \frac{5}{2} \omega^2 c + 4 s c \left(\gamma k - \omega^2 \right)$$
$$i^4 \alpha_2 = - \frac{5}{2} \omega^2 c s$$

dove nei secondi membri si è posto i^2 ; s.

§ 6. - La gravità neale, conclusione.

Nelle considerazioni precedenti abbb cercato di presentare in forma semplice e completa la teoria del campo grazionale dell'ellissoide di rotazione, e di stabilire delle formole che potessero ee utili per le necessità pratiche della gravimetria, e delle sue applicazioni altudio della superficie terrestre.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

È per verità un fatto singolare che la teoria così chiara, semplice ed intuitiva, di cui ha posto i fondamenti il Pizzetti, non sia stata finora chiamata a collaborare nella rappresentazione effettiva del campo reale della gravitazione, come se si trattasse di una pura speculazione teorica, senza legami colla realtà. Forse la forma un po' complicata di alcuna delle formole del Pizzetti ha contribuito a questo risultato. Ma noi abbiamo potuto dimostrare che da quelle formule se ne possono dedurre altre semplicissime e che hanno i caratteri necessari per l'applicabilità numerica e pratica.

Un contributo in particolar modo importante ci sembra possa portare questa teoria nel fissare il concetto della gravità normale, o teorica, alla quale debbono essere riferiti i valori della gravità forniti dall'osservazione.

Per avere un'idea esatta delle particolarità del campo gravitazionale reale, si presenta naturalmente l'opportunità di confrontarlo con un campo normale rigorosamente definito. La scelta di questo campo normale è evidentemente arbitraria, come in un problema di geometria è arbitraria la scelta della origine delle coordinate, o dell'unità di misura delle lunghezze. Soltanto criteri di opportunità ci possono guidare.

Ora nel caso nostro, il campo gravitazionale teorico dell'ellissoide di rotazione si presenta come il più adatto in quanto quello reale ne differisce assai poco, e già esso è stato adottato come campo, per così dire, *campione*, nello studio della deviazione della verticale. È quindi perfettamente logico che per lo studio del *vettore* che rappresenta l'accelerazione di gravità si adottino gli stessi elementi di riferimento, per quanto riguarda la sua direzione e per ciò che riguarda la sua intensità.

Una proposta di questo genere è già stata presentata all'assemblea della *Unione Internazionale geodetica e geofisica*, tenutasi a Praga nel settembre del 1927, dalla *American Geophysical Union*, e precisamente nella forma seguente:

Est-il opportun et possible d'adopter une formule pour l'intensité de la pesanteur théorique et doit-elle reposer ou non sur la considération de l'ellipsoïde international? (Bullettin géodésique, n. 14, pag. 89).

Nel *Commentaire* che illustra tale quistione si legge inoltre:

Dans l'étude de la figure de la Terre au moyen de l'intensité de la pesanteur, il parait desiderable d'employer la même surface de référence que dans son étude au moyen de la déviation de la vertical, pour que les resultats des deux méthodes soient rapidement comparables. L'avantage de l'emploi d'une formule, basée sur l'ellipsoïde international adopté, semble l'emporter sur l'inconvenient d'avoir à recalculer les anomalies deja calculées par la formule de Helmert (1901).

La proposta era accompagnata da una Nota, non pubblicata, del sig. Lambert del *Coast and Geodetic Survey*, che la illustrava, e di cui ho avuto comunicazione per cortesia del sig. Generale G. Perrier, Segretario dell'Unione internazionale geodetica e geofisica.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Tuttavia a Praga non fu presa alcuna deliberazione risolutiva sulla quistione. Nel Bull. géod., n. 17 a pag. 26, si legge:

La Commission a été d'avis qu'il n'y a pas lieu de fixer à presente une formule unique donnant les intensités théoriques.

Elle à resolu de ne point emetre d'opinion au sujet de la formule à employer jusqu'à ce qu'il soit possibile de faire choix d'une formule definitive.

Indipendentemente e prima di queste discussioni il prof. E. Bianchi, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Brera, in una breve Nota dei *Rendiconti* del Seminario matematico e fisico di Milano (*Osservazioni sulla Comunicazione di C. Somigliana «sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità»*, vol. I, 1927, V), proponeva di rappresentare la gravità teorica mediante una delle formule della nostra teoria, e precisamente la [67] di questa Memoria, fissando come elementi fondamentali: la gravità all'equatore, il semiasse maggiore e lo schiacciamento dell'ellissoide di riferimento.

Anche il prof. G. Silva, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova in una Nota *Sulla definizione della gravità normale* (Rend. Acc. dei Lincei, dicembre 1928) dopo aver discussa acutamente la quistione sotto vari punti di vista, arriva a conclusioni concordanti sostanzialmente colle precedenti.

Ci sembra quindi che la quistione sia ormai matura per una discussione che porti alla sua definitiva risoluzione. E crediamo perciò opportuno di presentare come conclusione pratica di tutta la nostra ricerca le seguenti definizioni, per ciò che debba intendersi come *gravità normale*, sia per quanto riguarda la intensità che per quanto riguarda la direzione:

1° La gravità normale, o teorica, è rappresentata dal vettore gravitazionale dell'ellissoide di riferimento, considerato come superficie di livello, ed è rappresentata sulla superficie dalla formola:

$$g_t = \frac{a\, g_e \cos^2\varphi + c\, g_n \operatorname{sen}^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

2° Questa formola contiene tre costanti: la gravità all'equatore ed al polo, g_e, g_p, ed il rapporto degli assi $c : a$, oppure lo schiacciamento $s = 1 - \frac{c}{a}$ Ma le costanti g_e, g_p possono esprimersi mediante uno dei semiassi ed il valore della gravità g ad una qualsiasi latitudine φ (oltre lo schiacciamento o l'eccentricità i) colle formole:

$$g_e = g\frac{\sqrt{1+i^2}}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}} - 2\,\omega^2 a\,\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{1+i^2\cos^2\varphi}\,C(i)$$

$$g_p = \frac{g}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}} + 2\,\omega^2 a\,\frac{\cos^2\varphi\sqrt{1+i^2}}{1+i^2\cos^2\varphi}\,C(i).$$

Perciò noi possiamo assumere come costanti fondamentali per la formola della gravità normale: a, s (oppure i) e la gravità g ad una latitudine opportunamente prefissata qualsiasi.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

Può essere utile a tal uopo la scelta della gravità a 45°, come meglio conosciuta. Le formole precedenti divengono in questo caso:

$$g_e = g_q \sqrt{\frac{2(i^2+1)}{i^2+2}} - \frac{2\omega^2 a}{i^2+2} C(i)$$

$$g_p = g_q \sqrt{\frac{2}{i^2+2}} + \frac{2\omega^2 a}{i^2+2} \sqrt{i^2+1}\, C(i).$$

3° Quando si vogliano sviluppi approssimati per serie con un numero n di termini, valgono gli sviluppi precedentemente trovati:

$$g = \alpha_0 + i^2 \alpha_1 \cos^2\varphi + \ldots + i^{2n} \alpha_n \cos^n \varphi$$

oppure:

$$g = \beta_0 + e^2 \beta_1 \operatorname{sen}^2\varphi + \ldots + e^{2n} \beta_n \operatorname{sen}^n \varphi$$

dove i coefficienti α_n, β_n possono esprimersi colle costanti fondamentali g_e, g_p, i od e mediante le formule stabilite nel § 4 del cap. II.

4° La gravità normale in un punto qualsiasi dello spazio esterno all'ellissoide è data dalle sue componenti g_r g_z, trovate nel § 7 del cap. I.

5° Quando si volesse adottare come superficie di riferimento un ellissoide a tre assi, anzichè un ellissoide di rotazione, la formola della gravità normale alla superficie è data da:

$$g = \frac{(a\, g_a \cos^2\omega + b\, g_b \operatorname{sen}^2\omega)\cos^2\varphi + c\, g_c \operatorname{sen}^2\varphi}{\sqrt{(a^2\cos^2\omega + b^2\operatorname{sen}^2\omega)\cos^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

(Mineo l. c.).

In questa formola i tre valori della gravità g_a, g_b, g_c sono legati da una relazione, per cui uno, ad es. g_b, può essere eliminato. Inoltre g_c, g_a possono essere espressi mediante le costanti a, b, c ed un valore della gravità in una località prefissata arbitraria. Le costanti fondamentali del campo possono essere in questo caso: il semiasse a, gli schiacciamenti di due delle ellissi principali e la gravità in una località qualunque.

6° Sia in questo ultimo caso, che nel precedente, la determinazione delle costanti fondamentali implica la determinazione della densità media (o della massa) dell'ellissoide di riferimento, la quale può essere calcolata colla formola rigorosa del Pizzetti:

$$\frac{g_a}{a} + \frac{g_b}{b} + \frac{g_c}{c} = 4\pi\gamma k - 2\omega^2.$$

Con queste considerazioni riteniamo di aver riunito tutti gli elementi principali necessari per una definitiva risoluzione della quistione intorno alla gravità normale.

Torino, Gennaio 1929.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1929MmSAI...4..425S

INDICE

CAPITOLO I.

CAPITOLO II.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System