1902AnPar..23D...1C

ÉTUDE

SUR LA

THÉORIE DES COMÈTES PÉRIODIQUES.

DÉSAGRÉGATION DES COMÈTES.
ROLE DE JUPITER A L'ÉGARD DES COMÈTES A COURTE PÉRIODE.

PAR M. O. CALLANDREAU.

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

La découverte mémorable, due à M. Schiaparelli, de la liaison entre les étoiles filantes et les comètes, qui, d'après l'interprétation de M. E. Weiss acceptée par M. Schiaparelli, suppose la dissolution des comètes par une action perturbatrice; les travaux récents de M. Brédikhine sur les essaims de météores ont familiarisé les astronomes avec la désagrégation des comètes. Tout le monde se rappelle la grande comète de 1882, qui a présenté après le passage au périhélie plusieurs noyaux secondaires dus sans doute à l'action du Soleil. Il est certain, d'autre part, que la comète 1889 V (Brooks) s'est divisée en fragments, en 1886, sous l'influence combinée des actions de Jupiter et du Soleil. Il y a plus : M. Schulhof, dans ces dernières années, en faisant aux comètes une application répétée du *criterium* de Tisserand, a mis en lumière le fait important de l'existence de groupes paraissant provenir de la désagrégation d'un nombre restreint de comètes par suite des perturbations de Jupiter, principalement vers l'aphélie de cette planète.

Je me suis proposé dans la présente étude d'apprécier d'une manière plus précise qu'on ne l'a fait jusqu'ici l'influence que le Soleil ou une planète telle que Jupiter peuvent exercer sur la désagrégation d'une comète aux différents points de son orbite; j'ai eu surtout en vue les comètes périodiques pour les-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

quelles les actions secondaires attribuées à des forces autres que la gravitation (force répulsive, émissions nucléaires, etc.), sont probablement négligeables. Cependant, l'exemple de la comète 1892 III (Holmes) montre que, même à de grandes distances du Soleil, ces actions spéciales peuvent encore se produire, si bien que des savants autorisés, comme H.-A. Newton et M. Brédikhine, admettent même la nécessité d'un agent différent de l'attraction dans la formation des météores (1).

A l'exemple de MM. Charlier et Picart, auxquels on doit d'avoir abordé l'étude de la question sous le point de vue dynamique (Cf. *Mécanique céleste* de Tisserand, t. IV, p. 268 et suiv.), il n'est tenu compte dans ce qui suit ni de l'action calorifique du Soleil, ni de la force répulsive. Une comète est assimilée à un essaim globulaire de particules, la densité restant partout la même ou variant seulement avec la distance au centre de l'essaim. Lorsque les équations différentielles du mouvement d'une particule ne sont pas sous une forme telle que les conditions de stabilité puissent être trouvées sans faire d'hypothèse sur la nature de la trajectoire relative, le rayon limite d'une particule *fictive* que l'on suppose décrire une orbite très peu différente d'une circonférence sert à définir la sphère de stabilité de la comète (2).

Je vais maintenant résumer les résultats obtenus, en laissant de côté les remarques préliminaires du premier Chapitre.

I. La condition de stabilité d'une particule *intérieure* à l'essaim entraîne l'inégalité

$$\frac{\mu}{M}\left(\frac{a'}{\rho_0}\right)^3 > 3 + 5e'^2,$$

a' et e' demi grand axe et excentricité de l'orbite de la comète;

M et μ produits des masses du Soleil et de la comète par la constante de l'attraction;

ρ_0 rayon de l'essaim.

---

(1) *Consulter* sur ce point : NEWTON (H.-A.), *Proceedings of the american philosophical Society*, t. XXXII; novembre 1893. — BRÉDIKHINE (TH.), *Sur quelques cas de morcellement des comètes* (*Mélanges mathématiques et astronomiques*, etc., t. VII, Liv. 3). — SCHULHOF (L.), *Les récents travaux sur l'origine des étoiles filantes* (*Revue générale des Sciences*, 1893).

(2) Édouard Roche s'est occupé de la figure des comètes en ramenant la question à un problème de Statique, la matière de la comète étant assimilée à un fluide qui tend à prendre à chaque instant la figure avec laquelle il pourrait être en équilibre en vertu des forces appliquées. Tisserand a exposé les travaux de Roche dans le tome IV de son Traité, et il en a rapproché les conclusions des travaux plus récents de MM. Charlier et Picart.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

La valeur limite de ρ_0 diminue quand e' augmente. On en conclut que la forme elliptique de l'orbite facilite la désagrégation.

II. Près de l'aphélie et du périhélie, la trajectoire elliptique du noyau, si elle n'est pas très aplatie, peut être assimilée à un arc de circonférence, ayant le Soleil pour centre.

Soient, en considérant le mouvement du noyau sur une circonférence,

r' la distance du noyau au Soleil;
$n'r'$ sa vitesse;
a le rayon limite de l'orbite d'une particule;
M et μ les mêmes quantités que tout à l'heure.

On trouve

$$n'\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} < \frac{2}{1 + 9\frac{M}{n'^2 r'^3}}.$$

Je ne me suis pas contenté de la considération des termes de degré le plus bas, et j'ai vérifié que les termes de degré plus élevé ne viennent pas changer la nature du résultat. Cette recherche n'était pas hors de propos, puisque le contraire s'était présenté dans le travail *Sur quelques cas de commensurabilité des moyens mouvements...* (1).

La distance du noyau au Soleil et sa vitesse de translation interviennent donc à la fois comme facteurs dans le résultat. De là suivent quelques conséquences :

1° La distance du noyau restant la même, l'étendue de la sphère de stabilité augmente avec la vitesse du noyau;

2° Le rapport des rayons des sphères de stabilité à l'aphélie et au périhélie est sensiblement égal à $\left(\frac{1-e'}{1+e'}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Le rôle des deux facteurs dont on parle : distance au Soleil du noyau et sa vitesse, apparaît aussi dans une Thèse intéressante récemment soutenue par le Dr W. Ebert (2). L'auteur étudie la stabilité d'un système tel que le système planétaire sous l'influence d'une étoile (de masse égale à celle du Soleil) arrivant dans le voisinage en ligne droite et avec une grande vitesse; il trouve que l'action perturbatrice de l'étoile sur le système est proportionnelle au produit de la racine carrée de la distance périhélie par l'inverse de la vitesse.

---

(1) *Annales de l'Observatoire de Paris.* Mémoires, t. XXII.

(2) *In Wieweit kann ein Stern mit grösser Geschwindigkeit die Stabilität eines Planetensystems beeinflussen?* Stockholm, 1896.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

On peut ajouter que, à défaut d'une formule contenant la vitesse relative des astres en présence, les calculateurs ont eu le sentiment que cette vitesse relative devait jouer un rôle.

III. Pour évaluer l'influence combinée du Soleil et de Jupiter, et la comparer à l'influence du Soleil près du périhélie, on suppose que la planète garde sa position relative par rapport à la comète, qu'elle reste en conjonction; ce qui se rapproche de la réalité quand Jupiter et la comète sont en même temps près de leurs aphélies, animés de vitesses minima. Il faut alors multiplier le rapport des rayons des sphères indiqué plus haut et donnant le rapport des rayons des sphères de stabilité à l'aphélie et au périhélie par $\left[1 + \frac{m''}{M}\left(\frac{r'}{\Delta}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$; $\frac{m''}{M}$ est le rapport de la masse de Jupiter à celle du Soleil; $\frac{r'}{\Delta}$ le rapport des distances de la comète au Soleil et à Jupiter.

Il suffit que la comète rase la sphère d'attraction de Jupiter, dont le rayon est les $\frac{3}{10}$ du rayon de l'orbite terrestre, pour que le facteur dépendant de $\frac{r'}{\Delta}$ prenne des valeurs assez grandes et que l'influence combinée du Soleil et de Jupiter pour désagréger la comète, près de l'aphélie, dépasse notablement celle du Soleil près du périhélie.

D'une manière plus précise, on trouve que l'influence combinée du Soleil et de Jupiter équivaut alors à celle du Soleil agissant seul, la distance périhélie étant 0,58, bien inférieure à la moyenne des distances périhélies des comètes paraboliques, mais surtout des comètes périodiques (1,1). On s'est placé, il est vrai, dans des conditions particulièrement favorables pour faire le calcul; mais d'autre part la désagrégation est certainement facilitée à cause des dimensions comparables de la comète et de la planète relativement à la distance qui sépare leurs centres de gravité....

Ce résultat paraît devoir être rapproché des constatations de M. Schulhof signalées en commençant.

IV. La condition de stabilité conduit, dans le cas d'une particule *extérieure*, à une limite supérieure de la combinaison $\sqrt{\frac{M}{\mu}\left(\frac{a}{a'}\right)^3} e'^2$, lorsqu'on prend constant le rayon a dans la portion de trajectoire considérée. C'est un résultat analogue à (1) : la désagrégation est d'autant plus marquée, toutes choses égales d'ailleurs, que l'excentricité est plus grande et la distance périhélie plus petite.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

V. Dans le Chapitre final, on étudie avec quelque détail les comètes propres à illustrer en quelque sorte la théorie : les comètes 1882 II, 1889 V et la comète de Biéla.

VI. Supposé que le rôle de Jupiter à l'égard des comètes à courte période ne soit pas exagéré, la remarque suivante est importante pour la théorie de la capture, étudiée dans un Mémoire antérieur (1). M. C.-A. Young, en exposant cette théorie dans son Ouvrage *General Astronomy*, conclut ainsi : « Avec le temps, en se donnant un nombre suffisant de comètes sur lesquelles Jupiter exerce son action, le résultat final sera nécessairement une famille de comètes telle qu'elle existe, avec les aphélies des orbites proches de l'orbite de Jupiter, et des périodes à peu près moitiés de la sienne. Mais il faut avouer que l'intervalle de temps et le nombre de comètes exigés sont énormes. »

Or il est clair que la désagrégation d'une comète à courte période par Jupiter peut se produire beaucoup plus fréquemment que la capture de comètes presque paraboliques; le nombre des comètes se multiplie en même temps. Chacune, il est vrai, sera relativement faible; mais les observations les montrent ainsi.

Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans deux Notes des *Comptes rendus* (2 novembre 1896, 31 mai 1897).

---

(1) *Étude sur la théorie des comètes périodiques* (*Annales de l'Observatoire de Paris*. Mémoires, t. XX).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

CHAPITRE I.

LE PROBLÈME ENVISAGÉ DU POINT DE VUE DE LA STATIQUE OU DE LA DYNAMIQUE.

On a dit dans l'Introduction comment le problème avait été envisagé sous ces deux aspects. Il importe d'entrer à ce sujet dans quelques détails en faisant appel à l'Analyse.

1. Considérons le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent suivant la loi de Newton. Supposons que parmi eux il y ait un ensemble de particules tellement constitué, qu'on puisse le traiter dans le calcul des forces d'attraction comme une sphère homogène ou composée de couches sphériques homogènes. Assimilons une comète à cet ensemble de particules et étudions le mouvement autour du noyau cométaire C d'une particule, sollicitée par le Soleil et les planètes en même temps que par les autres particules. Cette étude conduit d'abord à la notion du domaine d'attraction de C, qu'on définit en exprimant que le rapport de la force perturbatrice à la force centrale est partout le même quand on considère le noyau C et le Soleil; on peut généralement confondre ce domaine avec une sphère (1).

Quand la particule a abandonné la sphère d'attraction du noyau C, on peut la regarder comme soumise seulement à l'attraction du Soleil. Il est à noter, d'après la formule du Mémoire cité (p. 5), que le rapport de la force perturbatrice à la force centrale est ici très petit, à cause de la petitesse même de la masse de la comète.

Quand l'intégrale des forces vives existe, comme dans le cas où le noyau cométaire décrit un cercle autour du Soleil, cas étudié par M. Luc Picart, cette intégrale, supposée de la forme

$$v^2 = f(x, y, z) + \text{const.},$$

fait connaître, quand on remplace v^2 par zéro, l'équation d'une surface qui

(1) On a parfois employé le terme de *sphère d'activité*, mais il paraît préférable d'adopter à sa place la désignation de *sphère d'attraction*. [Cf. *Étude sur la théorie des comètes périodiques* (*Annales*, t. XX), Chap. I].

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

divise l'espace en deux sortes de régions : pour les unes l'expression de v^2 est > 0; pour les autres, elle est < 0; de telle sorte que le corps ne pourra se mouvoir que dans les premières. Si cette surface, que nous appellerons *surface de vitesse nulle,* possède une nappe fermée entourant C, il est certain que la particule supposée d'abord intérieure à cette nappe ne pourra la franchir, et que sa distance au point C ne dépassera pas une certaine limite. Dans le cas donc où l'intégrale des forces vives existe, par l'intermédiaire de la surface de vitesse nulle, il sera parfois possible de distinguer une région dans laquelle le mouvement de la particule est certainement stable (1).

2. Comme l'existence de l'intégrale des forces vives peut, au moins dans les problèmes qui nous occupent, être regardée comme exceptionnelle, il importe de déduire les deux notions : celle d'une surface de vitesse nulle et celle d'une région ou sphère de stabilité pour le mouvement de la particule autour de C, des équations différentielles elles-mêmes.

Découvrir sur les équations différentielles les propriétés qualitatives et quantitatives de leurs intégrales réelles est un problème entouré d'inextricables difficultés quand il s'agit des questions mécaniques qu'il y a vraiment intérêt à traiter. Les travaux de M. Poincaré constituent l'effort le plus vigoureux qu'on ait tenté dans cette direction (2). M. Picard en a donné une exposition simplifiée et substantielle dans le Tome III de son *Traité de l'Analyse;* il les a complétés en quelques points. Nous devons citer ensuite plusieurs Mémoires du géomètre russe Liapounof (3), des recherches toutes récentes de M. Painlevé et de M. Hadamard.

Pour notre but, il suffit d'utiliser les procédés d'intégration des équations différentielles par approximations successives. Les conditions de stabilité peuvent être obtenues sans peine, au moins si l'on se borne aux termes principaux. Comme exemple, supposons qu'on cherche la condition sous laquelle l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \alpha x + 2\beta x \cos 2t = 0$$

correspond à une orbite stable; on a supposé le rayon vecteur r peu différent

(1) K. Bohlin, *Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme* (*Acta mathematica,* t. X).

(2) *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (*Journal de Mathématiques*).

(3) *Le problème général de la stabilité du mouvement.* Kharkof, 1892 (en russe).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

d'une constante a, et posé

$$r = \frac{a}{1 + x};$$

α et β sont des quantités petites.

Soit

$$x = X_{00} + \alpha X_{10} + \beta X_{01} + \alpha^2 X_{20} + 2\alpha\beta X_{11} + \beta^2 X_{02} + \ldots.$$

La détermination des coefficients s'exécute en remarquant que l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x + \varepsilon Q = 0$$

est représentée par

$$x = X_0 + \varepsilon \left(\cos t \int Q \sin t\, dt - \sin t \int Q \cos t\, dt \right)$$

ou

$$x = X_0 + \varepsilon \Delta_1 Q,$$

Δ_1 étant le symbole de l'opération indiquée. En remettant dans Q la valeur de x donnée par l'approximation précédente, on effectue les approximations successives.

On égale les termes correspondants dans les deux membres de l'équation

$$x = X_{00} + \Delta_1 (\alpha x + 2\beta x \cos 2t);$$

il suffit de remplacer

$$x \quad \text{dans} \quad \alpha x \quad \text{par} \quad X_{00} + \alpha X_{10} + \beta X_{01},$$

$$x \quad \text{dans} \quad \beta x \quad \text{par} \quad X_{00} + \alpha X_{10} + \beta X_{01};$$

ce qui donne

$$X_{10} = \Delta_1 X_{00},$$

$$X_{01} = 2\Delta_1 \cos 2t X_{00},$$

$$2X_{11} = \Delta_1 (X_{01} + 2\cos 2t X_{10}),$$

$$X_{20} = \Delta_1 X_{10},$$

$$X_{02} = 2\Delta_1 \cos 2t X_{01}.$$

Soit

$$X_{00} = \cos(t + \varepsilon),$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

en laissant de côté le facteur e, qu'on rétablira plus tard,

$$X_{10} = -\frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon),$$

$$2\cos 2t X_{00} = \cos(3t+\varepsilon) + \cos(t-\varepsilon),$$

$$X_{01} = \frac{1}{8}\cos(3t+\varepsilon) - \frac{t}{2}\sin(t-\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t-\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} X_{01} + 2\cos 2t X_{10} = {} & \frac{1}{8}\cos(3t+\varepsilon) - \frac{t}{2}\sin(t-\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t-\varepsilon) \\ & - \frac{t}{2}\sin(3t+\varepsilon) + \frac{t}{2}\sin(t-\varepsilon) \\ & - \frac{1}{4}\cos(3t+\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t-\varepsilon) \\ = {} & -\frac{1}{8}\cos(3t+\varepsilon) - \frac{1}{2}\cos(t-\varepsilon) - \frac{t}{2}\sin(3t+\varepsilon), \end{aligned}$$

$$2X_{11} = \frac{t}{4}\sin(t-\varepsilon) + \frac{1}{8}\cos(t-\varepsilon)\ldots,$$

$$\begin{aligned} X_{20} = {} & -\frac{1}{4}\left[-\frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon)\right] \\ & - \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\cos(t+\varepsilon) - \frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon)\right] \\ = {} & -\frac{t^2}{8}\cos(t+\varepsilon) + \frac{t}{4}\sin(t+\varepsilon) + \frac{1}{8}\cos(t+\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos 2t X_{01} = {} & \frac{1}{8}\cos(t+\varepsilon) - \frac{t}{2}\left[\sin(3t-\varepsilon) - \sin(t+\varepsilon)\right] - \frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon)\ldots \\ = {} & -\frac{1}{8}\cos(t+\varepsilon) + \frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon)\ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{02} = {} & -\frac{1}{8}\left[-\frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon)\right] \\ & + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\cos(t+\varepsilon) - \frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon) - \frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon)\right] \\ = {} & \frac{t^2}{8}\cos(t+\varepsilon) - \frac{t}{16}\sin(t+\varepsilon) - \frac{1}{32}\cos(t+\varepsilon). \end{aligned}$$

On a laissé de côté les termes où t multiplie les sinus et cosinus d'arguments autres que t + const., ainsi que quelques termes non utiles.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

Tableau résumé des expressions des coefficients.

	X_{00},	$\cos(t+\varepsilon)$,	
α,	X_{10},	$-\frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon)$,	$-\frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon)$,
β,	X_{01},	$-\frac{1}{4}\cos(t-\varepsilon)$,	$-\frac{t}{2}\sin(t-\varepsilon)$,
$\alpha\beta$,	X_{11},	$\frac{1}{16}\cos(t-\varepsilon)$,	$+\frac{t}{8}\sin(t-\varepsilon)$,
α^2,	X_{20},	$\frac{1}{8}\cos(t+\varepsilon)$,	$+\frac{t}{4}\sin(t+\varepsilon)$.
β^2,	X_{02},	$-\frac{1}{32}\cos(t+\varepsilon)$,	$-\frac{t}{16}\sin(t+\varepsilon)$.

De là on déduit pour les équations différentielles, en prenant les coefficients de $\cos t$, $\sin t$ et rétablissant le facteur e,

$$\frac{d}{d\theta}e\cos\varepsilon\left(1-\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha\beta}{8}+\frac{\alpha^2}{8}-\frac{\beta^2}{32}\right)=e\sin\varepsilon\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta^2}{16}\right),$$

$$\frac{d}{d\theta}e\sin\varepsilon\left(-1+\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha\beta}{8}-\frac{\alpha^2}{8}+\frac{\beta^2}{32}\right)=e\cos\varepsilon\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta^2}{16}\right).$$

Soient

$$e\cos\varepsilon=a,\qquad e\sin\varepsilon=b;$$

les équations réduites aux termes principaux s'écrivent

$$\frac{da}{d\theta}=b\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\frac{db}{d\theta}=a\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right).$$

Il est clair qu'on doit avoir pour la stabilité

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)>0\qquad\text{ou}\qquad\alpha^2>\beta^2.$$

Cela comprend, en particulier, le résultat obtenu par Tisserand dans l'article : *Sur un cas particulier de l'équation différentielle de Gyldén-Lindstedt* (*Bulletin astronomique*, août 1896).

Le calcul effectif, indépendamment des théories générales, est souvent ce qu'il y a de mieux; mais puisque, d'autre part, le calcul a consisté à tenir compte des termes ajoutés à l'équation réduite au type le plus simple, il est

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

clair que, si dans le cas simple l'intégrale des forces vives existe, on peut se proposer de chercher quelles sont ses déformations et, par suite, les variations de stabilité.

Concevons que l'on ait obtenu, par la méthode des approximations successives ou par toute autre méthode, les développements des coordonnées du mobile x, y, z, suivant les puissances d'un paramètre ε et calculons

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2};$$

ce sera une fonction de t et des constantes; on pourra remplacer ces dernières par des fonctions de

$$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, on devra retomber d'ailleurs sur le résultat connu

$$v^2 = f(x, y, z) + \text{const.}$$

Soit, en ne gardant que la première puissance de ε,

$$v^2 = f(x, y, z) + \text{const.} + \varepsilon\varphi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

Le raisonnement déjà fait pour diviser l'espace en deux sortes de régions peut être répété; mais la surface limite dépend de la direction de la vitesse du mobile. Si la région stable était primitivement une sphère, il n'en sera plus de même; la stabilité croîtra ou diminuera dans certaines directions.

La considération de la surface de vitesse nulle paraît utile pour limiter le domaine de la région stable.

Les équations différentielles font connaître aussitôt les points x, y, z pour lesquels les accélérations sont nulles en même temps que les vitesses; on les appelle, d'après Gyldén, *centres de libration*.

La surface de vitesse nulle passe par eux. Elle doit être normale en tous ses points à la résultante des forces; dans le cas du mouvement relatif, la force centrifuge composée n'intervient pas, la vitesse étant nulle.

Nous ne nous occupons pas spécialement de la détermination de la surface de vitesse nulle, et nous renverrons à la Thèse de M. Luc Picart, où se trouve étudié un cas particulier intéressant.

3. Dans certains cas, par exemple si l'orbite du noyau est circulaire, la

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

comète, assimilée à une masse fluide, peut être susceptible d'une figure d'équilibre relatif permanente. On a alors affaire à un problème de Statique.

Mais il n'y aura pas, en général, de figure permanente. E. Roche a ramené la question à un problème de Statique, en admettant que la masse fluide prend à chaque instant la figure avec laquelle elle pourrait être en équilibre en vertu des forces appliquées; mais les résultats auxquels on est conduit par cette théorie laissent à désirer. Ainsi le calcul bien connu de M. Schiaparelli, pour établir la possibilité de la désagrégation d'une comète sous l'influence d'une perturbation extérieure, ne nous renseigne pas sur ce que deviennent les particules de la comète; leurs vitesses, qui peuvent être considérables (lorsqu'on veut tenir compte des effets de la force répulsive), semblent ne jouer aucun rôle, non plus que le temps pendant lequel les corps restent en présence et peuvent réagir l'un sur l'autre.

Nous envisageons de préférence la question comme une question de Dynamique, en calculant effectivement les trajectoires des particules.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

CHAPITRE II.

DÉSAGRÉGATION DES COMÈTES. STABILITÉ DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE INTÉRIEURE A L'AMAS.

Tisserand a exposé, dans le Tome IV de son *Traité de Mécanique céleste*, Chap. XVI, les recherches récentes. Après M. Schiaparelli, qui a établi la possibilité de la désagrégation, MM. Charlier et Picart ont repris la question d'une manière plus rigoureuse, en supposant toutefois que l'orbite du noyau était circulaire. Tisserand a cherché à compléter les conclusions de MM. Charlier et Picart dans le cas d'une orbite elliptique; il a montré le chemin à suivre pour traiter le problème qui dépend de l'intégration de deux équations différentielles linéaires du second ordre, sans seconds membres, avec des coefficients périodiques.

1. Reproduisons d'abord le passage de l'Ouvrage de Tisserand qui se rapporte à l'établissement des équations différentielles (*loc. cit.*). Nous considérons un essaim sphérique et homogène de corpuscules qui s'attirent mutuellement, et sont tous attirés de la même façon par le Soleil. Soient, relativement à trois axes fixes passant par le Soleil, x, y, o les coordonnées du centre de gravité M de l'essaim; X, Y, Z celles d'une particule N située à l'intérieur de l'essaim.

On a pris, comme on voit, le plan de l'orbite de M pour plan des xy. Soit U l'attraction de l'essaim sur N : cette attraction est dirigée suivant la droite NM, puisque nous supposons l'essaim sphérique et homogène.

On rapporte la particule N à de nouveaux axes rectangulaires Mξ et Mη situés dans le plan xy, l'axe Mξ coïncidant avec le prolongement du rayon vecteur SM, l'axe Mη étant dirigé en sens inverse de la direction que prendrait Sy si l'on faisait tourner le système xSy pour amener Sx suivant SM, et l'on désigne les coordonnées relatives de N par ξ, η et ζ.

Nous aurons les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{x}{r^3} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + k^2\frac{y}{r^3} = 0, \qquad r^2 = x^2 + y^2;$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dt^2} + k^2\frac{X}{R^3} &= -\frac{X-x}{\Delta}\,U \\
\frac{d^2Y}{dt^2} + k^2\frac{Y}{R^3} &= -\frac{Y-y}{\Delta}\,U \\
\frac{d^2Z}{dt^2} + k^2\frac{Z}{R^3} &= -\frac{Z}{\Delta}\,U
\end{aligned}\right\} \qquad \Delta^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

k^2 désigne le produit f M de la masse du Soleil par la constante de l'attraction.

Nous aurons encore les relations

$$X = x + \frac{x\xi + y\eta}{r},$$

$$Y = y + \frac{y\xi - x\eta}{r},$$

$$Z = \zeta.$$

Nous trouverons

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x\xi + y\eta}{r}\right) + k^2\frac{x\xi + y\eta}{R^3 r} = k^2 x\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - \frac{x\xi + y\eta}{\Delta r}U,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y\xi - x\eta}{r}\right) + k^2\frac{y\xi - x\eta}{R^3 r} = k^2 y\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - \frac{y\xi - x\eta}{\Delta r}U,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\zeta + k^2\frac{\zeta}{R^3} = -\frac{\zeta}{\Delta}U.$$

On en tire

$$x\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x\xi + y\eta}{r}\right) + y\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y\xi - x\eta}{r}\right) + k^2\frac{r}{R^3}\xi = k^2 r^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - U\frac{\xi}{\Delta}r,$$

$$y\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x\xi + y\eta}{r}\right) - x\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y\xi - x\eta}{r}\right) + k^2\frac{r}{R^3}\eta = -U\frac{\eta}{\Delta}r.$$

On a d'ailleurs

$$R^2 = (r + \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

ce qui, en négligeant ξ^2, η^2 et ζ^2, se réduit à

$$R = r + \xi, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{R^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3\xi}{r}\right).$$

Il en résulte

$$x\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x\xi + y\eta}{r}\right) + y\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y\xi - x\eta}{r}\right) - 2k^2\frac{\xi}{r^2} + Ur\frac{\xi}{\Delta} = 0,$$

$$y\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x\xi + y\eta}{r}\right) - x\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y\xi - x\eta}{r}\right) + k^2\frac{\eta}{r^2} + Ur\frac{\eta}{\Delta} = 0.$$

En tenant compte des relations faciles à vérifier

$$x\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right) + y\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right) = 0, \qquad x\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x}{r}\right) + y\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y}{r}\right) = -\frac{k^2 p}{r^3},$$

$$x\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right) - y\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{k\sqrt{p}}{r}, \qquad x\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y}{r}\right) - y\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{2k\sqrt{p}}{r^2}\frac{dr}{dt},$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

on trouve

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2k\sqrt{p}}{r^2}\frac{d\eta}{dt} - \frac{k^2\xi}{r^3}\left(\frac{p}{r}+2\right) - \frac{2k\sqrt{p}}{r^3}\eta\frac{dr}{dt} + U\frac{\xi}{\Delta} = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{2k\sqrt{p}}{r^2}\frac{d\xi}{dt} - \frac{k^2\eta}{r^3}\left(\frac{p}{r}-1\right) + \frac{2k\sqrt{p}}{r^3}\xi\frac{dr}{dt} + U\frac{\eta}{\Delta} = 0.$$

Dans le cas où la particule est intérieure à l'amas, on a

$$U = \frac{4}{3}\frac{\pi\Delta^3 f D}{\Delta^2} = \frac{4}{3}\pi\Delta f D,$$

D désignant la densité moyenne. Soient m la masse totale de l'amas, ρ_0 son rayon; les formules

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho_0^3 D, \qquad fM = n^2 a^3$$

donnent

$$\frac{U}{\Delta} = \frac{4}{3}\pi f D = n^2\left(\frac{a}{\rho_0}\right)^3\frac{m}{M}.$$

En prenant comme variable l'anomalie moyenne l au lieu de t et posant

$$\mu = \frac{m}{M}\left(\frac{a}{\rho_0}\right)^3,$$

les équations différentielles deviennent

$$\frac{d^2\xi}{dl^2} + \frac{2a\sqrt{ap}}{r^2}\frac{d\eta}{dl} - \frac{a^3}{r^3}\left(\frac{p}{r}+2\right)\xi - \frac{2a\sqrt{ap}}{r^3}\frac{dr}{dl}\eta + \mu\xi = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dl^2} - \frac{2a\sqrt{ap}}{r^2}\frac{d\xi}{dl} - \frac{a^3}{r^3}\left(\frac{p}{r}-1\right)\eta + \frac{2a\sqrt{ap}}{r^3}\frac{dr}{dl}\xi + \mu\eta = 0.$$

En développant les coefficients suivant les puissances de e et négligeant e^3, on a

$$p = a(1-e^2), \qquad r = a\left(1 + \frac{e^2}{2} - e\cos l - \frac{e^2}{2}\cos 2l\right),$$

d'où

$$\frac{a\sqrt{ap}}{r^2} = 1 + 2e\cos l + \frac{5}{2}e^2\cos 2l,$$

$$\frac{a^3}{r^3}\left(\frac{p}{r}+2\right) = 3 + 5e^2 + 10e\cos l + 16e^2\cos 2l,$$

$$\frac{a\sqrt{ap}}{r^3}\frac{dr}{dl} = e\sin l + \frac{5}{2}e^2\sin 2l,$$

$$\frac{a^3}{r^3}\left(\frac{p}{r}-1\right) = e\cos l + \frac{e^2}{2} + \frac{5}{2}e^2\cos 2l;$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

les équations différentielles deviendront

$$\frac{d^2\xi}{dl^2} + 2\left(1 + 2e\cos l + \frac{5}{2}e^2\cos 2l\right)\frac{d\eta}{dl} - (3 + 5e^2 + 10e\cos l + 16e^2\cos 2l)\,\xi$$
$$- 2\left(e\sin l + \frac{5}{2}e^2\sin 2l\right)\eta + \mu\xi = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dl^2} - 2\left(1 + 2e\cos l + \frac{5}{2}e^2\cos 2l\right)\frac{d\xi}{dl} - \left(e\cos l + \frac{e^2}{2} + \frac{5}{2}e^2\cos 2l\right)\eta$$
$$+ 2\left(e\sin l + \frac{5}{2}e^2\sin 2l\right)\xi + \mu\eta = 0;$$

elles peuvent encore s'écrire, en modifiant l'écriture,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - \mathrm{A}x - e\mathrm{X} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + \mathrm{B}y - e\mathrm{Y} = 0; \end{cases}$$

on a posé

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = 3 - \mu + 5e^2, \qquad \mathrm{B} = \mu - \dfrac{1}{2}e^2, \\[2ex] \mathrm{X} = -4\dfrac{dy}{dt}\cos t + 10x\cos t + 2y\sin t + e\mathrm{X}', \\[2ex] \mathrm{Y} = +4\dfrac{dx}{dt}\cos t + \quad y\cos t - 2x\sin t + e\mathrm{Y}'; \end{cases}$$

X' et Y' ne contiennent que des termes périodiques en $\cos 2t$ et $\sin 2t$.

2. J'intègre les équations par approximations successives, en suivant les méthodes de Laplace [1], e étant regardé comme très petit. Il y a d'abord à considérer les intégrales des équations différentielles où l'on a supprimé les termes $e\mathrm{X}$ et $e\mathrm{Y}$

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - \mathrm{A}x = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + \mathrm{B}y = 0. \end{cases}$$

On peut écrire

$$(4)\qquad x = 2p\cos(mt + \alpha) + 2q\cos(nt + \beta);$$

p, q, α et β étant quatre arbitraires. En mettant l'expression de x dans la pre-

---

[1] Consulter pour l'application de ces méthodes le travail *Sur quelques cas de commensurabilité des moyens mouvements...* (*Annales de l'Observatoire de Paris*. Mémoires, t. XXII).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

mière des équations différentielles (3), il vient

$$(5)\qquad \frac{dy}{dt} = (m^2 + A)p\cos(mt + \alpha) + (n^2 + A)q\cos(nt + \beta);$$

on a aussi

$$(6)\qquad -\frac{dx}{dt} = \quad 2mp\sin(mt + \alpha) + \quad 2nq\sin(nt + \beta),$$

$$(7)\qquad y = \frac{m^2 + A}{m}p\sin(mt + \alpha) + \frac{n^2 + A}{n}q\sin(nt + \beta).$$

De (4) et (5), puis de (6) et (7) on déduit aisément les expressions de $2p\cos(mt + \alpha)$, $2p\sin(mt + \alpha)$, ... en fonction linéaire de x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
2p\cos(mt + \alpha)(n^2 - m^2) &= (n^2 + A)x - 2\frac{dy}{dt},\\
2p\sin(mt + \alpha)\frac{A(n^2 - m^2)}{mn} &= \frac{n^2 + A}{n}\frac{dx}{dt} + 2ny,\\
2q\cos(nt + \beta)(n^2 - m^2) &= 2\frac{dy}{dt} - (m^2 + A)x,\\
2q\sin(nt + \beta)\frac{A(n^2 - m^2)}{mn} &= -\frac{m^2 + A}{m}\frac{dx}{dt} - 2my;
\end{aligned}\right.$$

on écrit

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
2p\cos(mt + \alpha) &= ax + b\frac{dy}{dt},\\
2p\sin(mt + \alpha) &= c\frac{dx}{dt} + dy,\\
2q\cos(nt + \beta) &= fx + g\frac{dy}{dt},\\
2q\sin(nt + \beta) &= h\frac{dx}{dt} + ky.
\end{aligned}\right.$$

De là

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
2p\cos\alpha &= \left(ax + b\frac{dy}{dt}\right)\cos mt + \left(c\frac{dx}{dt} + dy\right)\sin mt,\\
2p\sin\alpha &= -\left(ax + b\frac{dy}{dt}\right)\sin mt + \left(c\frac{dx}{dt} + dy\right)\cos mt,\\
2q\cos\beta &= \left(fx + g\frac{dy}{dt}\right)\cos nt + \left(h\frac{dx}{dt} + ky\right)\sin nt,\\
2q\sin\beta &= -\left(fx + g\frac{dy}{dt}\right)\sin nt + \left(h\frac{dx}{dt} + ky\right)\cos nt;
\end{aligned}\right.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

on a ainsi les quatre arbitraires $2p\cos\alpha$, $2p\sin\alpha$, ... en fonctions linéaires des variables x, y et de leurs dérivées.

Considérons l'une de ces intégrales, la première, par exemple, et soit U le second membre fonction linéaire des variables et de leurs dérivées; $\frac{dU}{dt}$ est une fonction linéaire des premiers membres des équations différentielles (3) multipliées respectivement par $c\sin mt$ et $b\cos mt$.

Multiplions les équations (1) par ces facteurs respectifs, intégrons après multiplication par dt et appelons encore $2p\cos\alpha$ la constante d'intégration, il vient

$$2p\cos\alpha = U - e\left(b\int Y\cos mt\,dt + c\int X\sin mt\,dt\right).$$

On trouve ainsi que les quatre arbitraires des équations réduites doivent être remplacées respectivement par

$$\begin{aligned}
&2p\cos\alpha + e\left(\quad b\int Y\cos mt\,dt + c\int X\sin mt\,dt\right),\\
&2p\sin\alpha + e\left(-b\int Y\sin mt\,dt + c\int X\cos mt\,dt\right),\\
&2q\cos\beta + e\left(\quad g\int Y\cos nt\,dt + h\int X\sin nt\,dt\right),\\
&2q\sin\beta + e\left(-g\int Y\sin nt\,dt + h\int X\cos nt\,dt\right);
\end{aligned}$$

et les expressions de x et y sont

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
x &= 2p\cos(mt+\alpha) + 2q\cos(nt+\beta)\\
&\quad + e[bm\,\Delta_2^m(Y) + cm\,\Delta_1^m(X) + gn\,\Delta_2^n(Y) + hn\,\Delta_1^n(X)],\\
y &= \frac{m^2+A}{m}p\sin(mt+\alpha) + \frac{n^2+A}{n}q\sin(nt+\beta)\\
&\quad + e\left[-b\frac{m^2+A}{2}\Delta_1^m(Y) + c\frac{m^2+A}{2}\Delta_2^m(X) - g\frac{n^2+A}{2}\Delta_1^n(Y) + h\frac{n^2+A}{2}\Delta_2^n(X)\right];
\end{aligned}\right.$$

on a posé, d'une manière générale,

$$\begin{aligned}
m\,\Delta_1^m(X) &= \cos mt\int X\sin mt\,dt - \sin mt\int X\cos mt\,dt,\\
m\,\Delta_2^m(X) &= \cos mt\int X\cos mt\,dt + \sin mt\int X\sin mt\,dt.
\end{aligned}$$

Il est bien connu que, si l'on suppose

$$X = K\cos(st+\varepsilon),$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

on a

$$\Delta_1^m(X) = \frac{K}{s^2 - m^2}\cos(st + \varepsilon),$$

et, dans le cas particulier où $s^2 = m^2$,

$$\Delta_1^m[K\cos(mt+\varepsilon)] = -\frac{t}{2m}K\sin(mt+\varepsilon) - \frac{K}{4m^2}\cos(mt+\varepsilon);$$

la différentiation par rapport à ε conduit aux formules analogues où le sinus est mis à la place du cosinus; on a d'autre part

$$\Delta_2^m(X) = -\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\Delta_1^m(X).$$

3. Au moyen des formules (11) on peut calculer x et y par approximations successives. Ce qu'il importe d'obtenir ce sont les termes où t multiplie les sinus ou cosinus des deux arguments $mt + \alpha$, $nt + \beta$.

On remarque qu'il est inutile de garder les parties eX', eY' dans les formules (2); elles ne contribuent en rien aux termes cherchés.

La première approximation conduit à des expressions telles que

$$x \ldots\ldots \quad e[\gamma p\cos(mt+t) + \gamma' p\cos(mt-t) + \gamma'' q\cos(nt+t) + \gamma''' q\cos(nt-t)],$$
$$y \ldots\ldots \quad e[\delta p\sin(mt+t) + \delta' p\sin(mt-t) + \delta'' q\sin(nt+t) + \delta''' q\sin(nt-t)];$$

il faut entendre que les constantes α et β accompagnent respectivement mt et nt dans ces expressions, qui, introduites dans eX et eY, donneront les termes utiles

$$(12) \qquad \begin{cases} eX \ldots\ldots & e^2(Fp\cos mt + Gq\cos nt), \\ eY \ldots\ldots & e^2(Hp\sin mt + Kq\sin nt). \end{cases}$$

On trouve aisément

$$(13) \qquad \begin{cases} F = -2\delta(m+1) - 2\delta'(m-1) + 5(\gamma+\gamma') + \delta - \delta', \\ \quad = \quad 5(\gamma+\gamma') - \delta(2m+1) - \delta'(2m-1), \end{cases}$$

et de même

$$(14) \qquad \begin{cases} G = \quad 5(\gamma''+\gamma''') - \delta''(2n+1) - \delta'''(2n-1), \\ H = -\gamma(2m+1) - \gamma'(2m-1) + \frac{1}{2}(\delta+\delta'), \\ K = -\gamma''(2n+1) - \gamma'''(2n-1) + \frac{1}{2}(\delta''+\delta'''). \end{cases}$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

Il y a à calculer les coefficients γ et δ, d'abord X et Y,

$$X = -4\frac{dy}{dt}\cos t + 10x\cos t + 2y\sin t = 2\left(5x - 2\frac{dy}{dt}\right)\cos t + 2y\sin t;$$

il y a deux parties semblables dépendant respectivement de m, p et de n, q. Pour avoir la première partie, on prend

$$x = 2p\cos mt, \qquad y = \frac{m^2+A}{m}p\sin mt,$$

$$\frac{dx}{dt} = -2mp\sin mt, \qquad \frac{dy}{dt} = (m^2+A)p\cos mt;$$

il vient

$$X = (10 - 2m^2 - 2A)p[\cos(m+1)t + \cos(m-1)t]$$
$$+ \frac{m^2+A}{m}p[-\cos(m+1)t + \cos(m-1)t];$$

on écrit

$$(15)\quad \begin{cases} X = pP\cos(m+1)t + pQ\cos(m-1)t, \\ P = 10 - 2m^2 - 2A - \dfrac{m^2+A}{m}, \qquad Q = 10 - 2m^2 - 2A + \dfrac{m^2+A}{m}. \end{cases}$$

On trouve de même

$$(16)\quad \begin{cases} Y = pR\sin(m+1)t - pS\sin(m-1)t, \\ R = -4m + \dfrac{m^2+A}{2m} - 2, \qquad S = +4m - \dfrac{m^2+A}{2m} - 2. \end{cases}$$

P′, Q′, ... contenant n comme P, Q contiennent m, il viendra donc

$$(17)\quad \begin{cases} X = pP\cos(m+1)t + pQ\cos(m-1)t + qP'\cos(n+1)t + qQ'\cos(n-1)t, \\ Y = pR\sin(m+1)t - pS\sin(m-1)t + qR'\sin(n+1)t - qS'\sin(n-1)t. \end{cases}$$

Le calcul des γ et δ, d'après les formules (11) en tenant compte des expressions (17), n'offre pas de difficulté. Mais, pour la question qui nous occupe, il suffit de connaître la forme analytique de ces coefficients γ et δ. On s'assure aisément que l'on peut écrire

$$\gamma = \Gamma + \Gamma' m, \qquad \gamma' = \Gamma - \Gamma' m,$$
$$\gamma'' = \Gamma'' + \Gamma''' n, \qquad \gamma''' = \Gamma'' - \Gamma''' n,$$
$$\delta = \Delta + \Delta' m, \qquad \delta' = -\Delta + \Delta' m,$$
$$\delta'' = \Delta'' + \Delta''' n, \qquad \delta''' = -\Delta'' + \Delta''' n;$$

les Γ et Δ désignent des fonctions de m^2 et n^2. Comme conséquence, F, G, $\frac{H}{m}$ et $\frac{K}{n}$ [formules (13) et (14)] sont aussi des fonctions de m^2 et n^2.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

4. Voyons maintenant ce que donnent les termes utiles (12). Il suffit d'appliquer les formules (11) en y remplaçant eX et eY par les expressions (12). On a d'ailleurs

$$e\Delta_1^m(X) = -\frac{e^2 F t}{2m} p \sin mt, \qquad e\Delta_1^m(Y) = \frac{e^2 H t}{2m} p \cos mt,$$

$$e\Delta_2^m(X) = +\frac{e^2 F t}{2m} p \cos mt, \qquad e\Delta_2^m(Y) = \frac{e^2 H t}{2m} p \sin mt,$$

$$e\Delta_1^n(X) = -\frac{e^2 G t}{2n} q \sin nt, \qquad e\Delta_1^n(Y) = \frac{e^2 K t}{2n} q \cos nt,$$

$$e\Delta_2^n(X) = +\frac{e^2 G t}{2n} q \cos nt, \qquad e\Delta_2^n(Y) = \frac{e^2 K t}{2n} q \sin nt;$$

on laisse de côté les termes non affectés du facteur t.

Considérons x en particulier, et rétablissons les constantes α et β :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= 2p\cos(mt+\alpha) + 2q\cos(nt+\beta) \\ &+ \frac{e^2}{2} t[(bH - cF)p\sin(mt+\alpha) + (gK - hG)q\sin(nt+\beta)]; \end{aligned} \right.$$

$\frac{bH - cF}{m}$ et $\frac{gK - hG}{n}$ sont des fonctions de m^2 et n^2.

Les choses étant ainsi préparées, démontrons que, sous l'hypothèse $\mu > \frac{1}{2}e^2$, m^2 et n^2 sont réels. Il résultera de là et de (18) que, si l'on appelle m' et n' les valeurs de m et n modifiées, $\frac{m'}{m}$ et $\frac{n'}{n}$ seront réels; en d'autres termes, les exposants caractéristiques pour les équations (1) et (3) seront de même nature.

L'équation qui donne les valeurs de m^2 et n^2

$$s^2 - (B - A + 4)s - AB = 0,$$

a ses racines réelles si

$$(B - A + 4)^2 + 4AB > 0.$$

La dérivée du premier membre par rapport à μ

$$4(B - A + 4) + 4A - 4B = +16.$$

Comme AB est > 0 pour les valeurs de μ un peu supérieures à $\frac{1}{2}e^2$, les deux racines m^2 et n^2 seront réelles. Pour qu'elles soient toutes deux > 0, on doit avoir $-AB > 0$, ce qui exige, à cause de l'hypothèse $B > 0$,

$$A < 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu > 3 + 5e^2;$$

l'inégalité $B - A + 4 > 0$ est alors évidemment vérifiée.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

Comme conclusion, nous pouvons énoncer le résultat qui suit :

La stabilité du mouvement d'une particule intérieure à l'essaim entraîne l'inégalité

$$\frac{m}{M}\left(\frac{a}{\rho_0}\right)^3 > 3 + 5e^2.$$

a et e demi grand axe et excentricité de l'orbite de la comète;
M et m masses du Soleil et de la comète;
ρ_0 rayon de l'essaim.

La valeur limite de ρ_0 diminue quand e augmente, ce qui autorise à dire que la forme elliptique de l'orbite facilite la désagrégation [1].

5. Le résultat précédent montre d'une manière générale l'effet de l'excentricité de l'orbite, mais ne fournit pas d'indication sur les propriétés du périhélie et de l'aphélie.

Dans le voisinage de ces deux points, la trajectoire du noyau peut être assimilée à un arc de circonférence ayant le Soleil pour centre. Considérons donc le mouvement du noyau M sur une circonférence de rayon r' avec une vitesse angulaire constante n'.

Les équations du mouvement d'une particule rapportée aux axes rectangulaires mobiles Mx dirigé vers S, My perpendiculaire à Mx dans le sens du mouvement du Soleil autour de l'essaim S, et Mz se trouvent facilement

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} + \mu n^2 x &= \frac{\partial\Omega}{\partial x} + n'^2 x,\\
\frac{d^2y}{dt^2} + 2n'\frac{dx}{dt} + \mu n^2 y &= \frac{\partial\Omega}{\partial y} + n'^2 y,\\
\frac{d^2z}{dt^2} \qquad\qquad + \mu n^2 z &= \frac{\partial\Omega}{\partial z};
\end{aligned}$$

on a

$$\Omega = k^2\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r'x}{r'^3}\right), \qquad \Delta^2 = r'^2 - 2r'x + x^2 + y^2 + z^2;$$

$-\mu n^2 x$, $-\mu n^2 y$, $-\mu n^2 z$ sont, comme dans les numéros précédents, les composantes de l'attraction de l'amas sur la particule supposée intérieure. En développant Ω et se limitant aux termes utiles, il vient

$$\frac{r'}{\Delta} - \frac{x}{r'} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{r'^2} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{r'^2} + \ldots,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{2k^2}{r'^3}x, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -\frac{k^2}{r'^3}y, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{k^2}{r'^3}z.$$

---

(1) *Comptes rendus*, 2 novembre 1896.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

Soit, dans le cas présent,

$$\frac{k^2}{r'^3} = \frac{fM}{r'^3} = n'^2(1-\beta);$$

les équations différentielles s'écrivent

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} + [\mu n^2 - 2n'^2(1-\beta) - n'^2]x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n'\frac{dx}{dt} + [\mu n^2 + \quad n'^2(1-\beta) - n'^2]y = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} \qquad\qquad + [\mu n^2 + \quad n'^2(1-\beta) \qquad]z = 0.$$

Si l'on y introduit

$$x = A\cos(sn't+\alpha), \qquad y = B\sin(sn't+\alpha),$$

il vient

$$-As^2 - 2Bs + \left(\mu\frac{n^2}{n'^2} - 3 + 2\beta\right)A = 0,$$

$$-Bs^2 - 2As + \left(\mu\frac{n^2}{n'^2} - \beta\right) \qquad B = 0,$$

et pour l'équation caractéristique

$$\left(s^2 - \mu\frac{n^2}{n'^2} + 3 - 2\beta\right)\left(s^2 - \mu\frac{n^2}{n'^2} + \beta\right) = 4s^2,$$

$$s^4 - (2h+1+\beta)s^2 + (h-\beta)(h-3+2\beta) = 0,$$

$$h = \mu\frac{n^2}{n'^2}.$$

La condition de réalité des racines s^2,

$$16h + 9\beta^2 - 10\beta + 1 = 16h + (1-\beta)(1-9\beta) > 0,$$

est vérifiée pour des orbites peu différentes du cercle; la condition du signe > 0 conduit à

$$h > 3 - 2\beta,$$

ou

$$\mu > \frac{n'^2}{n^2} + 2\frac{a^3}{r'^3}.$$

Or au perihélie et à l'aphélie on a $n'r'^2 = na^2\sqrt{1-e^2}$. Il en résulte que μ doit être plus grand au périhélie qu'à l'aphélie; la désagrégation, en d'autres termes, est plus accusée au périhélie.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

CHAPITRE III.

DÉSAGRÉGATION DES COMÈTES. STABILITÉ DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE EXTÉRIEURE A L'AMAS, DANS LE VOISINAGE DU PÉRIHÉLIE OU DE L'APHÉLIE.

1. Dans le voisinage, soit du périhélie, soit de l'aphélie, l'orbite du noyau M peut être assimilée à un arc de circonférence de rayon r' autour du Soleil S, décrite avec une vitesse angulaire uniforme n'.

Le problème du mouvement, dans le plan de l'orbite, d'une particule N extérieure à l'amas rapporté aux axes mobiles déjà employés peut être alors ramené à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre; cette équation a été développée dans le *Mémoire sur quelques cas particuliers de commensurabilité des moyens mouvements* (1).

Soient

θ l'angle de MN avec MS ou l'élongation;

r le rayon vecteur MN, peu différent d'une constante a_1, de sorte que, si l'on pose $r = \frac{a_1}{1+\rho}$, ρ est une quantité petite;

n_1 la constante liée à a_1 par la relation $n_1^2 a_1^3 = fm$ (m masse de la comète);

$\nu = \frac{n'}{n_1}$;

$\frac{fM}{r'^3} = n'^2(1-\beta)$.

L'équation différentielle qui donne ρ en fonction de θ s'écrit

$$
\begin{aligned}
0 = (1-\nu)^2 \frac{1+\rho+\frac{d^2\rho}{d\theta^2}}{1+\frac{3}{2}\frac{d\rho^2}{d\theta^2}} &\left\{1+\frac{2\rho}{(1-\nu)^2}+\frac{\nu^2}{(1-\nu)^2}[\beta+3(1-\beta)\cos^2\theta](1-2\rho\ldots)\right\} \\
&+2\nu(1-\nu)\left\{1+\frac{\rho}{(1-\nu)^2}-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(1-\nu)^4}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{(1-\nu)^2}[\beta+3(1-\beta)\cos^2\theta](1-2\rho)-\frac{1}{2}\frac{\rho\nu^2}{(1-\nu)^4}[\beta+3(1-\beta)\cos^2\theta]\right\} \\
&-\left\{1+2\rho+\rho^2-\nu^2[\beta+3(1-\beta)\cos^2\theta](1-\rho)+3\nu^2(1-\beta)\sin\theta\cos\theta\frac{d\rho}{d\theta}\right\}\left(1-\frac{1}{2}\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right).
\end{aligned}
$$

(1) *Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires,* t. XXII, Chap. III. Les axes adoptés dans ce Mémoire sont MS et la perpendiculaire dans le sens du mouvement du Soleil.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

Dans le développement de l'équation suivant les puissances et produits des petites quantités ρ et ν, on se limite aux termes du second degré en ρ, $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$; ceux en ν^4 sont négligés.

L'équation admet une solution particulière périodique S, telle que

$$S = A + B\cos 2\theta + \ldots,$$

A, B, ... contenant ν^2 en facteur. Si l'on pose

$$\rho = S + x,$$

les termes en ρ^2 donneront des termes linéaires en x qui auront ν^2 en facteur; dans les termes ayant déjà ν^2 en facteur, il suffira de conserver les seuls termes en ρ, puisqu'on néglige ν^4.

2. Commençons par chercher la solution

$$S = A + B\cos 2\theta + \ldots;$$

il suffit alors de considérer dans l'équation les termes linéaires en ρ, $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$:

$$\begin{aligned}(1-\nu)^2\left\{1+\rho+\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\frac{2\rho}{(1-\nu)^2}+\frac{\nu^2}{(1-\nu)^2}[\beta+3(1-\beta)\cos^2\theta]\right\}\\ +2\nu(1-\nu)\left\{1+\frac{\rho}{(1-\nu)^2}+\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{(1-\nu)^2}[\beta+3(1-\beta)\cos^2\theta]\right\}\\ -1-2\rho+\nu^2[\beta+3(1-\beta)\cos^2\theta]=0,\end{aligned}$$

ou, toujours avec la même approximation,

$$(1-2\nu)\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho-\nu^2+(2\nu^2+\nu^2)\left(\frac{3-\beta}{2}+\frac{3-3\beta}{2}\cos 2\theta\right)=0.$$

On en déduit aisément

$$A = \nu^2-(2\nu^2+\nu^3)g, \qquad B = \frac{2\nu^2+\nu^3}{3-8\nu}h,$$

où

$$g = \frac{3-\beta}{2}, \qquad h = \frac{3-3\beta}{2}.$$

3. Formons l'équation différentielle linéaire en x.

On trouve d'abord, après réductions, pour les coefficients des termes indi-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

qués ci-dessous :

ρ,	$\frac{d\rho}{d\theta}$,	$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$,	ρ^2,	$\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$,	$\frac{d\rho^2}{d\theta^2}$,
$(1-\nu)^2+\frac{2\nu}{1-\nu}$ $-2\nu^2(g+h\cos 2\theta)$.	$-3\nu^2(1-\beta)\sin\theta\cos\theta$,	$(1-\nu)^2+\nu^2(g+h\cos 2\theta)$,	1,	2,	-1

Pour simplifier, on a laissé de côté les termes en ν dans les coefficients de ρ^2 $\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$, $\frac{d\rho^2}{d\theta^2}$. Les termes du second degré

$$\rho^2+2\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}-\frac{d\rho^2}{d\theta^2}$$

donnent pour l'équation en x, quand on fait $\rho = S + x$,

$$2Sx+2\left(S\frac{d^2x}{d\theta^2}+S''x\right)-2S'\frac{dx}{d\theta};$$

on remplacera S par

$$S=\nu^2(1-2g)+\frac{2}{3}\nu^2 h\cos 2\theta.$$

En rassemblant les termes de l'équation en x, il vient pour les coefficients :

x,	$\frac{dx}{d\theta}$,	$\frac{d^2x}{d\theta^2}$,
$(1-\nu)^2+\frac{2\nu}{1-\nu}-2\nu^2(g+h\cos 2\theta)$ $+2\nu^2(1-2g)+\frac{4}{3}\nu^2 h\cos 2\theta$ $-\frac{16}{3}\nu^2 h\cos 2\theta$,	$-3\nu^2(1-\beta)\sin\theta\cos\theta$ $+\frac{8}{3}\nu^2 h\sin 2\theta$,	$(1-\nu)^2+\nu^2(g+h\cos 2\theta)$ $+2\nu^2(1-2g)$ $+\frac{4}{3}\nu^2 h\cos 2\theta$.

Pour rendre constant le coefficient de $\frac{d^2x}{d\theta^2}$, de la forme $(1-\nu)^2+A\nu^2$, on multiplie tous les termes par $1-\frac{A\nu^2}{(1-\nu)^2}$, il vient

$$(1-\nu)^2\frac{d^2x}{d\theta^2}+\left[\frac{8}{3}h-\frac{3}{2}(1-\beta)\right]\nu^2\sin 2\theta\frac{dx}{d\theta}$$
$$+\left[1+3\nu^2-3\nu^2(g+h\cos 2\theta)-\frac{16}{3}\nu^2 h\cos 2\theta\right]x=0.$$

Pour réduire l'équation, qui est de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}+X_1\frac{dx}{dt}+X_2x=0,$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

à la forme canonique, on pose

$$x = z e^{-\frac{1}{2}\int X_1 dt},$$

d'où résulte

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(X_2 - \frac{1}{4} X_1^2 - \frac{1}{2}\frac{dX_1}{dt}\right) z = 0.$$

Dans l'exemple, on peut négliger X_1^2; l'équation s'écrit

$$(1-\nu)^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} + \left\{1 + 3\nu^2 - 3\nu^2(g + h\cos 2\theta) - \frac{16}{3}\nu^2 h \cos 2\theta \right.$$
$$\left. - \nu^2\left[\frac{8}{3}h - \frac{3}{2}(1-\beta)\right]\cos 2\theta\right\} z = 0;$$

la partie constante et le coefficient de $\cos 2\theta$ dans le coefficient de z se réduisent à

$$1 + 3\nu^2 - 3\nu^2 g = 1 - \frac{3}{2}\nu^2(1-\beta), \qquad -15(1-\beta)\nu^2\cos 2\theta.$$

D'après le n° 2 du Chapitre I, la condition de stabilité exige

$$\left[\frac{1 - \frac{3}{2}\nu^2(1-\beta)}{(1-\nu)^2} - 1\right]^2 - \left[\frac{15}{2}\frac{(1-\beta)\nu^2}{(1-\nu)^2}\right]^2 > 0,$$

$$2\nu - \frac{3}{2}\nu^2(1-\beta) - \nu^2 - \frac{15}{2}(1-\beta)\nu^2 > 0;$$

$$\nu < \frac{2}{1 + 9(1-\beta)}.$$

Le rayon ρ de l'orbite limite de la particule est donc donné par la relation

$$n'\sqrt{\frac{\rho^3}{fm}} = \frac{2}{1 + 9\frac{fM}{n'^2 r'^3}}.$$

Au périhélie et à l'aphélie, on a respectivement

$$r' = a(1-e), \qquad r' = a(1+e);$$

le rapport des vitesses angulaires $n' = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$.

Soient ρ_1 et ρ_2 les rayons des sphères de stabilité au périhélie et à l'aphélie; on aura, en divisant terme à terme les relations répondant à ces deux points de l'orbite,

$$\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3} = \frac{10-e}{1-e}\,\frac{1+e}{10+e};$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

d'où, à fort peu près,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{2}{3}};$$

la sphère de stabilité de la comète est donc moins étendue au périhélie qu'à l'aphélie. Cela pourrait paraître évident par la raison que le périhélie est plus proche que l'aphélie; mais l'expression donnée d'abord pour ρ montre que cette vue serait incomplète, puisque la distance n'est pas seule à figurer dans le résultat.

4. Il importe de faire un rapprochement avec le Mémoire déjà cité : *Sur quelques cas de commensurabilité....* On a constaté que pour les petites planètes qui seraient à un moment donné dans la région des lacunes, par exemple celle où le rapport des moyens mouvements approche de $\frac{1}{2}$, l'instabilité apparente indiquée par un premier calcul se réduit, lorsque l'on poursuit les approximations, à une modification plus ou moins profonde de la stabilité; en tout cas, on a constaté la limitation des orbites quant aux excentricités [1].

N'y aurait-il pas lieu de poursuivre de même les approximations dans le problème qui nous occupe? Le calcul des termes du troisième degré en ρ, qui fournissent les termes que M. Gyldén a appelés *termes horistiques,* à cause des limitations qu'ils peuvent introduire, ne vient-il pas modifier les conclusions énoncées?

Or le calcul du n° 5 du Chapitre IV du Mémoire cité donne ici, pour la partie $\mathcal{R}_3$,

$$\mathcal{R}_3 = -\frac{3\nu^2}{(1-\nu)^4}(p^2+q^2)\rho,$$

quand on part de l'intégrale

$$\rho = p\cos\theta + q\sin\theta$$

de l'équation réduite

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = 0.$$

A cause du facteur ν^2, le terme en $\mathcal{R}_3$ est ici sans influence; il n'y a pas lieu de modifier les premières conclusions.

---

(1) Les deux Notes publiées dans les *Comptes rendus* (t. CXVIII, p. 751; t. CXX, p. 585) montrent nettement ces deux points.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

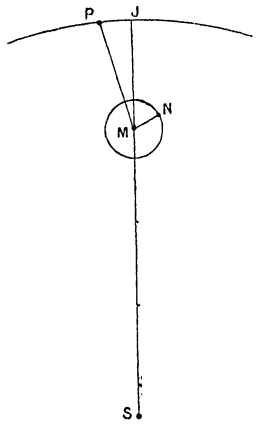
CHAPITRE IV.

DÉSAGRÉGATION DES COMÈTES. STABILITÉ DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE EXTÉRIEURE A L'AMAS, SOUS L'INFLUENCE COMBINÉE DU SOLEIL ET DE JUPITER.

Envisagé d'une manière générale, le problème rentre dans le problème des *quatre* corps; la particule est sollicitée par le noyau, par le Soleil et la planète.

Mais on peut introduire des simplifications en supposant d'abord que la comète est près de l'aphélie et que l'orbite peut être remplacée dans le voisinage de ce point par un arc de circonférence ayant son centre au Soleil; en regardant de plus comme circulaires les orbites du Soleil et de Jupiter.

1. Les équations différentielles du mouvement de la particule N, rapporté au



noyau M et supposé plan, peuvent s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{x}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{y}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial y};$$

$$\Omega = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy'}{r'^3}\right) + m''(\qquad);$$

le premier terme de Ω se rapportant au Soleil et le second à la planète. Il est inutile d'expliquer la signification des lettres.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

Si, au lieu d'axes de direction fixe, on prend, comme on l'a déjà fait, un système d'axes rectangulaires ayant son origine en M, l'axe des x étant dirigé vers le Soleil S, les équations différentielles deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Omega'}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n'\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Omega'}{\partial y};$$

n' est la vitesse angulaire moyenne du Soleil; on a employé les mêmes lettres x et y pour désigner les nouvelles coordonnées; on a posé

$$\Omega' = \Omega + \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}n'^2(x^2+y^2);$$

il est entendu que, dans Ω, on doit faire un changement de variables :

$$x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x\cos l' - y\sin l',$$

$$y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y\sin l' + x\cos l',$$

l' désignant la longitude moyenne du Soleil.

Les deux parties de Ω relatives au Soleil et à la planète sont à développer. On peut écrire les termes principaux (Tisserand, *Mécanique céleste*, t. III, p. 184-185) :

$$\text{Soleil} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{m'r^2}{r'^3}S_2,$$

$$\text{Planète} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{m''r^2}{\Delta^3}P_2;$$

r' et Δ désignent respectivement les distances SM et JM; S_2 et P_2 désignent le second polynome de Legendre $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, dans lequel on remplace respectivement x par le cosinus de l'angle SMN et par le cosinus de l'angle PMN.

D'après les hypothèses du début, la comète est à l'aphélie; on peut supposer Δ constant dans le voisinage de ce point. Une comète peut rester longtemps, plusieurs mois, dans la sphère d'activité de Jupiter, surtout quand les deux astres sont à leurs aphélies; les cosinus des deux angles SMN et PMN restent donc à peu près égaux, en valeur absolue, pendant un temps assez long.

Admettons que Jupiter se maintienne dans la direction SM à une distance constante de M, toute la différence avec le problème traité dans le Chapitre III

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

se réduira à remplacer

$$\frac{m'}{r'^3} \quad \text{par} \quad \frac{m'}{r'^3}\left[1+\frac{m''}{m'}\left(\frac{r'}{\Delta}\right)^3\right].$$

La relation naguère obtenue (p. 27), pour le rayon ρ de l'orbite limite

$$n'\sqrt{\frac{\rho^3}{fm}} = \frac{2}{1+9\dfrac{f\mathrm{M}}{n'^2 r'^3}},$$

devient, après un léger changement des notations,

$$n'\sqrt{\frac{\rho^3}{fm}} = \frac{2}{1+9\dfrac{f\mathrm{M}}{n'^2 r'^3}\left[1+\dfrac{m'}{\mathrm{M}}\left(\dfrac{r'}{\Delta}\right)^3\right]}.$$

On en déduit pour la valeur approchée du rapport des rayons des sphères de stabilité au périhélie, sous l'influence du Soleil et à l'aphélie, sous l'influence combinée du Soleil et de Jupiter :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left\{\frac{1-e}{1+e}\left[1+\frac{m'}{\mathrm{M}}\left(\frac{r'}{\Delta}\right)^3\right]\right\}^{\frac{2}{3}}.$$

Le rapport, qui était essentiellement inférieur à l'unité quand le Soleil entrait seul en ligne de compte, peut devenir ici plus grand que l'unité. En effet, soit q la distance périhélie de la comète, faisons

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{a(1-e)}{a(1+e)} = \frac{q}{r'},$$

le rapport mentionné sera égal à l'unité pour

$$q = \frac{r'}{1+\dfrac{m'}{\mathrm{M}}\left(\dfrac{r'}{\Delta}\right)^3}.$$

Supposons que la comète rase la sphère d'activité de Jupiter, admettons

$$\frac{r'}{\Delta} = 20, \qquad \frac{m'}{\mathrm{M}}\left(\frac{r'}{\Delta}\right)^3 = 8;$$

il vient

$$q = 0,58,$$

alors que la moyenne des distances périhélies pour les comètes périodiques dépasse un peu l'unité.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

La tendance à la désagrégation dans le voisinage de Jupiter peut être naturellement rapprochée de la théorie que Proctor a appelée l'*éjection,* d'après laquelle les comètes seraient des matériaux rejetés autrefois par les planètes principales, Jupiter en particulier, à la suite d'explosions [1]. Dans les deux cas, l'origine des matériaux des comètes se trouve au voisinage de l'orbite de Jupiter.

---

[1] Cf. *Étude sur la Théorie des Comètes périodiques,* p. 40 et suiv.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

CHAPITRE V.

DÉSAGRÉGATION DES COMÈTES. STABILITÉ DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE EXTÉRIEURE A L'AMAS.

1. L'équation différentielle qu'on aura à considérer dans un instant prend la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \mu U + \mu \int V\,dt = 0;$$

μ est un coefficient supposé petit.

Pour intégrer par approximations successives en suivant la méthode de Laplace, on différentie et l'on part de l'intégrale générale de

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = 0,$$

qui est

$$x = c\sin t + c'\cos t + c'';$$

il en résulte

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= c\cos t - c'\sin t, & c &= \frac{dx}{dt}\cos t - \frac{d^2x}{dt^2}\sin t, & F &= -\sin t,\\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -c\sin t - c'\cos t, & c' &= -\frac{dx}{dt}\sin t - \frac{d^2x}{dt^2}\cos t, & G &= -\cos t,\\
& & c'' &= x + \frac{d^2x}{dt^2}, & H &= +1;
\end{aligned}$$

F, G, H sont les facteurs par lesquels il faut multiplier l'équation différentielle réduite pour retrouver identiquement les expressions de $\frac{dc}{dt}$, $\frac{dc'}{dt}$, $\frac{dc''}{dt}$.

Il vient ensuite pour l'intégrale

$$\begin{aligned}
x &= c\sin t + c'\cos t + c''\\
&\quad + \mu\sin t\int(U' + V)\sin t\,dt + \mu\cos t\int(U' + V)\cos t\,dt - \mu\int(U' + V)\,dt,
\end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$x = c\sin t + c'\cos t + c'' + \mu\Delta_2(V) + \mu\Delta_1(U) - \mu\int V\,dt,$$

$$\Delta_1(X) = \cos t\int X\sin t\,dt - \sin t\int X\cos t\,dt,$$

$$\Delta_2(X) = \cos t\int X\cos t\,dt + \sin t\int X\sin t\,dt;$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

les symboles d'opération Δ_1 et Δ_2 sont bien connus du lecteur. En procédant par approximations successives, on construit le développement de x. Ce développement contient, il est vrai, des arcs de cercle; mais on sait qu'on peut utiliser l'expression trouvée pour faire disparaître ces termes : il suffit de remplacer t par $t - \theta$ en dehors des sinus et cosinus, et d'écrire que la dérivée $\frac{dx}{d\theta}$ est nulle en faisant varier les constantes c, c', c''; on obtient ainsi les équations différentielles faisant connaître c, c', c'' en fonction de θ, après quoi on remplace θ par t. La substitution de l'expression de l'intégrale dans l'équation différentielle primitive détermine enfin c'' au moyen de c et c'.

2. Le problème qui nous occupe ne diffère pas, au fond, de celui du mouvement de la Lune. En conséquence, nous allons utiliser l'équation différentielle de Laplace qui fait connaître le rayon de l'orbite lunaire en fonction de la longitude (Tisserand, *Mécanique céleste*, t. III, p. 120) :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho + 1 - \frac{a}{h^2} + \frac{1}{2} m^2 \frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^3}[1 + 3\cos(2v - 2v')] \\ - \frac{3}{2} m^2 \frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4} \frac{d\rho}{dv} \sin(2v - 2v') \\ - 3m^2\left(1 + \rho + \frac{d^2\rho}{dv^2}\right)\int \frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4} \sin(2v - 2v')\, dv = 0.\end{aligned}$$

Le terme constant $1 - \frac{a}{h^2}$, du second ordre, disparaît quand on différentie l'équation. Dans le développement suivant les puissances de ρ et de ρ', on remplace $m^2\left(1 + \rho + \frac{d^2\rho}{dv^2}\right)$ par m^2, en négligeant des termes du quatrième ordre en m^4 et $m^2 e^2$. A la place de v' et de ρ' on doit substituer (Tisserand, t. III, p. 96)

$$\begin{aligned} v' &= mv + 2e' \sin(mv - \varpi') - 2me \sin(cv - \varpi) + \frac{5}{4} e'^2 \sin(2mv - 2\varpi'), \\ \rho' &= \qquad e' \cos(mv - \varpi') + e'^2 \cos(2mv - 2\varpi'). \end{aligned}$$

Il est entendu qu'on doit mettre plus tard $mv + \varepsilon'$ à la place de mv. Le coefficient c' qui figure dans les formules (19), à l'endroit cité, est remplacé par l'unité. Le terme de v' avec le coefficient $2me$ donnerait, après la substitution de v', des termes du quatrième ordre en $m^3 e$; on ne tient pas compte de ces termes parce que d'autres en $m^2 e$ interviennent dans le calcul.

3. Pour entrer en matière, on admet d'abord $e' = 0$; l'orbite du Soleil est circulaire, et l'on retombe sur le cas traité par M. Luc Picart.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

En prenant comme variable indépendante $v(1-m)=t$, ce qui donne

$$mv = \frac{m}{1-m}\,t = \alpha t,$$

si l'on fait

$$\alpha = \frac{m}{1-m},$$

et laissant le terme constant $1-\frac{a}{h^2}$, l'équation devient

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{\rho}{(1-m)^2} + \frac{1}{2}\alpha^2(1-3\rho)(1+3\cos 2t)$$
$$-\frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\frac{d\rho}{dt}\sin 2t - \frac{3\alpha^2}{1+\alpha}\int(1-4\rho)\sin 2t\,dt = 0,$$

ou, à cause de

$$\frac{1}{1-m} = 1+\alpha,$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + (1+2\alpha+\alpha^2)\rho - \frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\frac{d\rho}{dt}\sin 2t$$
$$+\frac{1}{2}\alpha^2(1-3\rho)(1+3\cos 2t) - \frac{3\alpha^2}{1+\alpha}\int(1-4\rho)\sin 2t\,dt = 0.$$

Il y a à noter que dans le développement de l'équation suivant les puissances de ρ, il a suffi de s'arrêter aux termes du premier degré; comme les premières approximations vont donner pour ρ une expression telle que

$$\rho = e\cos(v+\varepsilon) + \text{termes en } \alpha e + \text{termes en } \alpha^2,$$

le produit par α^2 des puissances de ρ supérieures à la première ne fournirait rien d'utile. On peut aussi négliger α devant l'unité dans $1+\alpha$. Rapproche-t-on l'équation différentielle précédente du type envisagé dans le n° 1, il vient, pour les expressions qui se correspondent,

$$\mu U \ldots\ldots \quad (2\alpha+\alpha^2)\rho - \frac{3}{2}\alpha^2\frac{d\rho}{dt}\sin 2t + \frac{1}{2}\alpha^2(1-3\rho)(1+3\cos 2t),$$
$$\mu V \ldots\ldots \quad -3\alpha^2(1-4\rho)\sin 2t.$$

Il convient de tenir compte de la partie $2\alpha\rho$ de μU par une opération préliminaire. La formule

$$\rho = e\cos(t+\varepsilon) + c'' + \mu\Delta_1(U) + \mu\Delta_2(V) - \mu\int V\,dt$$

donne

$$\rho = e\cos(t+\varepsilon) + c'' - \alpha t e\sin(t+\varepsilon) - \frac{\alpha}{2}e\cos(t+\varepsilon),$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

à cause de

$$\Delta_1(2\alpha\rho)\ldots\ldots \quad 2\alpha e\left[-\frac{t}{2}\sin(t+\varepsilon)-\frac{1}{4}\cos(t+\varepsilon)\right].$$

La substitution de l'expression de ρ dans les termes ajoutés donne ensuite, en ne conservant que les parties utiles, celles qui serviront à la formation des équations différentielles des arbitraires,

$$\begin{aligned}\mu U\ldots\ldots \quad & 2\alpha e\cos(t+\varepsilon)-2\alpha^2 te\sin(t+\varepsilon)-\alpha^2 e\cos(t+\varepsilon)\\ & +\alpha^2 e\cos(t+\varepsilon)+\frac{3}{4}\alpha^2 e\cos(t-\varepsilon)\\ & -\frac{3}{2}\alpha^2 e\cos(t+\varepsilon)-\frac{9}{4}\alpha^2 e\cos(t-\varepsilon),\\ \mu V\ldots\ldots \quad & 6\alpha^2 e\sin(t-\varepsilon).\end{aligned}$$

c'' est au moins de l'ordre de α^2, comme on le voit par la substitution de l'expression de ρ dans le premier membre de l'équation différentielle de la page 34; l'omission de c'' dans l'expression de ρ qu'on substitue revient à négliger α^4 ou à modifier ρ d'une quantité constante comparable à $\alpha c''$, ce qui n'a point d'effet sur les parties utiles. On ne s'occupera plus désormais de l'arbitraire c''. On traitera α comme une constante absolue.

Les opérations Δ_1 et Δ_2, effectuées sur U et V respectivement, donnent

$$\begin{aligned}\mu\Delta_1(U)\ldots\ldots \quad & -\alpha te\sin(t+\varepsilon)-\frac{\alpha}{2}e\cos(t+\varepsilon)+\frac{\alpha^2}{2}te\sin(t+\varepsilon)\\ & +\frac{3}{4}\alpha^2 te\sin(t+\varepsilon)+\frac{3}{4}\alpha^2 te\sin(t-\varepsilon)\ldots,\\ \mu\Delta_2(V)\ldots\ldots \quad & 3\alpha^2 te\sin(t-\varepsilon)\ldots.\end{aligned}$$

On en déduit l'intégrale

$$x=e\cos(t+\varepsilon)+\mu\Delta_1(U)+\mu\Delta_2(V)-\mu\int V\,dt.$$

On forme enfin de la manière indiquée plus haut les équations différentielles faisant connaître

$$p=e\cos\varepsilon \qquad \text{et} \qquad q=e\sin\varepsilon,$$

en fonction de θ; il suffit de comparer les coefficients de $\cos t$ et $\sin t$ pour obtenir

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dp}{d\theta}=\left(-\alpha+\frac{5}{4}\alpha^2+\frac{3}{4}\alpha^2-3\alpha^2\right)q,$$

$$-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dq}{d\theta}=\left(-\alpha+\frac{5}{4}\alpha^2+\frac{3}{4}\alpha^2+3\alpha^2\right)p.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

Pour la stabilité, le coefficient de p doit être négatif; on doit avoir

$$\alpha < \frac{1}{5}.$$

4. On aborde maintenant le cas de $e' \neq 0$ en ne tenant compte, pour commencer, que des termes du premier degré en e'.

L'équation différentielle s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho(1+2\alpha+\alpha^2) - \frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1+\alpha}(1+3\rho')\frac{d\rho}{dt}\sin[2t-4e'\sin(\alpha t-\varpi')]\\ + \frac{1}{2}\alpha^2(1+3\rho')(1-3\rho)\{1+3\cos[2t-4e'\sin(\alpha t-\varpi')]\}\\ - 3\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\int(1+3\rho')(1-4\rho)\sin[2t-4e'\sin(\alpha t-\varpi')] = 0.\end{aligned}$$

Pour les raisons déjà données page 35, il suffit de garder les seuls termes du premier degré en ρ dans la partie ayant α^2 en facteur. ρ' tient la place de

$$e'\cos(mv-\varpi') \qquad \text{ou de} \qquad e'\cos(\alpha t-\varpi');$$

on a remplacé partout mv par αt.

Suivant l'esprit de la méthode, après avoir écrit l'argument qui figure dans les expressions de ρ' et v' de la manière suivante

$$\alpha t - \varpi' = \alpha\theta - \varpi' + \alpha(t-\theta),$$

on développe suivant les puissances croissantes de $\alpha(t-\theta)$.

On prend d'abord les premiers termes des développements. Dans les dénominateurs $1+\alpha$ est encore remplacé par l'unité.

Les parties utiles de μU et μV sont

$$\begin{aligned}\mu U \ldots\ldots \quad & 2\alpha e\cos(t+\varepsilon) - 2\alpha^2 te\sin(t+\varepsilon) - \alpha^2 e\cos(t+\varepsilon) + \alpha^2 e\cos(t+\varepsilon)\\ & + \frac{3}{4}\alpha^2(1+3\rho')e\cos[t-\varepsilon-4e'\sin(\alpha\theta-\varpi')]\\ & - \frac{3}{2}\alpha^2(1+3\rho')e\cos(t+\varepsilon)\\ & - \frac{9}{4}\alpha^2(1+3\rho')e\cos[t-\varepsilon-4e'\sin(\alpha\theta-\varpi')],\\ \mu V \ldots\ldots \quad & 6\alpha^2(1+3\rho')e\sin[t-\varepsilon-4e'\sin(\alpha\theta-\varpi')];\end{aligned}$$

ρ' tient la place de $e'\cos(\alpha\theta-\varpi')$.

Dans l'expression de μU figurent, en première ligne, les termes provenant de

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

la partie $(2\alpha + \alpha^2)\rho$ déjà calculés page 36. Les opérations Δ_1 et Δ_2 effectuées sur U et V respectivement donnent

$$\mu\Delta_1(\mathrm{U}),\ldots\ldots \quad -\alpha t e \sin(t+\varepsilon) - \frac{\alpha}{2} e\cos(t+\varepsilon) + \frac{\alpha^2}{2} t e \sin(t+\varepsilon)$$
$$+\frac{3}{4}\alpha^2 t(1+3\rho')e\sin(t+\varepsilon)$$
$$+\frac{3}{4}\alpha^2 t(1+3\rho')e\sin[t-\varepsilon-4e'\sin(\alpha\theta-\varpi')],$$
$$\mu\Delta_2(\mathrm{V})\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\alpha^2 t(1+3\rho')e\sin[t-\varepsilon-4e'\sin(\alpha\theta-\varpi')].$$

On déduit de là l'intégrale et ensuite les équations différentielles pour p et q

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dp}{d\theta} = -\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)q + \frac{3}{4}\alpha^2(1+3\rho')q - \frac{15}{4}\alpha^2(1+3\rho')[q+4e'p\sin(\alpha\theta-\varpi')],$$
$$-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dq}{d\theta} = -\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)p + \frac{3}{4}\alpha^2(1+3\rho')p + \frac{15}{4}\alpha^2(1+3\rho')[p-4e'q\sin(\alpha\theta-\varpi')].$$

Pose-t-on

$$\alpha\theta = u,$$

après avoir divisé tous les termes des équations par α, il vient un système de la forme

$$\frac{dp}{du} = -q + [\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}e'\alpha\cos(u-\varpi')]q - \mathrm{C}e'\alpha\sin(u-\varpi')p,$$
$$\frac{dq}{du} = +p + [\mathrm{D}\alpha + \mathrm{E}e'\alpha\cos(u-\varpi')]p + \mathrm{C}e'\alpha\sin(u-\varpi')q.$$

Or, l'intégration par approximations successives de ce système d'équations montre aussitôt que les termes du premier degré en e' n'interviennent pas dans les exposants caractéristiques.

5. Le calcul va être actuellement poussé jusqu'aux termes en e'^2, c'est-à-dire que l'on va chercher dans l'expression de l'intégrale les termes ayant en facteur $\alpha^2 e'^2$.

On reprend l'écriture de l'équation en tenant compte des termes en e'^2. Il faut calculer

$$(1+\rho')^3, \quad (1+\rho')^3\cos(2v-2v'), \quad (1+\rho')^3\sin(2v-2v').$$

Les expressions de ρ' et v' ont été données page 34; il y faut omettre le terme

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

en *me*,

$$2v - 2v' = 2t - 4e'\sin(\alpha t - \varpi') - \frac{5}{2}e'^2\sin(2\alpha t - 2\varpi'),$$

$$\begin{aligned}\sin(2v - 2v') = {} & \sin 2t[1 - 8e'^2\sin^2(\alpha t - \varpi')] \\ & - \cos 2t\left[4e'\sin(\alpha t - \varpi') + \frac{5}{2}e'^2\sin(2\alpha t - 2\varpi')\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2v - 2v') = {} & \cos 2t[1 - 8e'^2\sin^2(\alpha t - \varpi')] \\ & + \sin 2t\left[4e'\sin(\alpha t - \varpi') + \frac{5}{2}e'^2\sin(2\alpha t - 2\varpi')\right],\end{aligned}$$

$$(1 + \rho')^3 = 1 + 3e'\cos(\alpha t - \varpi') + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{2}e'^2\cos(2\alpha t - 2\varpi'),$$

$$\begin{aligned}(1 + \rho')^3\sin(2v - 2v') = {} & \sin 2t\left[1 + 3e'\cos(\alpha t - \varpi') - \frac{5}{2}e'^2 + \frac{17}{2}e'^2\cos(2\alpha t - 2\varpi')\right] \\ & - \cos 2t\left[4e'\sin(\alpha t - \varpi') + \frac{17}{2}e'^2\sin(2\alpha t - 2\varpi')\right].\end{aligned}$$

On sait qu'il n'y a pas lieu d'avoir égard aux termes du premier degré en e'. Soit, pour abréger l'écriture,

$$\mathrm{M}' = 1 - \frac{5}{2}e'^2 + \frac{17}{2}e'^2\cos(2\alpha\theta - 2\varpi'),$$

$$\mathrm{N}' = \frac{17}{2}e'^2\sin(2\alpha\theta - 2\varpi');$$

il vient, pour les expressions à substituer à celles indiquées sur la gauche,

$$(1 + \rho')^3\sin(2v - 2v') \ldots\ldots \quad \mathrm{M}'\sin 2t - \mathrm{N}'\cos 2t,$$

$$(1 + \rho')^3\cos(2v - 2v') \ldots\ldots \quad \mathrm{M}'\cos 2t + \mathrm{N}'\sin 2t,$$

$$(1 + \rho')^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{2}e'^2\cos(2\alpha\theta - 2\varpi'),$$

puis, pour les termes utiles,

$$\begin{aligned}\mu\mathrm{U} \ldots\ldots \quad & 2\alpha e\cos(t + \varepsilon) - 2\alpha^2 te\sin(t + \varepsilon) - \alpha^2 e\cos(t + \varepsilon) + \alpha^2 e\cos(t + \varepsilon) \\ & + \frac{3}{4}\alpha^2 e[\mathrm{M}'\cos(t - \varepsilon) + \mathrm{N}'\sin(t - \varepsilon)] \\ & - \frac{3}{2}\alpha^2(1 + \rho')^3\rho \\ & - \frac{9}{4}\alpha^2 e[\mathrm{M}'\cos(t - \varepsilon) + \mathrm{N}'\sin(t - \varepsilon)],\end{aligned}$$

$$\mu\mathrm{V} \ldots\ldots \quad 6\alpha^2 e[\mathrm{M}'\sin(t - \varepsilon) - \mathrm{N}'\cos(t - \varepsilon)].$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

On déduit de là l'intégrale, puis les équations différentielles

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dp}{d\theta}=-\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)q+\frac{3}{4}\alpha^2(1+\rho')^3q-\frac{15}{4}\alpha^2\mathrm{N}'p-\frac{15}{4}\alpha^2\mathrm{M}'q,$$

$$-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dq}{d\theta}=-\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)p+\frac{3}{4}\alpha^2(1+\rho')^3p-\frac{15}{4}\alpha^2\mathrm{N}'q+\frac{15}{4}\alpha^2\mathrm{M}'p.$$

Pose-t-on

$$\alpha\theta-\varpi'=u,$$

après avoir divisé tous les termes des équations par α, elles prennent la forme

$$\frac{dp}{du}=-(1+\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\alpha e'^2\cos 2u)q-\mathrm{C}\alpha e'^2\sin 2u\,p,$$

$$\frac{dq}{dt}=+(1+\mathrm{D}\alpha+\mathrm{E}\alpha e'^2\cos 2u)p+\mathrm{C}\alpha e'^2\sin 2u\,q;$$

les valeurs des coefficients A, B, C, D, E résultent de la comparaison avec l'écriture précédente des équations.

6. Il reste à faire l'étude des deux équations différentielles simultanées à coefficients périodiques.

On tire de la première des équations la valeur de q qu'on porte dans la seconde, et, pour cela, on multiplie d'abord tous les termes de la première par $1+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B}\alpha e'^2\cos 2u$, en négligeant e'^4,

$$-(1+\mathrm{A}\alpha)^2q=(1+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B}\alpha e'^2\cos 2u)\frac{dp}{du}+(1+\mathrm{A}\alpha)\mathrm{C}\alpha e'^2\sin 2u\,p;$$

différentiant, il vient

$$-(1+\mathrm{A}\alpha)^2\frac{dq}{du}=(1+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B}\alpha e'^2\cos 2u)\frac{d^2p}{du^2}$$
$$+[2\mathrm{B}+(1+\mathrm{A}\alpha)\mathrm{C}]\alpha e'^2\sin 2u\frac{dp}{du}+2(1+\mathrm{A}\alpha)\mathrm{C}\alpha e'^2\cos 2u\,p;$$

l'équation différentielle du second ordre en p est

$$(1+\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B}\alpha e'^2\cos 2u)\frac{d^2p}{du^2}$$
$$+[2\mathrm{B}+(1+\mathrm{A}\alpha)\mathrm{C}-(1+\mathrm{A}\alpha)\mathrm{C}]\alpha e'^2\sin 2u\frac{dp}{du}$$
$$+[(1+\mathrm{A}\alpha)^2(1+\mathrm{D}\alpha+\mathrm{E}\alpha e'^2\cos 2u)+2(1+\mathrm{A}\alpha)\mathrm{C}\alpha e'^2\cos 2u]p=0;$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

elle devient, après simplifications,

$$\frac{d^2p}{du^2} + \frac{2B}{1+A\alpha}\alpha e'^2 \sin 2u \frac{dp}{du}$$
$$+\left[(1+A\alpha)(1+D\alpha+E\alpha e'^2\cos 2u)\left(1+\frac{B\alpha e'^2\cos 2u}{1+A\alpha}\right)+2C\alpha e'^2\cos 2u\right]p=0;$$

et, si on la réduit à la forme canonique en faisant la même transformation que page 27,

$$\frac{d^2z}{du^2}+z\left(X_2-\frac{1}{2}\frac{dX_1}{du}\right)=0:$$

$$X_2-\frac{1}{2}\frac{dX_1}{du}=(1+A\alpha)(1+D\alpha)+\left[(1+D\alpha)B+(1+A\alpha)E+2C-\frac{2B}{1+A\alpha}\right]\alpha e'^2\cos 2u.$$

On peut écrire

$$A=-\frac{3}{4}\left(1+\frac{3}{2}e'^2\right)+\frac{15}{4}\left(1-\frac{5}{2}e'^2\right),$$

$$B=-\frac{3}{4}\frac{9}{2}+\frac{15}{4}\frac{17}{2}=\frac{228}{8},$$

$$D=-\frac{3}{4}\left(1+\frac{3}{2}e'^2\right)-\frac{15}{4}\left(1-\frac{5}{2}e'^2\right),$$

$$E=-\frac{3}{4}\frac{9}{2}-\frac{15}{4}\frac{17}{2}=-\frac{282}{8},$$

$$C=\frac{15}{4}\frac{17}{2}.$$

Les termes indépendants de α dans le crochet de $X_2-\frac{1}{2}\frac{dX_1}{du}$ se détruisent; c'est une circonstance à noter.

Le crochet se réduit ensuite à

$$(BD+AE+2AB)\alpha,$$

c'est-à-dire, en ne gardant que les termes principaux, à

$$\left(-\frac{228}{8}\frac{9}{2}-\frac{282}{8}\frac{6}{2}+6\frac{228}{8}=-63\right)\alpha.$$

D'autre part, on peut écrire

$$(1+A\alpha)(1+D\alpha)=1+(A+D)\alpha=1-\frac{3}{2}\alpha.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

D'après ce qu'on a vu page 10, la condition de stabilité sera

$$\frac{3}{2} > \frac{63}{2}\alpha e'^2,$$

ou

$$\alpha e'^2 < \frac{1}{21}.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

CHAPITRE VI.

EXEMPLES DE DÉSAGRÉGATION DE COMÈTES.

1. D'après les calculs des Chapitres précédents, la désagrégation d'une comète par le Soleil est favorisée par l'allongement de l'orbite et la petitesse de la distance périhélie. D'autre part, l'action combinée de Jupiter et du Soleil a la plus forte influence sur les comètes périodiques quand leurs excentricités sont faibles, que les astres se trouvent à proximité de Jupiter et restent longtemps dans son voisinage. Dans ce dernier cas, si les matériaux désagrégés se trouvent dans la sphère d'attraction de Jupiter, ils seront sujets à de grandes perturbations.

Les comètes 1882 II et 1889 V offrent respectivement des circonstances typiques. On attribue encore aux perturbations de Jupiter, vers 1841, la division de la comète de Biéla avant le passage au périhélie de 1846. M. Schulhof cite aussi le cas des comètes périodiques de Wolf et de Barnard 1892 V, dont la séparation peut être attribuée à Jupiter sans que l'on puisse toutefois préciser l'époque à laquelle elle s'est produite (*B. A.*, t. XI, p. 331; 1894).

Tisserand, prenant pour base un Mémoire très complet de M. Kreutz (*Untersuchungen über das Cometensystem* 1843 *I*, 1880 *I und* 1882 *II*), a montré qu'on peut se rendre compte du développement des noyaux secondaires de la comète 1882 II en faisant abstraction des attractions mutuelles qui sont certainement très petites et considérant les divers noyaux comme de petites comètes seulement soumises à l'attraction du Soleil, se mouvant sur des ellipses très allongées, ayant un même périhélie où elles passent presque en même temps et des grands axes différents, mais dirigés suivant la même droite. Près du périhélie, les mobiles sont très rapprochés et enveloppés par une nébulosité assez dense; on ne voit que l'ensemble sans pouvoir distinguer les détails. Cela devient possible plus tard, quand les centres de condensation se sont séparés de quantités notables et que le reste de la nébulosité s'est affaibli en se répandant sur une surface plus étendue (*B. A.*, t. VII, p. 54; 1890).

On connaît quatre comètes

1843 I, 1880 I, 1882 II et 1887 I,

ayant une très petite distance périhélie et présentant en outre une grande simi-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

litude dans leurs éléments. Le rapprochement avec ce qu'on sait des noyaux secondaires de la comète 1882 II est tout naturel.

2. La division d'une comète à l'aphélie sous l'influence combinée du Soleil et de Jupiter forme comme la contre-partie. A l'égard de la comète 1889 V qui a fait l'objet des travaux de MM. Bredikhine et Chandler, résumés par M. Kreutz (*V. J. S.*, t. XXV, p. 79; 1890), il a été établi que l'orbite de l'un au moins des compagnons coupe l'orbite de la comète principale en un point près de l'aphélie. Or, en juin 1886, comme M. Chandler l'a remarqué le premier, la comète à l'aphélie s'est beaucoup rapprochée de Jupiter : il y a lieu d'admettre que la division s'est produite vers cette époque sous l'influence de Jupiter; les conditions indiquées comme favorables par la théorie, grande proximité des astres, faible vitesse relative, excentricité modérée (0,47), se trouvent réunies.

Les circonstances de la division de la comète de Biéla ne sont pas aussi nettes. Voici ce qu'on peut dire d'après les travaux de Hubbard. La comète passe juste au delà et au-dessus de l'orbite de Jupiter; la distance à la planète, qui ne dépasse pas l'unité en moyenne pendant deux ou trois ans, peut s'abaisser à moins de 0,4. Une recherche générale de la distance relative des deux noyaux montre qu'il y a toujours un maximum au périhélie ou près du périhélie, et un minimum au point opposé de l'orbite vers l'aphélie (*Astr. Journal*, t. VI, p. 159).

La difficulté d'identifier les deux noyaux a forcé Hubbard à faire les calculs dans deux hypothèses; dans chaque hypothèse on cherche le minimum de la distance relative Δ des deux noyaux avant et après le périhélie.

Dans la première hypothèse, les deux minima de distance ont lieu avant et après le périhélie par -153° et $+157^\circ$ d'anomalie vraie, ou par 316° et 266° de longitude héliocentrique; les valeurs de Δ sont 0,00016 et 0,00015.

Dans la seconde hypothèse, les minima respectifs 0,00078 et 0,00068 ont lieu par $+154^\circ$ et -155° d'anomalie vraie.

Hubbard rapporte la division de la comète à la plus petite valeur de Δ avant le périhélie, et il conclut que la séparation des noyaux s'est produite par une longitude héliocentrique de 316°, correspondant à un intervalle de cinq cents jours avant le périhélie (*Astr. Journal*, t. IV, p. 4).

Mais l'autre valeur de Δ étant tout à fait comparable, on peut aussi bien donner la préférence à la seconde hypothèse. Dans ce cas la division de la comète se serait produite plus tôt, par une longitude héliocentrique d'à peu près 266°, voisine de la longitude (268°) du point de proximité de l'orbite de la comète relativement à l'orbite de Jupiter.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

3. Des divisions analogues à celles présentées par les comètes 1882 II et 1889 V ont eu lieu peut-être pour d'autres comètes, mais, avec le temps, elles ont été masquées par les perturbations inégales causées par les grosses planètes, et il devient très difficile de préciser la cause de l'analogie des éléments. Les *criteria* employés par M. Schulhof pour faciliter la recherche de l'identité des comètes (Cf. *B. A*, mars 1897) doivent *a priori* laisser place au doute puisque, si la comète s'est rompue en plusieurs morceaux, les *criteria* ne peuvent s'appliquer indifféremment à tous. La relation qui porte le nom de Tisserand sera toutefois la plus utile. Une difficulté de même ordre s'est présentée à M. Kreutz dans le travail déjà mentionné : après la division de la comète 1882 II, aucun des noyaux secondaires ne représentait le centre de gravité, ce qui a rendu difficile de rattacher l'une à l'autre les deux branches de l'orbite avant et après le périhélie.

Les résultats de la désagrégation peuvent être très variés suivant les circonstances, puisque la dissolution peut être totale, comme cela paraît avoir lieu pour quelques essais d'étoiles filantes, ou partielle; si le mouvement du centre de gravité de l'ensemble des morceaux se conserve après la dissolution, ceux des morceaux peuvent différer en grandeur et en direction.

On ne saurait oublier d'ailleurs l'exemple donné par la comète 1892 III, de manifestations très actives à des distances considérables du Soleil, supérieures à 2. Ces actions, spéciales aux comètes, doivent tenir évidemment une place dans une vue d'ensemble des phénomènes. Ce sont elles qui, d'abord, ont même paru à M. Bredikhine devoir jouer le rôle le plus important. Les actions dont il s'agit ont pu avoir de l'influence sur les phénomènes présentés par la comète 1882 II, mais elles sont sans doute négligeables pour la comète 1889 V et les autres comètes périodiques, à l'égard desquelles on doit admettre que la force produisant les émissions et les queues est relativement épuisée (Bredikhine, *Sur quelques cas de morcellement des comètes*).

4. Il faut reconnaître que des observations variées et précises sur les comètes et les corps qui paraissent de la même famille : étoiles filantes et bolides; que des calculs rigoureux pour fixer les circonstances du mouvement; enfin, que des statistiques exactes sont encore nécessaires pour éclaircir bien des points.

L'idée de familles cométaires fut d'abord suggérée par Thomas Clausen, en 1831 (Miss Clerke, *Histoire de l'Astronomie pendant le* XIXe *siècle*). Elle fut développée par les recherches pénétrantes de Hœk, directeur de l'observa-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

toire d'Utrecht, en 1865, et dans les années suivantes (1). Il trouva que dans un nombre assez considérable de cas les orbites de deux ou trois comètes avaient un point commun d'intersection, ce qui indiquait avec vraisemblance une communauté d'origine. Les différentes comètes pouvaient être rattachées, suivant Hœk, à la désagrégation d'un seul astre, survenue lors du passage près d'une étoile jouant le rôle de corps perturbateur. En d'autres termes, Hœk cherchait dans les profondeurs de l'espace la cause d'une désagrégation que nous sommes plutôt portés aujourd'hui à attribuer au Soleil et aux grosses planètes. En tout cas, les coïncidences constatées par Hœk subsistent malgré quelques réserves de M. Holetschek sur la réalité de la liaison physique des groupes. (On peut voir sur ce sujet un article intéressant de M. Plummer, *The Observatory*, t. XIII, p. 263.)

Peu importe que les comètes, au lieu de venir de l'espace stellaire, ainsi que l'admettait Hœk, fassent partie de notre système, suivant les vues de Newton auxquelles nous ramènent les travaux récents (*voir* la thèse de M. Fabry : *Sur l'origine des comètes*). Il n'y a aucune difficulté d'admettre l'existence de groupes de comètes aux confins de notre système. Rappelons que, d'après M. Svedstrup (*A. N.*, N° 2552), la plupart des aphélies des comètes se trouvent dans la voie lactée.

Quant à la famille si caractéristique des comètes à courte période, il nous semble que les vues du colonel du Ligondès (2) méritent l'attention des astronomes. Que l'on considère la foule des matériaux qui, d'après ce que nous voyons pour les étoiles filantes, passent en chaque point de l'espace avec des vitesses plus ou moins différentes, sans exclure la vitesse hyperbolique; les matériaux décrivant une orbite circulaire, qui jouit de la plus grande stabilité, pourront donner naissance à une planète; les autres, qui se meuvent dans des orbites excentriques ou inclinées, échapperont à la condensation; ils formeront des amas ou comètes, nombreuses surtout vers les régions où les anneaux planétaires ont la plus grande densité, par exemple à proximité de l'orbite de Jupiter. Ces comètes devront obéir à l'entraînement général vers l'Est dans une plus large mesure que celles situées à une plus grande distance du Soleil.

Cette manière de voir est d'accord avec le fait constaté par M. Schulhof

(1) Les travaux de Hœk ont été réunis et reproduits dans les *Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, t. IX, p. 385; 1874.

(2) *Formation mécanique du système du monde*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1897.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1902AnPar..23D...1C

qu'un grand nombre d'orbites cométaires se rapprochent des orbites des planètes. Les objections à la théorie de la capture tirées de calculs de probabilités perdent leur force. Enfin les rapprochements suggérés par plusieurs savants, Kirkwood entre autres, entre les petites planètes et les comètes périodiques deviennent tout naturels.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System